Алгебра и начала анализа
10 класс

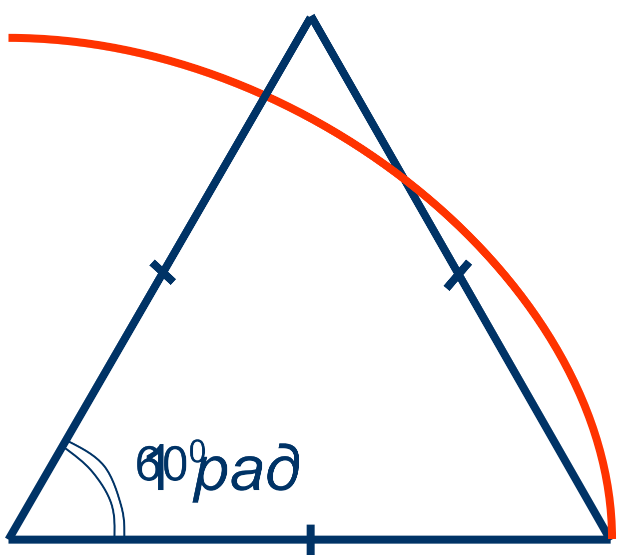
Радианная мера углов и дуг

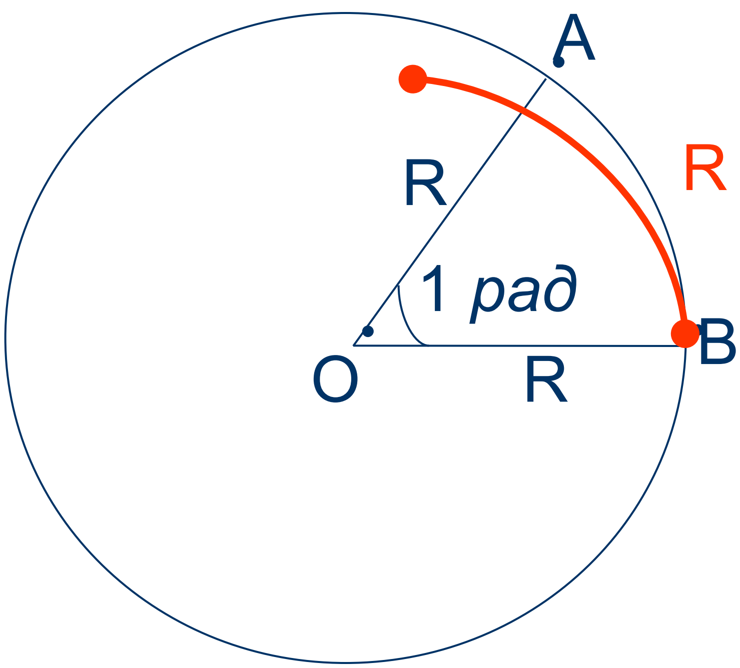
Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

Радианом называется величина центрального угла, который опирается на дугу окружности длиной в один радиус (обозначается 1 *рад*).

