Иррациональные уравнения

Выполнила Обухова А.А. ученица 8’’Б’’ класса

школы № 89 2007 год.

оглавление

выход

Определение

Иррациональное уравнение

– это уравнение, в котором содержится переменная под знаком квадратного корня.

__Пример:__

$$\sqrt{2x+1}=3$$

Основной метод решения иррациональных уравнений

- это метод возведения в квадрат обеих частей уравнения.

$$\sqrt{2x-5}=\sqrt{4x-7};$$
$$2x-5=4x-7;$$
$$2x-4x=-7+5;$$
$$-2x=-2;$$
$$x=1.$$

Посторонний корень иррационального уравнения

При возведении в квадрат, получаем посторонние корни.

x=1 в предыдущем уравнении посторонний корень, т.к. если подставить его в данное иррациональное уравнение, получим

$$\sqrt{2\cdot 1-5}=\sqrt{4\cdot 1-7};$$

$$\sqrt{2-5}=\sqrt{4-7};$$

$$\sqrt{-3}=\sqrt{-3}.$$

Ответ: уравнение не имеет корней.

Способы обнаружения постороннего корня

1. Проверка – подстановка полученных корней в иррациональное уравнение.

2. По области допустимых значений – ОДЗ.

оглавление

назад

далее

Пример:

Решить иррациональное уравнение:

$$\sqrt{2x^2+5x-2}=x-6.$$

Решение:

$$(\sqrt{2x^2+5x-2})^2=(x-6)^2;$$

ОДЗ: $x-6\geq 0;$

$x\geq 6.$

$$2x^2+5x-2=x^2-12x+36;$$

$$2x^2+5x-2-x^2+12x-36=0;$$

$$x^2+17x-38=0;$$

Найдём корни уравнения по обратной теореме Виета:

$$\begin{array}{l|l} x_1+x_2=-17 & x_1=2; \\ x_1\cdot x_2=-38. & x_2=-19. \end{array}$$

Проверка

<u>1 способ:</u>

$\sqrt{2\cdot 2^2+5\cdot 2-2}=2-6,$ $\quad \sqrt{2\cdot(-19)^2-2}=-19-6,$

$\Rightarrow \sqrt{16}=-4$ **неверно** $\quad \Rightarrow \sqrt{625}=-25$ **неверно**

<u>2 способ:</u>

$x_1=2,$ **не удовлетворяет ОДЗ.**

$x_2=-19,$ **не удовлетворяет ОДЗ.**

<u>Ответ:</u> уравнение не имеет корней.

Алгоритм решения иррациональных уравнений:

- Область допустимых значений.
- Возвести в квадрат.
- Решить рациональное уравнение.
- Проверить, удовлетворяют ли корни уравнения ОДЗ (или подставить полученные корни в уравнение).
- Отсеять посторонние корни.

Проверь себя

Задание: **решите уравнения.**

$$1)\sqrt{5x-16}=x-2$$

$$2)\sqrt{2x^2+8x+16}=44-2x$$

$$3)\sqrt{3x+7}+\sqrt{x+2}=3$$

Ответы:

$$1)5x-16=x^2-4x+4;$$

$$x^2-4x+4-5x+16=0;$$

$$x^2-9x+20=0;$$

ОДЗ: $x-2\geq 0;$

$x\geq 2.$

Найдём корни уравнения по обратной теореме Виета:

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=9; \\ x_1\cdot x_2=20. \end{array}\right| \begin{array}{l} x_1=5; \\ x_2=4. \end{array}$$

удовлетворяет ОДЗ

удовлетворяет ОДЗ

<u>Ответ:</u> 4; 5.

