

Иррациональные уравнения

Выполнила Обухова А.А. ученица 8"Б" класса
школы № 89 2007 год.

оглавление

- Определение
- Основной метод решения иррациональных уравнений
- Посторонний корень иррационального уравнения
- Способы обнаружения постороннего корня
- Алгоритм решения иррациональных уравнений
- Метод подбора
(метод пристального взгляда).
- Алгоритм решения методом подбора.
- Определение равносильных уравнений.
- Равносильные преобразования уравнений
- Нервносильные преобразования уравнения

Определение

Иррациональное уравнение

– это уравнение, в котором содержится переменная под знаком квадратного корня.

Пример:

$$\sqrt{2x + 1} = 3$$

Основной метод решения иррациональных уравнений

- это метод возведения в квадрат обеих частей уравнения.

$$\sqrt{2x - 5} = \sqrt{4x - 7};$$

$$2x - 5 = 4x - 7;$$

$$2x - 4x = -7 + 5;$$

$$-2x = -2;$$

$$x = 1.$$

Посторонний корень иррационального уравнения

При возведении в квадрат, получаем посторонние корни.

$x=1$ в предыдущем уравнении посторонний корень, т.к. если подставить его в данное иррациональное уравнение, получим

$$\sqrt{2 \cdot 1 - 5} = \sqrt{4 \cdot 1 - 7};$$

$$\sqrt{2 - 5} = \sqrt{4 - 7};$$

$$\sqrt{-3} = \sqrt{-3}.$$

Ответ: уравнение не имеет корней.

Способы обнаружения постороннего корня

1. Проверка – подстановка полученных корней в иррациональное уравнение.
2. По области допустимых значений – ОДЗ.

Пример:

Решить иррациональное уравнение:

$$\sqrt{2x^2 + 5x - 2} = x - 6.$$

Решение:

$$(\sqrt{2x^2 + 5x - 2})^2 = (x - 6)^2; \quad \text{ОДЗ: } x - 6 \geq 0;$$

$$2x^2 + 5x - 2 = x^2 - 12x + 36; \quad x \geq 6.$$

$$2x^2 + 5x - 2 - x^2 + 12x - 36 = 0;$$

$$x^2 + 17x - 38 = 0;$$

Найдём корни уравнения по обратной теореме Виета:

$$\begin{array}{l|l} x_1 + x_2 = -17 & x_1 = 2; \\ x_1 \cdot x_2 = -38. & x_2 = -19. \end{array}$$

Проверка

1 способ:

$$\sqrt{2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 2} = 2 - 6, \quad \sqrt{2 \cdot (-19)^2 - 2} = -19 - 6,$$
$$\Rightarrow \sqrt{16} = -4 \text{ неверно} \quad \Rightarrow \sqrt{625} = -25 \text{ неверно}$$

2 способ:

$x_1 = 2$, не удовлетворяет ОДЗ.

$x_2 = -19$, не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: уравнение не имеет корней.

Алгоритм решения иррациональных уравнений:

- Область допустимых значений.
- Возвести в квадрат.
- Решить рациональное уравнение.
- Проверить, удовлетворяют ли корни уравнения ОДЗ (или подставить полученные корни в уравнение).
- Отсеять посторонние корни.

Проверь себя

Задание: решите уравнения.

$$1) \sqrt{5x - 16} = x - 2$$



$$2) \sqrt{2x^2 + 8x + 16} = 44 - 2x$$



$$3) \sqrt{3x + 7} + \sqrt{x + 2} = 3$$



ОТВЕТЫ:

$$\begin{aligned} 1) 5x - 16 &= x^2 - 4x + 4; \\ x^2 - 4x + 4 - 5x + 16 &= 0; \\ x^2 - 9x + 20 &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ОДЗ: } x - 2 &\geq 0; \\ x &\geq 2. \end{aligned}$$

Найдём корни уравнения по обратной теореме Виета:

$$\begin{array}{l|l} x_1 + x_2 = 9; & x_1 = 5; \text{ удовлетворяет ОДЗ} \\ x_1 \cdot x_2 = 20. & x_2 = 4. \text{ удовлетворяет ОДЗ} \end{array}$$

Ответ: 4; 5.