$\cup AB = R$

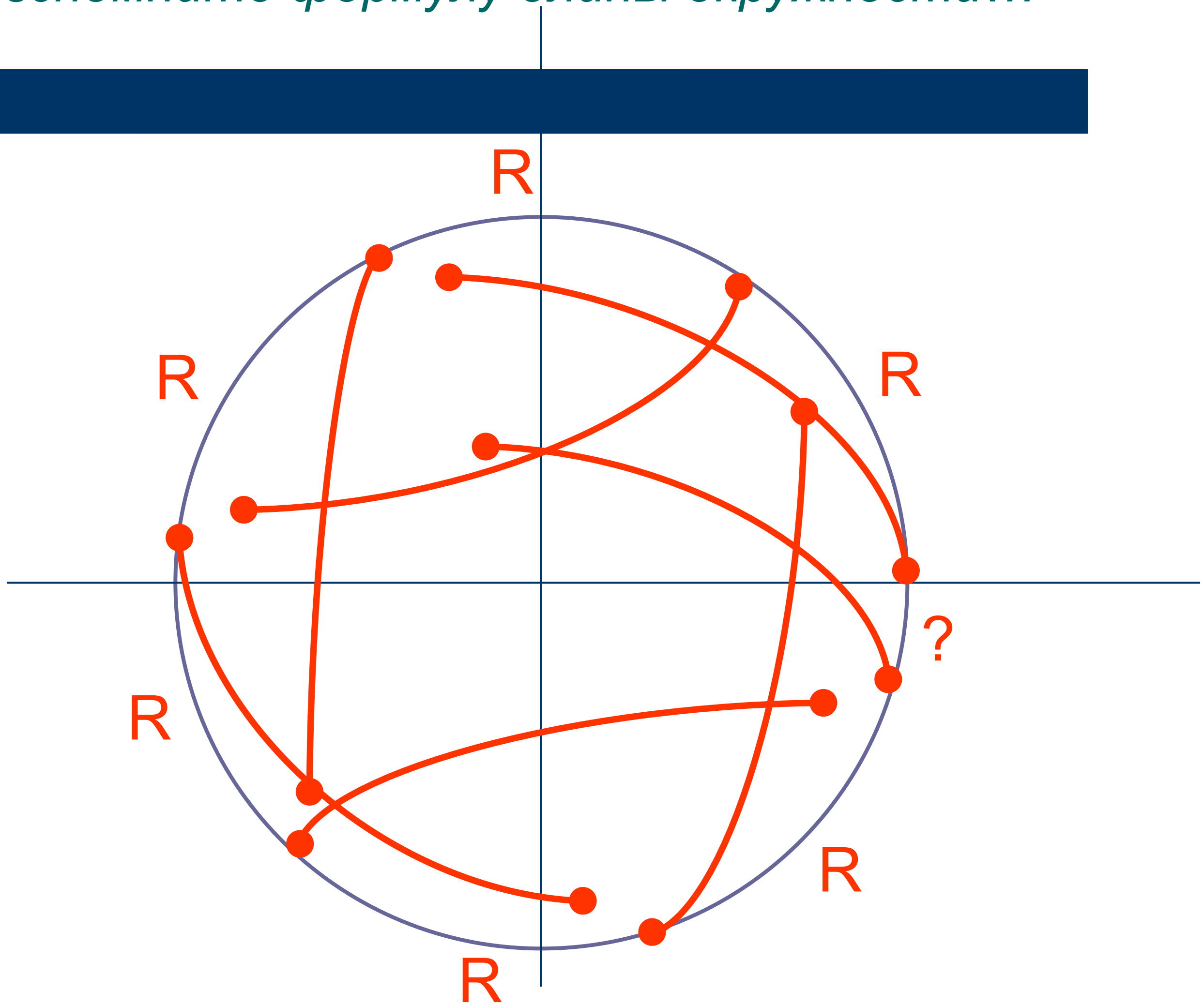
$\angle AOB = 1$ *рад*





Из скольких дуг, длиной R, состоит окружность?

Подсказка: вспомните формулу длины окружности…



360^0 – 2π *рад*

1^0 – *x рад*

360^0 – 2π *рад*

x^0 – 1 *рад*

- **<u>Задание 1</u>**. Вывести правила перевода из радианной меры в градусную и наоборот.

Ответ: $\alpha^0 = \alpha^0 \cdot \frac{\pi}{180^0}$ *рад* – правило перевода из градусной меры в радианную;

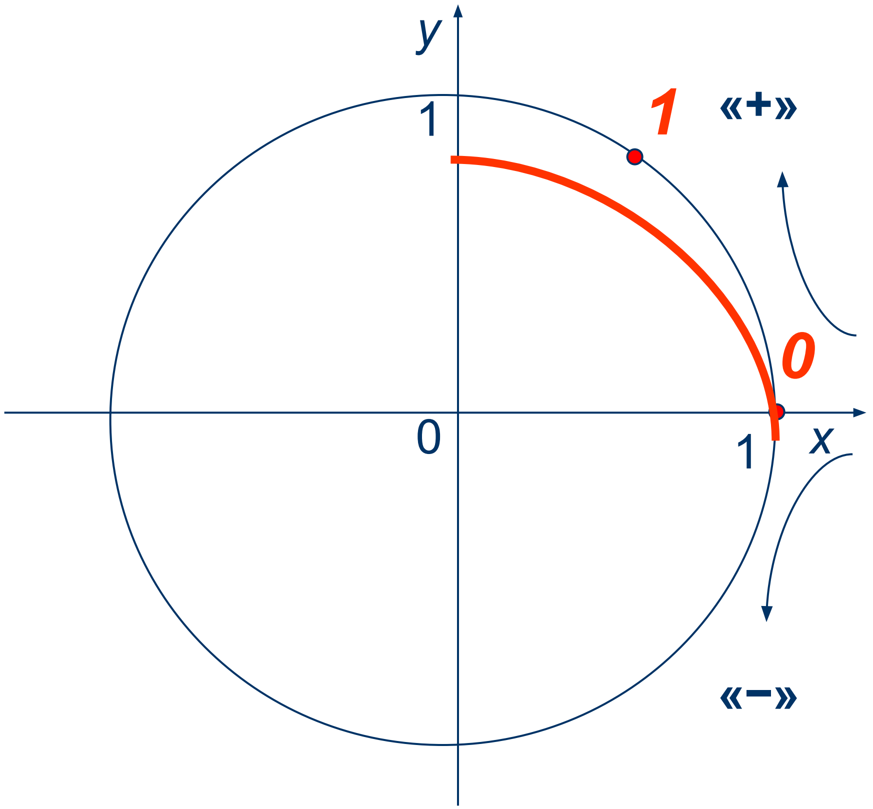
α *рад* $= \alpha \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$ – правило перевода из радианной меры в градусную.

