

# Производная степенной функции

# Математики о производной.

« Слова **«производная»** и **«произошло»** имеют похожие части слова, да и смысл похож: производная происходит от исходной функции (переложив на отношения человека: исходная функция - **«мама»**, её производная - **«дочь»** ).

**Производная** - часть математической науки, одно из её звеньев. Нет этого звена - прерваны связи между многими понятиями. »

# Что называется производной?

Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

# «Алгоритм нахождения производной»

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



**Исследуя функции, можно  
встретить случаи, когда  
функция определена, но не  
дифференцируема. Что это?**

**Почему так происходит?**

**Можно ли этому найти  
объяснения?**



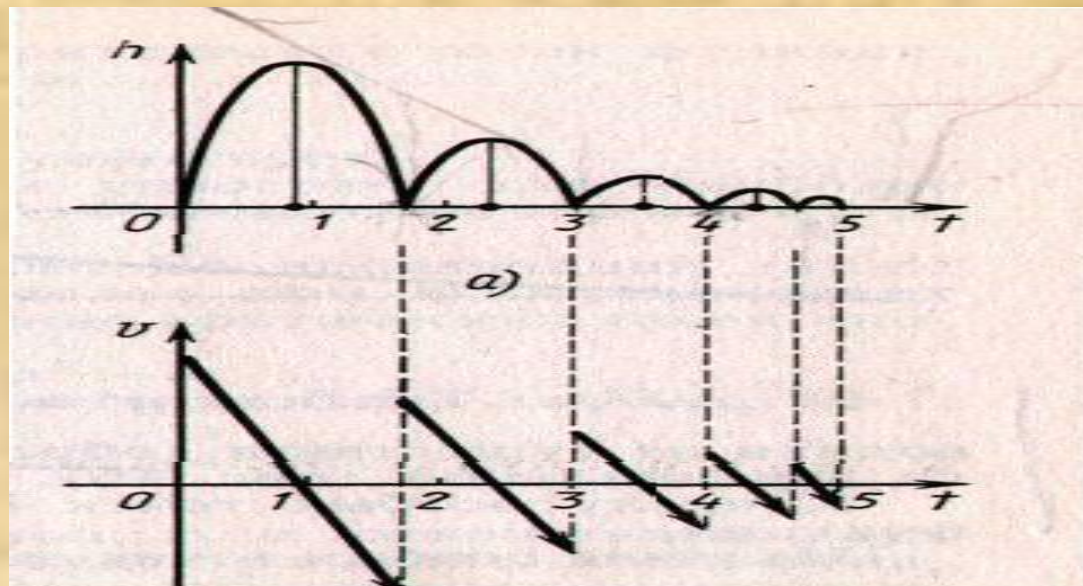
# Взгляд из детства.

**Всем с детства известно такое явление, как движение мяча, падающего на пол и упруго отскакивающего от него.**

**Это явление можно объяснить с помощью законов физики.**

**Попробуем переложить всё это на математический язык.**

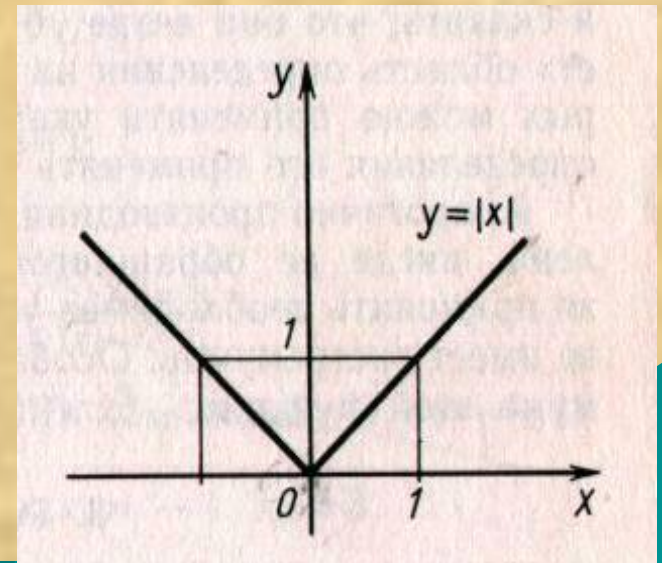
При отскоке от пола (при  $h=0$ ) направление движения мяча меняется (и функция достигает минимума), однако в эти моменты скорость мяча не равна нулю, касательную к графику  $h$  провести нельзя. На графике скорости мяча мы видим: в момент отскока скорость мяча однозначно найти нельзя - график скорости в эти моменты имеет разрывы. (Производная в этих точках не существует).