Ответы:

$$2)\, 2x^2 + 8x + 16 = 1936 - 176x + 4x^2;$$
$$-2x^2 + 184x - 1920 = 0;$$
$$x^2 - 92x + 960 = 0;$$

Найдём корни уравнения по обратной теореме Виета:

$$\begin{array}{l|l} x_1 + x_2 = 92; & x_1 = 80; \\ x_1 \cdot x_2 = 960. & x_2 = 12. \end{array}$$

Проверка:

$$\sqrt{2 \cdot 80^2 + 8 \cdot 80 + 16} = 44 - 2 \cdot 80; \quad \sqrt{2 \cdot 12^2 + 8 \cdot 12 + 16} = 44 - 2 \cdot 12;$$
$$\sqrt{2 \cdot 80^2 + 8 \cdot 80 + 16} \neq -116. \quad \sqrt{400} = 20.$$

Выражение не имеет смысла. <u>Ответ:</u> 12.

Ответы:

$$3)\sqrt{3x+7}=3-\sqrt{x+2};$$

$$3x+7=3^2-2\cdot3\cdot\sqrt{x+2}+\left(\sqrt{x+2}\right)^2;$$

$$3x+7=9-6\sqrt{x+2}+x+2;$$

$$6\sqrt{x+2}=9+x+2-3x-7;$$

$$6\sqrt{x+2}=4-2\mathrm{x}\,\Big|\div 2;$$

$$3\sqrt{x+2}=2-x\,\Big|\uparrow^2;$$

$$9(x+2)=4-4x+x^2;$$

$$9x+18-4+4x-x^2=0;$$

$$-x^2+13x+14=0\,\Big|\cdot(-1);$$

$$x^2-13x-14=0;$$

оглавление
назад
далее

Ответы (продолжение):

Найдём корни уравнения по обратной теореме Виета:

$$\begin{array}{l|l} x_1 + x_2 = 13; & x_1 = 14; \\ x_1 \cdot x_2 = -14. & x_2 = -1. \end{array}$$

Проверка:

$$\sqrt{3 \cdot 14 + 7} + \sqrt{14 + 2} = 3;$$
$$\sqrt{49} + \sqrt{16} \neq 3.$$

$$\sqrt{3 \cdot (-1) + 7} + \sqrt{(-1) + 2} = 3;$$
$$\sqrt{4} + \sqrt{1} = 3.$$

Уравнение не имеет смысла.

Ответ: -1.

Метод подбора (метод пристального взгляда).

Уравнение 3 решено путем двукратного возведения в квадрат. Познакомимся с другим методом его решения

Сумма двух монотонно возрастающих функций

$$y = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x-5}$$

есть функция монотонно возрастающая на области определения, то функция принимает каждое своё значение один раз, значит других корней уравнение не имеет.

Алгоритм решения методом подбора:

1. Доказать, что других корней нет, или доказать, что их несколько.
2. Угадать (подобрать) один или несколько корней уравнения.

Примеры на метод подбора:

<u>Задание:</u> решите уравнения.

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5$$

решение (x=1);

$$\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}=2.$$

решение (уравнение не имеет корней)

Определение равносильных уравнений.

Два уравнения f(x)=g(x) и r(x)=s(x) называются **равносильными,** если они имеют одинаковые корни (или, в частности, если оба уравнения не имеют корней).

Обычно при решении уравнения стараются заменить данное уравнение более простым, но равносильным ему. Такую замену называют **равносильным преобразованием уравнения.**

Равносильные преобразования уравнений

- Перенос членов уравнения из одной части уравнения в другую с противоположным знаком.

$2x + 5 = 7x – 8;$ уравнения равносильны

$2x - 7x = - 8 – 5.$

оглавление

назад

далее

Равносильные преобразования уравнений (продолжение)

- **Умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число.**

$$0{,}5x^2 - 0{,}3x = 2;$$

$$5x^2 - 3x = 20.$$

Неравносильные преобразования уравнения

1. Освобождение от знаменателей, содержащих переменные

$$\frac{x^2}{x-2}=\frac{4}{x-2}$$

т.к. $x^2 = 4$ имеет два корня -2; и 2. Посторонний корень – 2.

2. Возведение обеих частей уравнения в квадрат.