1 *рад* $= \frac{180^0}{\pi}$; 1 *рад* ≈ $57^0 19'$

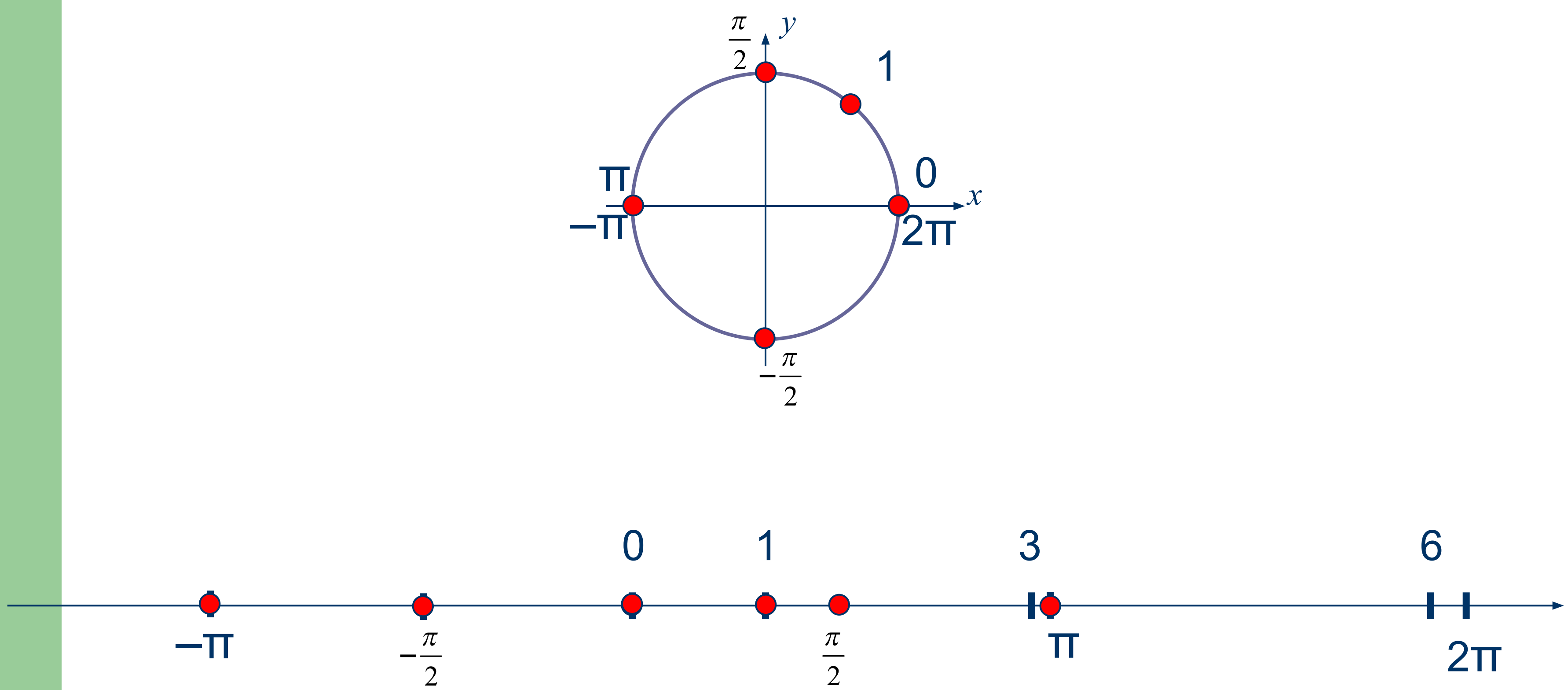
$1^0 = \frac{\pi}{180}$ *рад;* 1^0 ≈ 0,017 *рад*

Окружность с центром в начале системы координат *Oxy* и радиусом, равным единице, называется ***единичной***, а ограниченный ей круг – ***тригонометрическим*****.**

- Приняв точку пересечения окружности с положительной частью оси *Ox* за начало отсчета;
- Выбрав положительное направление – против часовой стрелки, отрицательное – по часовой стрелке;
- Отложив от начала отсчета дугу в 1 *рад*, мы получим, что тригонометрическая окружность в некотором смысле «эквивалентна» понятию «числовая прямая».



