

Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Г.В. Аверкова
Курс «Высшая математика»

Тема 10 «Прямая в пространстве»

Переход от общих уравнений прямой к каноническому виду, векторное и параметрические уравнения прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Угол между двумя прямыми, условие параллельности и перпендикулярности. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве: нахождение точки пересечения прямой и плоскости, условия параллельности и перпендикулярности.



Цели и задачи

- Цели:

- Рассмотреть основные понятия по теме «Прямая в пространстве»

- Задачи:

- Рассмотреть различные способы задания прямой в пространстве
- Рассмотреть взаимное расположение двух прямых в пространстве
- Исследовать взаимное расположение прямой и плоскости

Теоретический материал

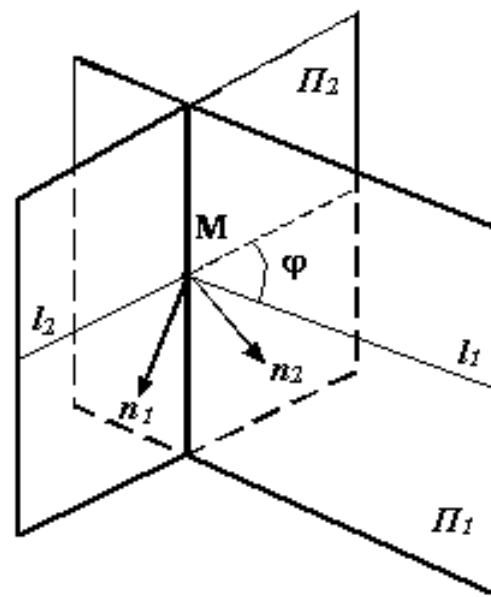
1) Общее уравнение прямой

Прямая линия в пространстве определяется как линия пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

$$\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \quad \bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\} -$$

нормальные векторы плоскостей



$$\bar{s} = \{m, n\}$$

Теоретический материал

2) Канонические уравнения прямой,

проходящей через заданную точку
параллельно заданному вектору

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$\bar{s} = \{m, n, p\}$ - направляющий вектор прямой

$$\bar{s} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2, \quad m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad n = - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

Теоретический материал

3) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

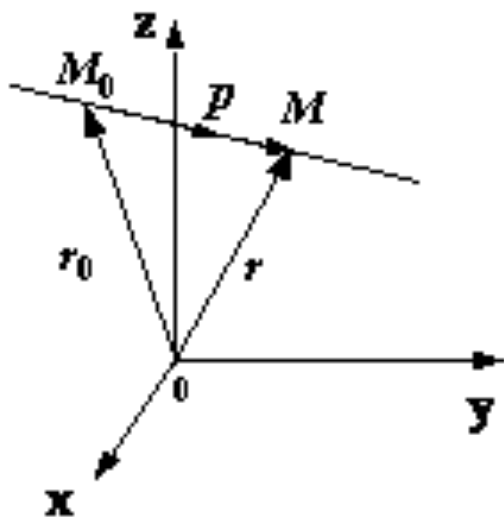
4) Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Теоретический материал