ОТВЕТЫ:

$$2) 2x^2 + 8x + 16 = 1936 - 176x + 4x^2;$$

$$- 2x^2 + 184x - 1920 = 0;$$

$$x^2 - 92x + 960 = 0;$$

Найдём корни уравнения по обратной теореме Виета:

$$\begin{array}{l|l} x_1 + x_2 = 92; & x_1 = 80; \\ x_1 \cdot x_2 = 960. & x_2 = 12. \end{array}$$

Проверка:

$$\sqrt{2 \cdot 80^2 + 8 \cdot 80 + 16} = 44 - 2 \cdot 80; \quad \sqrt{2 \cdot 12^2 + 8 \cdot 12 + 16} = 44 - 2 \cdot 12;$$

$$\sqrt{2 \cdot 80^2 + 8 \cdot 80 + 16} \neq -116. \quad \sqrt{400} = 20.$$

Выражение не имеет смысла. Ответ: 12.

ОТВЕТЫ:

$$3)\sqrt{3x+7} = 3 - \sqrt{x+2};$$

$$3x+7 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x+2} + (\sqrt{x+2})^2;$$

$$3x+7 = 9 - 6\sqrt{x+2} + x+2;$$

$$6\sqrt{x+2} = 9 + x + 2 - 3x - 7;$$

$$6\sqrt{x+2} = 4 - 2x \mid \div 2;$$

$$3\sqrt{x+2} = 2 - x \mid \uparrow^2;$$

$$9(x+2) = 4 - 4x + x^2;$$

$$9x + 18 - 4 + 4x - x^2 = 0;$$

$$-x^2 + 13x + 14 = 0 \mid \cdot (-1);$$

$$x^2 - 13x - 14 = 0;$$

Ответы (продолжение):

Найдём корни уравнения по обратной теореме

Виета:

$$\begin{array}{l|l} x_1 + x_2 = 13; & x_1 = 14; \\ x_1 \cdot x_2 = -14. & x_2 = -1. \end{array}$$

Проверка:

$$\sqrt{3 \cdot 14 + 7} + \sqrt{14 + 2} = 3;$$

$$\sqrt{49} + \sqrt{16} \neq 3.$$

$$\sqrt{3 \cdot (-1) + 7} + \sqrt{(-1) + 2} = 3;$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{1} = 3.$$

Уравнение не имеет смысла.

Ответ: -1.

Метод подбора

(метод пристального взгляда).

Уравнение 3 решено путем двукратного возведения в квадрат. Познакомимся с другим методом его решения

Сумма двух монотонно возрастающих функций

$$y = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x-5}$$

если функция монотонно возрастающая на области определения, то функция принимает каждое своё значение один раз, значит других корней уравнение не имеет.

Алгоритм решения методом подбора:

1. Доказать, что других корней нет, или доказать, что их несколько.
2. Угадать (подобрать) один или несколько корней уравнения.

Примеры на метод подбора:

Задание: решите уравнения.

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5 \text{ решение (} x=1 \text{);}$$

$$\sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} = 2. \text{ решение}$$

(уравнение не имеет корней)

Определение равносильных уравнений.

Два уравнения $f(x)=g(x)$ и $r(x)=s(x)$ называются **равносильными**, если они имеют одинаковые корни (или, в частности, если оба уравнения не имеют корней).

Обычно при решении уравнения стараются заменить данное уравнение более простым, но равносильным ему. Такую замену называют **равносильным преобразованием уравнения**.

Равносильные преобразования уравнений

- Перенос членов уравнения из одной части уравнения в другую с противоположным знаком.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 5 = 7x - 8; \\ 2x - 7x = -8 - 5. \end{array} \right\} \text{уравнения равносильны}$$

Равносильные преобразования уравнений (продолжение)

- Умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число.

$$0,5x^2 - 0,3x = 2;$$

$$5x^2 - 3x = 20.$$

Неравносильные преобразования уравнения

1. Освобождение от знаменателей, содержащих переменные

$$\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2}$$

т.к. $x^2 = 4$ имеет два корня -2; и 2.

Посторонний корень – 2.

2. Возведение обеих частей уравнения в квадрат.