Проследите за одновременным движением точки на координатной прямой и на тригонометрической окружности:



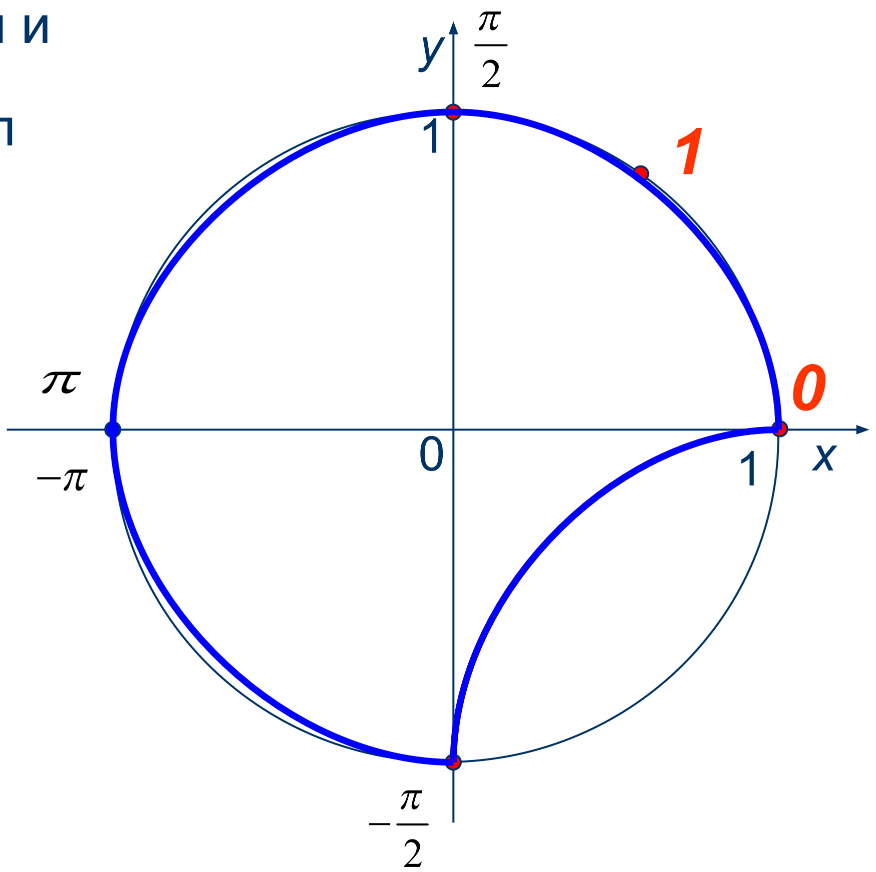
Обязательно разберитесь, почему на прямой **семь** точек, а на окружности их **пять**.

Так как дуги – это части окружности, то длины некоторых из них будут выражены через число π (объясните почему). $\pi = 3{,}14159... \approx 3{,}14$

- Откладывая в положительном и отрицательном направлениях от начала отсчета прямой угол получим точки, соответствующие числам …

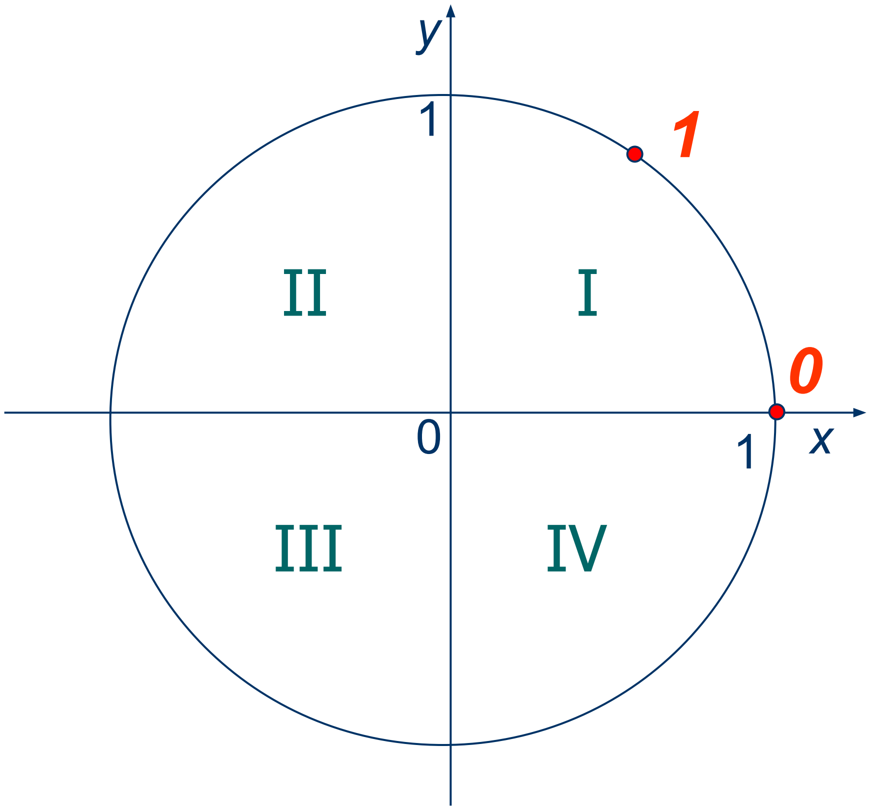
  $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$ (объясните почему);
- Выполнив поворот на развернутый угол в положительном и отрицательном направлениях получаем две совпадающие точки окружности с координатами…

  π и $-\pi$.



