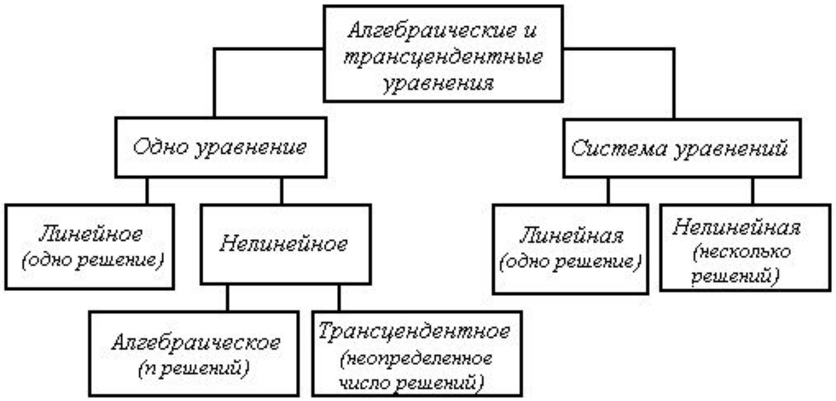
Решение нелинейных уравнений

Выбор подходящего метода для решения уравнений зависит от характера рассматриваемой задачи. Задачи, сводящиеся к решению алгебраических и трансцендентных уравнений, можно классифицировать по числу уравнений и в зависимости от предлагаемого характера и числа решений (Рисунок 1).

Рисунок 1. Классификация уравнений



Одно уравнение будем называть *линейным*, *алгебраическим* или *трансцендентным* в зависимости от того, имеет ли оно одно решение, *n* решений или неопределенное число решений. Систему уравнений будем называть *линейной* или *нелинейной* в зависимости от математической природы входящих в нее уравнений.

Нелинейные уравнения можно разделить на 2 класса - алгебраические и трансцендентные. *Алгебраическими уравнениями* называют уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). В частности, многочлен является целой алгебраической функцией. Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и другие) называются *трансцендентными.*

Методы решения нелинейных уравнений делятся на две группы:

точные методы;

итерационные методы.

Точные методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы). Из школьного курса алгебры известны такие методы для решения тригонометрических, логарифмических, показательных, а также простейших алгебраических уравнений.

Как известно, многие уравнения и системы уравнений не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. Доказано также, что нельзя построить формулу, по которой можно было бы решить произвольное алгебраическое уравнение степени выше четвертой. Кроме того, в некоторых случаях уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно, и, следовательно, сама задача о точном определении корней уравнения теряет смысл. Для их решения используются *итерационные методы* с заданной степенью точности.

Пусть дано уравнение $f(x) = 0,$

где:

1. Функция *f*(*x*) непрерывна на отрезке [*a*, *b*] вместе со своими производными 1-го и 2-го порядка.
2. Значения *f*(*x*) на концах отрезка имеют разные знаки ($f(a) \cdot f(b) < 0$).
3. Первая и вторая производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют определенный знак на всем отрезке.

Условия 1) и 2) гарантируют, что на интервале [*a*, *b*] находится хотя бы один корень, а из 3) следует, что *f*(*x*) на данном интервале монотонна и поэтому корень будет единственным.

Решить уравнение *итерационным методом* значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней и найти значения корней с нужной точностью.

Всякое значение ξ, обращающее функцию $f(x)$ в нуль, т.е. такое, что:

$$f(\xi) = 0,$$

называется *корнем уравнения* (1) или *нулем* функции $f(x)$.

Задача нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ итерационным методом состоит из двух этапов:

1. *отделение корней* - отыскание приближенного значения корня или содержащего его отрезка;
2. *уточнение приближенных корней* - доведение их до заданной степени точности.

Процесс отделения корней начинается с установления знаков функции $f(x)$ в граничных $x = a$ и $x = b$ точках области ее существования.

Пример.