# Примеры функций, имеющих особые ТОЧКИ.

Все функции вида  $y = |f(x)|$ , при  $f(x)=0$  имеют особые точки - точки излома.

Частный случай:  $y = |x|$ ,  
где  $x=0$  - особая точка.

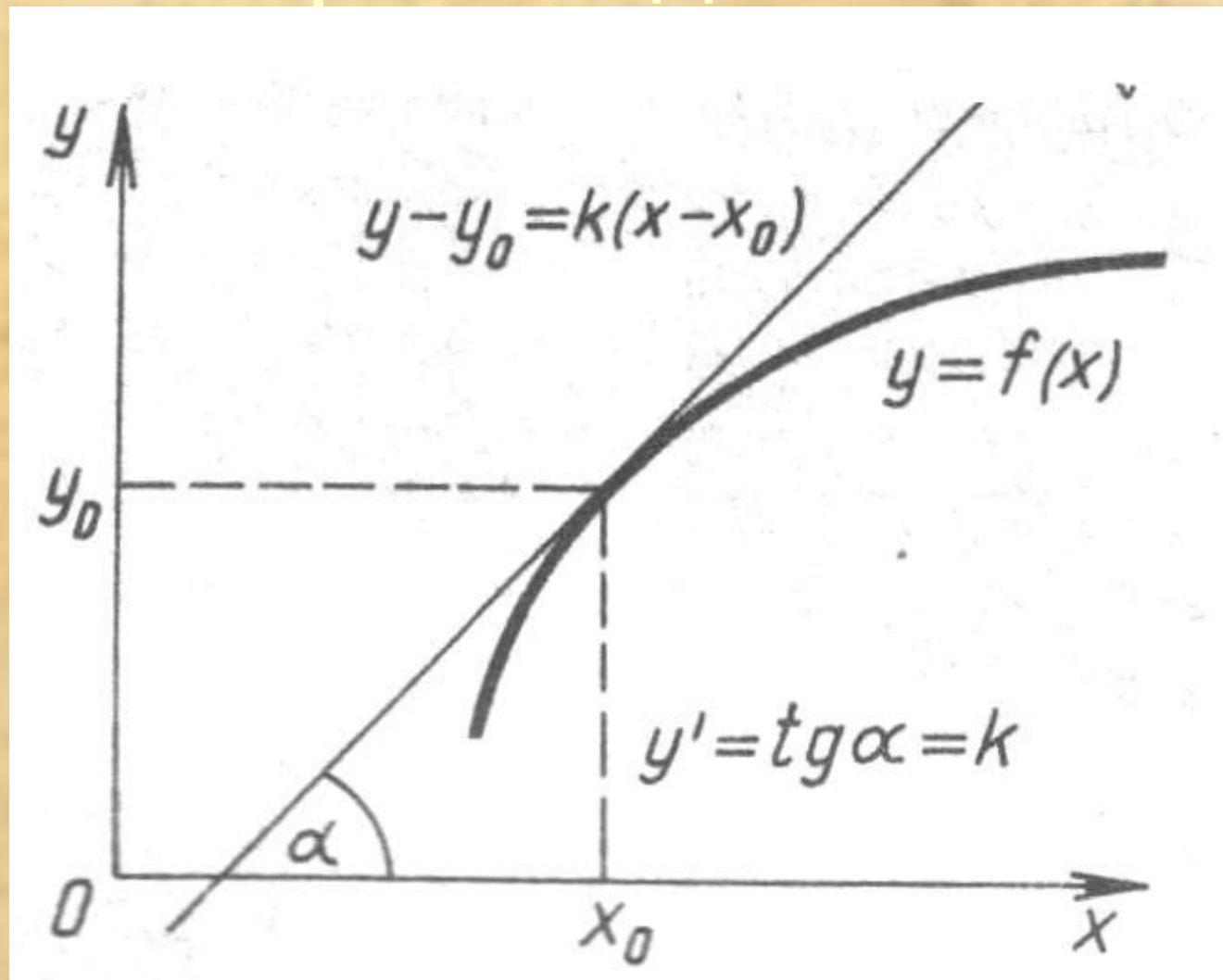




$$f'(x) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

- ◆ Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции  $y=f(x)$  в точке  $x$  равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой  $x_0$

# Геометрический смысл производной



# Физический смысл

$$y = f(x)$$

$$f'(x_0)$$

$$f''(x_0)$$

скорость

ускорение

Производная от перемещения по времени является мгновенная скорость.

Производная от скорости по времени является ускорением.

# Задача 1

Точка движется прямолинейно по закону  $S(t) = 2t^3 - 3t$ .

Вычислите скорость движения точки:

а) в момент времени  $t$ ;

б) в момент времени  $t=2c$ .

Решение.

$$\text{а) } V(t) = S'(t) = (2t^3 - 3t)' = 6t^2 - 3$$

$$\text{б) } V(2) = 6 * 2^2 - 3 = 21(\text{м / с})$$

# Задача 2

Найдите скорость и ускорение для точки, движущейся по закону  $S(t) = t^2 + 2t + 3$ :

а) в момент времени  $t$ ;

б) в момент времени  $t=3$ с.

Решение.