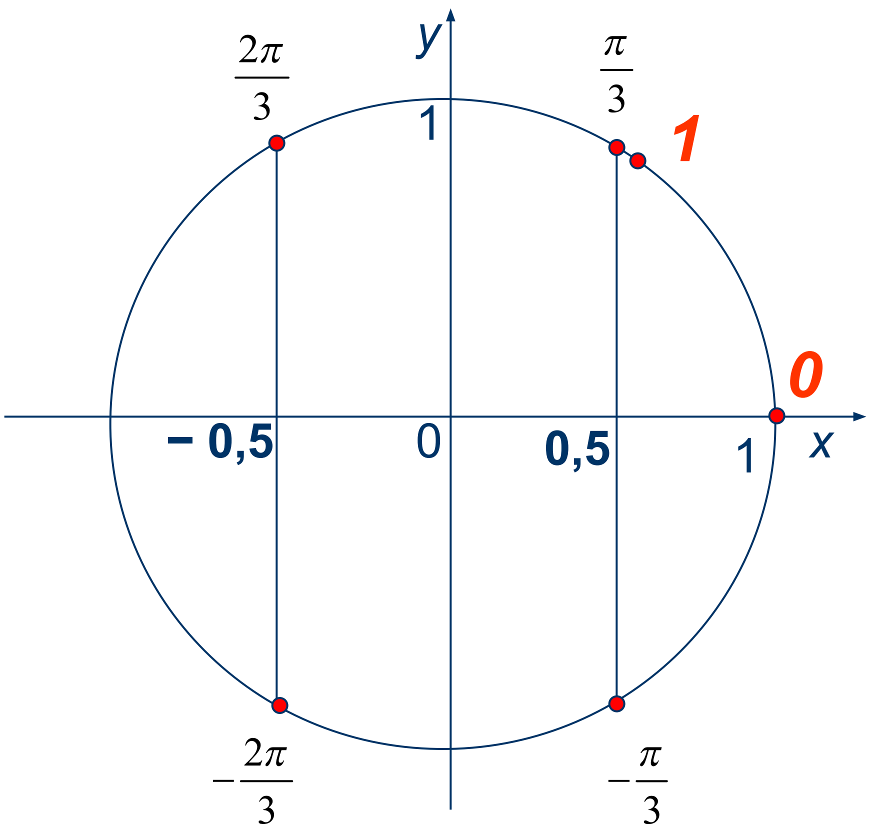
Напомним, что декартова система разбивается координатными осями на четыре координатные четверти – I, II, III и IV.

- <u>Задание 2</u>. Определите границы координатных четвертей через углы поворота в радианной мере, взятых в положительном направлении.
- <u>Задание 3</u>. Выполните предыдущее задание, при условии, что выбирается отрицательное направление углов поворота.
- <u>Задание 4</u>. Какой координатной четверти принадлежит точка окружности с координатой 6,28?



$cos\,60^0 = \frac{1}{2}$ − это соотношение может Вам понадобиться для понимания некоторых фактов!

- Отметив на окружности точки с абсциссой 0,5 мы получим точки, соответствующие числам …
  $\frac{\pi}{3}$ и $-\frac{\pi}{3}$ (объясните почему);
- Аналогично, получаются точки окружности с координатами
  $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$.
- Обратите внимание на симметричность относительно оси *Ox* полученных точек!