Параметрические уравнения прямой в векторной форме

$$\bar{r} = \bar{r}^{\circ} + \bar{s}t = 0$$



\bar{r} - радиус-вектор
точки

$M(x, y, z)$

\bar{r}° - радиус-вектор
точки

$M_0(x_0, y_0, z_0)$

Теоретический материал

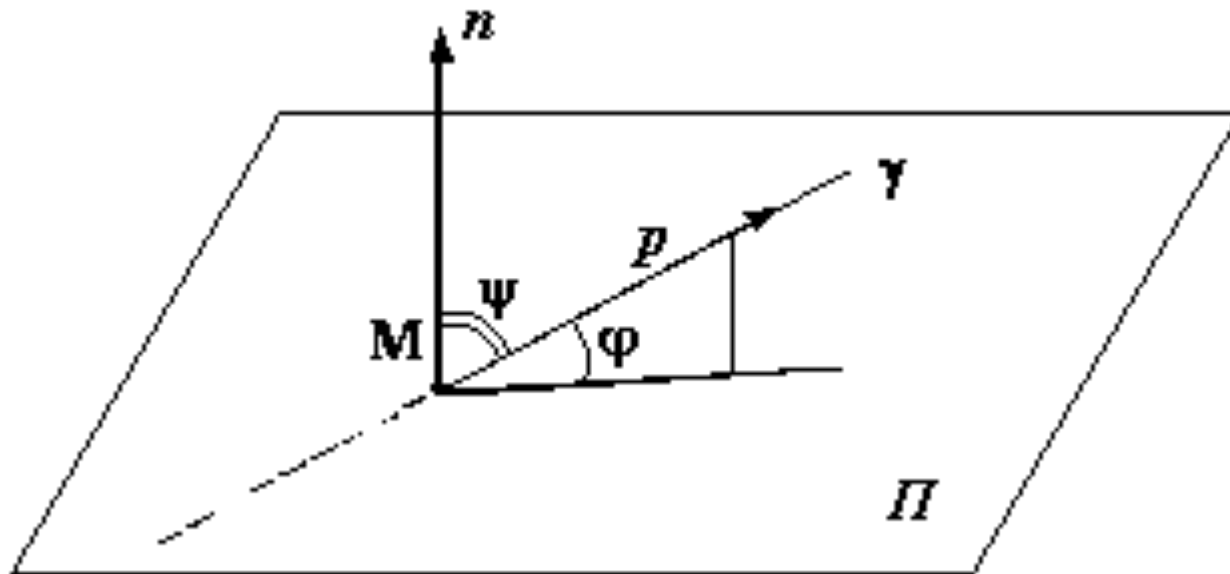
Взаимное расположение прямой и плоскости

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость

$$\sin(\hat{\Pi}, l) = |\cos(\hat{\bar{n}}, \bar{s})| = \frac{|\bar{n} \cdot \bar{s}|}{|\bar{n}| \cdot |\bar{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Теоретический материал



Теоретический материал

В пространстве возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости

- Прямая и плоскость пересекаются

$$Am + Bn + Cp \neq 0$$

Координаты точки пересечения находятся по формулам

$$x^* = x_0 + mt, \quad y^* = y_0 + nt, \quad z^* = z_0 + pt$$

подстановкой значения параметра

$$t^* = - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$$

Теоретический материал

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$l \perp \Pi \Leftrightarrow \bar{s} \perp \bar{n} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

- Прямая и плоскость параллельны

$$l \parallel \Pi \Leftrightarrow \begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$$

- Прямая принадлежит плоскости

$$l \in \Pi \Leftrightarrow \begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

Теоретический материал

Взаимное расположение двух прямых

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

Углом между двумя прямыми в пространстве называется любой из углов, образованных двумя прямыми, проведенными через произвольную точку пространства параллельно данным

$$\cos(\hat{l}_1, \hat{l}_2) = \cos(\hat{\bar{s}}_1, \hat{\bar{s}}_2) = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Теоретический материал

В пространстве возможны четыре случая взаимного расположения двух прямых

- Прямые параллельны

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2, \quad M_1(x_1, y_1, z_1) \notin l_2, \quad M_2(x_2, y_2, z_2) \notin l_1$$

- Прямые совпадают

$$\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \parallel \overline{M_1 M_2}$$

Теоретический материал

- Прямые пересекаются
- Прямые являются скрещивающимися

Две непараллельные прямые пересекаются при выполнении условия

$$\overline{M_1M_2} \cdot (\bar{s}_1 \times \bar{s}_2) = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

В противном случае прямые являются скрещивающимися

Теоретический материал

Условие перпендикулярности двух прямых

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \bar{s}_1 \perp \bar{s}_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

Расстояние от точки до прямой

$$d = d(M^*, l) = \frac{|\bar{s} \times \overline{M_0 M^*}|}{|\bar{s}|}$$

Ключевые понятия

- Прямая
- Нормальный вектор
- Направляющий вектор
- Расстояние от точки до прямой
- Угол между двумя прямыми
- Параллельность и перпендикулярность

Контрольные вопросы

- Общее уравнение прямой
- Уравнение прямой по двум точкам
- Канонические уравнения прямой
- Параметрические уравнения прямой
- Угол между прямой и плоскостью
- Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве
- Угол между двумя прямыми
- Взаимное расположение двух прямых в пространстве
- Расстояние от точки до прямой

Дополнительная литература
