Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Г.В. Аверкова
Курс «Высшая математика»

Тема 10 «Прямая в пространстве»

Переход от общих уравнений прямой к каноническому виду, векторное и параметрические уравнения прямой. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Угол между двумя прямыми, условие параллельности и перпендикулярности. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве: нахождение точки пересечения прямой и плоскости, условия параллельности и перпендикулярности.

Цели и задачи

- Цели:
  – Рассмотреть основные понятия по теме «Прямая в пространстве»
- Задачи:
  – Рассмотреть различные способы задания прямой в пространстве
  – Рассмотреть взаимное расположение двух прямых в пространстве
  – Исследовать взаимное расположение прямой и плоскости

Теоретический материал

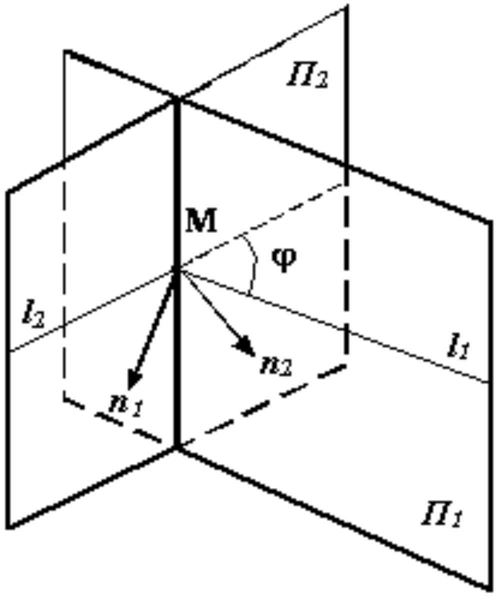
1) Общее уравнение прямой

Прямая линия в пространстве определяется как линия пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

$\overline{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \quad \overline{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ –

нормальные векторы плоскостей



$\bar{s} = \{m, n\}$

Теоретический материал

2) Канонические уравнения прямой,

проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$\bar{s} = \{m, n, p\}$ - направляющий вектор прямой

$$\bar{s} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2, \qquad m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \qquad n = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \qquad p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

Теоретический материал

3) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \qquad M_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

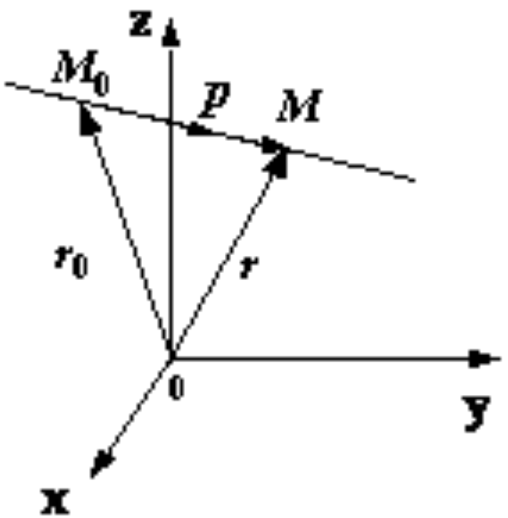
4) Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Теоретический материал