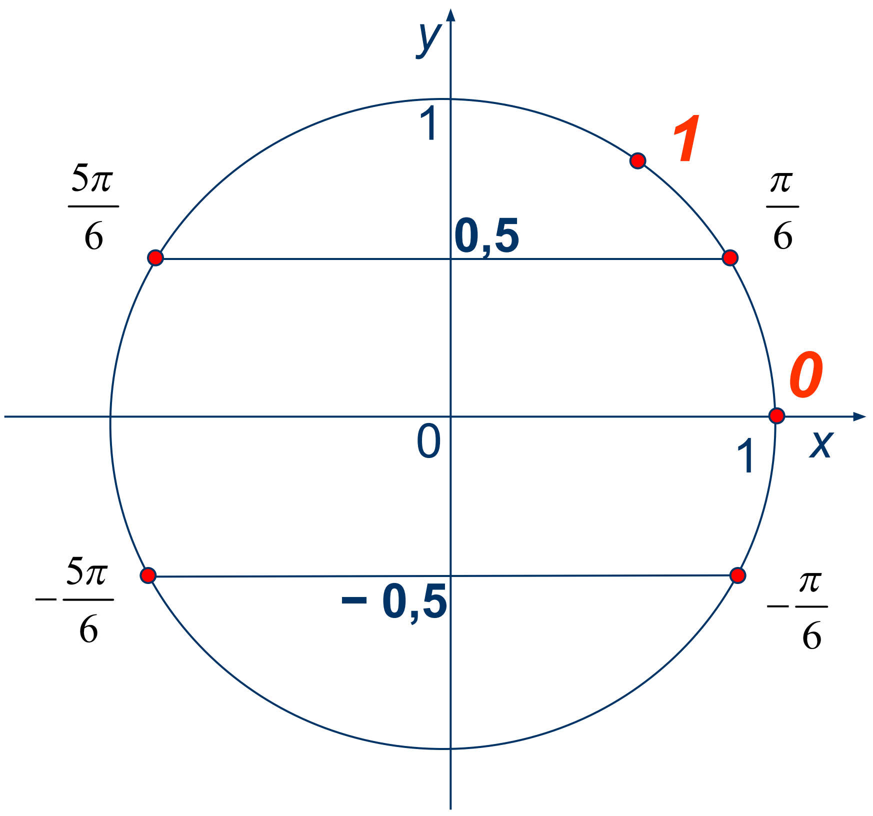


$sin\,30^0 = \dfrac{1}{2}$ – это соотношение может Вам понадобиться для понимания некоторых фактов!

- Отметив на окружности точки с ординатой 0,5 мы получим точки, соответствующие числам …

  $\dfrac{\pi}{6}$ и $\dfrac{5\pi}{6}$ (объясните почему);
- Аналогично, получаются точки окружности с координатами

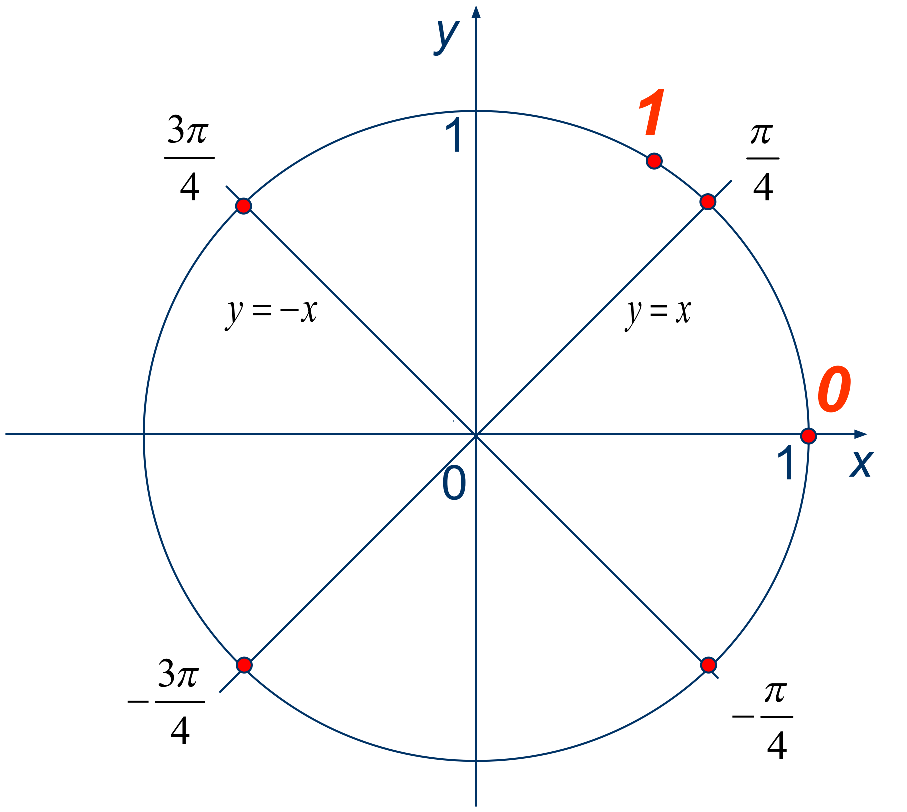
  $-\dfrac{5\pi}{6}$; $-\dfrac{\pi}{6}$.
- Обратите внимание на симметричность относительно оси *Oy* полученных точек!



Графики функций *y=x* и *y=−x* − прямые, являющиеся биссектрисами координатных четвертей.