$$а) V(t) = S'(t) = (t^2 + 2t + 3)' = 2t + 2$$

$$a(t) = V'(t) = S''(t) = 2$$

$$б) V(3) = 2 * 3 + 2 = 8(м / с)$$

$$a(3) = 2(м / с^2)$$

# Проблемная задача

- ◆ **Две материальные точки движутся прямолинейно по законам**

$$S_1(t) = 2,5t^2 - 6t + 1,$$

$$S_2(t) = 0,5t^2 + 2t - 3.$$

**В какой момент времени скорости их равны, т.е.**

$$V_1(t_0) = V_2(t_0), t_0 - ?$$

## Решение проблемной задачи

$$V_1(t) = (2,5t^2 - 6t + 1)' = 5t - 6$$

$$V_1(t_0) = 5t_0 - 6$$

$$V_2(t) = (0,5t^2 + 2t - 3)' = t + 2$$

$$V_2(t_0) = t_0 + 2$$

$$5t_0 - 6 = t_0 + 2$$

$$t_0 = 2$$

## Разбор некоторых задач самостоятельной работы

$$m(l) = 3l^2 + 5l \text{ (г)}, l_{AB} = 20 \text{ см},$$
$$\rho_{\text{сер}} = ?$$

Решение:

$$\text{Т.к. } \rho(l) = m'(l), \text{ то } \rho(l) = 6l + 5.$$
$$l = 10 \text{ см}, \rho(10) = 60 + 5 =$$
$$65(\text{г/см}^3)$$

Ответ:  $65 \text{ г/см}^3$ .



# Разбор некоторых задач самостоятельной работы

**А7** Какая из указанных ниже функций имеет производную, график которой изображен на рисунке?

1)  $f(x) = 1 - x^2$

2)  $f(x) = x - x^2$

3)  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$

4)  $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$