Параметрические уравнения прямой в векторной форме

$$\bar{r} = \bar{r}^{\circ} + \bar{s}t = 0$$



$\bar{r}$ - радиус-вектор точки $M(x, y, z)$

$\bar{r}^{\circ}$ - радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$

Теоретический материал

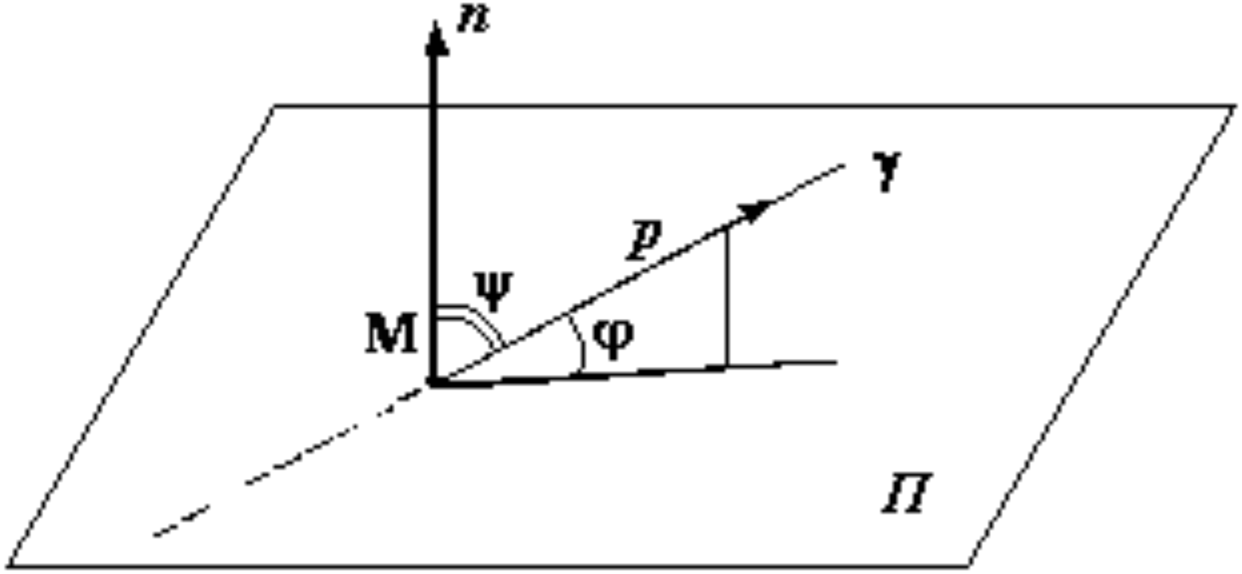
Взаимное расположение прямой и плоскости

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},\qquad Ax+By+Cz+D=0$$

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость

$$\sin(\widehat{\Pi,\ l})=\left|\cos(\widehat{\bar{n},\bar{s}})\right|=\frac{|\bar{n}\cdot\bar{s}|}{|\bar{n}|\cdot|\bar{s}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

Теоретический материал



Теоретический материал

В пространстве возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости

- Прямая и плоскость пересекаются

$$Am + Bn + Cp \neq 0$$

Координаты точки пересечения находятся по формулам

$$x^* = x_0 + mt, \qquad y^* = y_0 + nt, \qquad z^* = z_0 + pt$$

подстановкой значения параметра

$$t^* = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$$

Теоретический материал

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$l \perp \Pi \Leftrightarrow \bar{s} \perp \bar{n} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

- Прямая и плоскость параллельны

$$l \parallel \Pi \Leftrightarrow \begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$$

- Прямая принадлежит плоскости

$$l \in \Pi \Leftrightarrow \begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

Теоретический материал

Взаимное расположение двух прямых

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Углом между двумя прямыми в пространстве называется любой из углов, образованных двумя прямыми, проведенными через произвольную точку пространства параллельно данным

$$\cos(l_1 \hat{,} l_2)=\cos(\bar{s}_1 \hat{,} \bar{s}_2)=\frac{\bar{s}_1\cdot\bar{s}_2}{|\bar{s}_1|\cdot|\bar{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

Теоретический материал

В пространстве возможны четыре случая взаимного расположения двух прямых

• Прямые параллельны

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2, \qquad M_1(x_1, y_1, z_1) \notin l_2, \qquad M_2(x_2, y_2, z_2) \notin l_1$$

• Прямые совпадают

$$\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \parallel \overline{M_1 M_2}$$

Теоретический материал

• Прямые пересекаются

• Прямые являются скрещивающимися

Две непараллельные прямые пересекаются
при выполнении условия

$$\overline{M_1M_2}\cdot(\bar{s}_1\times\bar{s}_2)=0$$

или

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

В противном случае прямые являются скрещивающимися

Теоретический материал

Условие перпендикулярности двух прямых

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \bar{s}_1 \perp \bar{s}_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

Расстояние от точки до прямой

$$d = d(M^*, l) = \frac{\left| \bar{s} \times \overline{M_0 M^*} \right|}{\left| \bar{s} \right|}$$

Ключевые понятия

- Прямая
- Нормальный вектор
- Направляющий вектор
- Расстояние от точки до прямой
- Угол между двумя прямыми
- Параллельность и перпендикулярность

Контрольные вопросы

- Общее уравнение прямой
- Уравнение прямой по двум точкам
- Канонические уравнения прямой
- Параметрические уравнения прямой
- Угол между прямой и плоскостью
- Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве
- Угол между двумя прямыми
- Взаимное расположение двух прямых в пространстве
- Расстояние от точки до прямой

Дополнительная литература