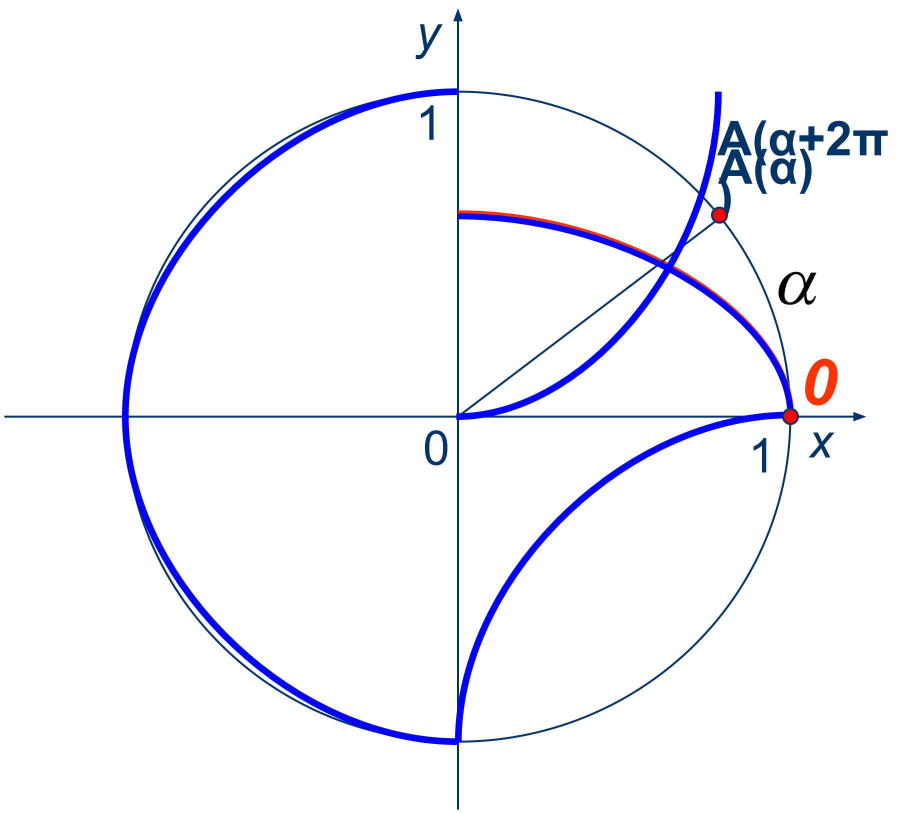
- Постройте графики функций *y=x* и *y=−x*. Подумайте, какие углы поворота соответствуют точкам пересечения этих прямых с тригонометрической окружностью?...
- …Ответ:

$$\frac{\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4};\ -\frac{3\pi}{4}.$$



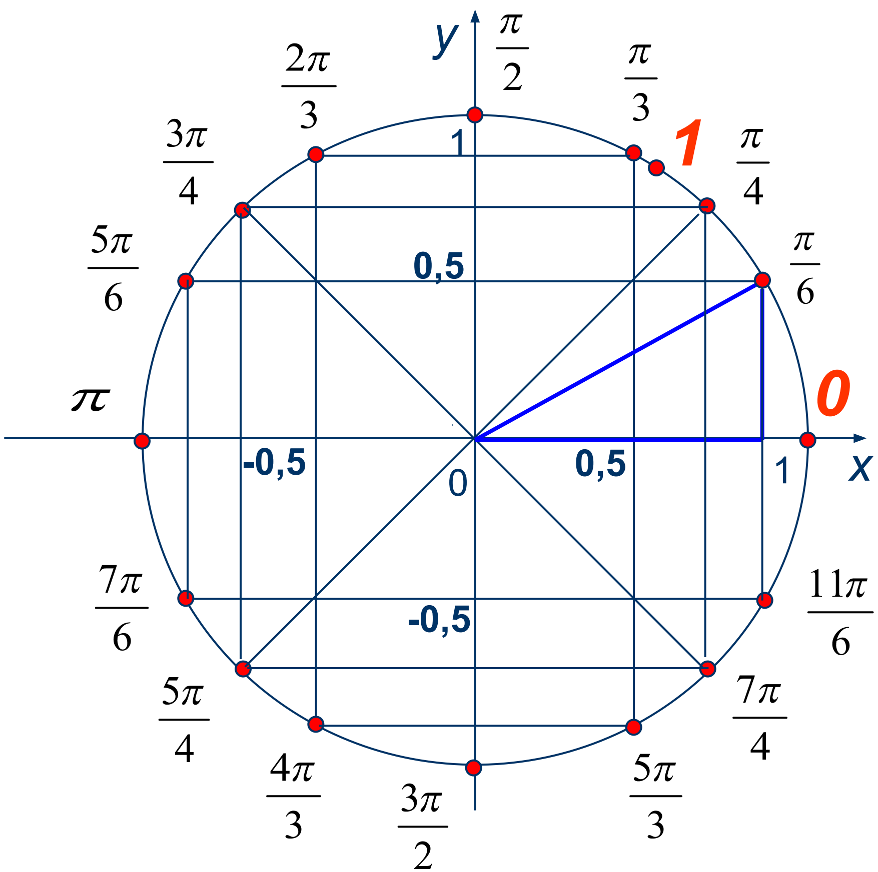
Отметим на тригонометрической окружности точку А, соответствующую **произвольному острому положительному** углу поворота α.

- Если добавить полный поворот к углу α, то мы снова окажемся в той же точке А. Но теперь ее координата равна (подумайте)… . $\alpha + 2\pi$
- Вообще, любую точку окружности можно получить поворотом на угол, вида $\alpha+2\pi n$, где $n \in Z$ и $\alpha \in [0;2\pi)$.



Итогом нашей предыдущей работы является данная окружность, на которой отмечены наиболее часто встречающиеся в различных таблицах углы.

- Примечание. На чертеже отмечены только положительные углы поворота.
- Задание 5. Найдите координаты всех точек, отмеченных на данной окружности (указание: рассмотрите различные прямоугольные треугольники с гипотенузой-радиусом (см. рис.) и примените теорему Пифагора ; помните о симметричности точек).



Ответы и решения.

- Задание 2. $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ - I четверть, $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ - II четверть,

  $\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ - III четверть, $\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ - IV четверть.

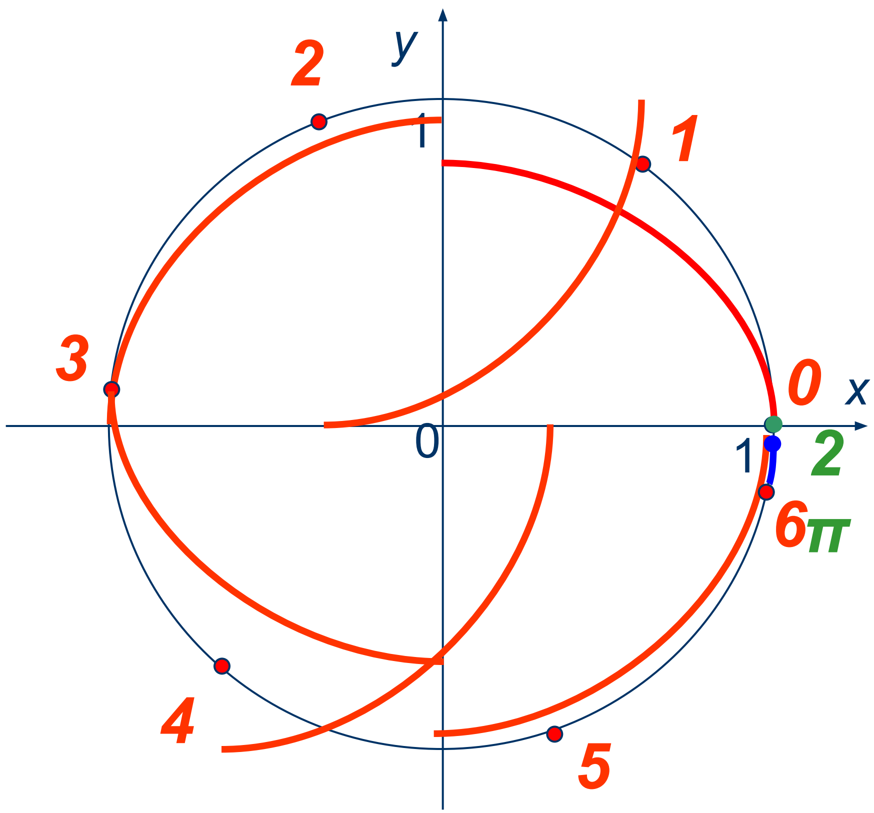
- Задание 3. $\left(-2\pi;-\frac{3\pi}{2}\right)$ - I четверть, $\left(-\frac{3\pi}{2};-\pi\right)$ - II четверть,

  $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$ - III четверть, $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ - IV четверть

Ответы и решения.

- Задание 4. 6,28∈IV (см.рис.)

  6,28<2π (обязательно разберитесь в совпадении цвета цифр и некоторых частей окружности)!



Ответы и решения.

- Задание 5.

$0\left(1;0\right)$ $\frac{\pi}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ $\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\frac{\pi}{2}(0;1)$ $\frac{2\pi}{3}\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\frac{3\pi}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\frac{5\pi}{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$

$\pi\left(-1;0\right)$ $\frac{7\pi}{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ $\frac{5\pi}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\frac{4\pi}{3}\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\frac{3\pi}{2}(0;-1)$ $\frac{5\pi}{3}\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\frac{7\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\frac{11\pi}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$