Отделить корни уравнения: $f(x) \equiv x^3 - 6x + 2 = 0$.
Составим приблизительную схему:

x	-∞	-3	-1	0	1	3	+∞
f(x)	-	-	+	+	-	+	+

Следовательно, уравнение имеет три действительных корня, лежащих в интервалах [-3, -1], [0, 1] и [1, 3].

Приближенные значения корней (*начальные приближения*) могут быть также известны из физического смысла задачи, из решения аналогичной задачи при других исходных данных, или могут быть найдены графическим способом.

В инженерной практике распространен *графический способ* определения приближенных корней.

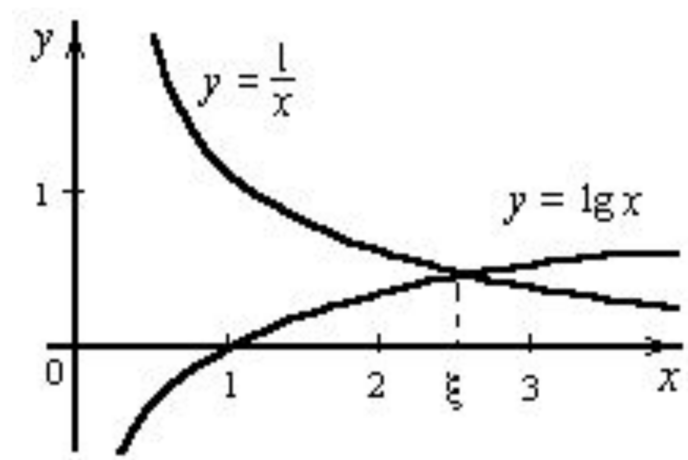
Принимая во внимание, что действительные корни уравнения - это точки пересечения графика функции *f*(*x*) с осью абсцисс, достаточно построить график функции *f*(*x*) и отметить точки пересечения *f*(*x*) с осью *Ox*, или отметить на оси *Ox* отрезки, содержащие по одному корню. Построение графиков часто удается сильно упростить, заменив уравнение *равносильным* ему уравнением: $f_1(x) = f_2(x)$,

где функции *f*1(*x*) и *f*2(*x*) - более простые, чем функция *f*(*x*). Тогда, построив графики функций *y* = *f*1(*x*) и *y* = *f*2(*x*), искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков.

Пример.

Графически отделить корни уравнения $x \lg x = 1$.

Уравнение удобно переписать в виде равенства : $\lg x = \frac{1}{x}$. Отсюда ясно, что корни уравнения могут быть найдены как абсциссы точек пересечения логарифмической кривой $y = \lg x$ и гиперболы $y = \frac{1}{x}$. Построив эти кривые, приближенно найдем единственный корень уравнения или определим его содержащий отрезок [2, 3].



Метод половинного деления

Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения $x0$. Каждый такой шаг называется *итерацией.* В результате итераций находится последовательность приближенных значений корня $x1, x2, ..., xn$. Если эти значения с увеличением числа итераций n приближаются к истинному значению корня, то говорят, что итерационный процесс *сходится*.

Для нахождения корня уравнения, принадлежащего отрезку $[a, b]$, делим этот отрезок пополам. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то $\xi = \frac{a+b}{2}$ является корнем уравнения. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ (что, практически, наиболее вероятно), то выбираем ту из половин $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ или $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Новый суженный отрезок $[a1, b1]$ снова делим пополам и производим те же самые действия.

Метод половинного деления практически удобно применять для грубого нахождения корня данного уравнения, метод прост и надежен, всегда сходится.

Пример.

Методом половинного деления уточнить корень уравнения

$f(x) \equiv x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$

лежащий на отрезке [0, 1].

Последовательно имеем:

$f(0) = -1$; $f(1) = 1$; $f(0,5) = 0,06 + 0,25 - 0,5 - 1 = -1,19$;

$f(0,75) = 0,32 + 0,84 - 0,75 - 1 = -0,59$;

$f(0,875) = 0,59 + 1,34 - 0,88 - 1 = +0,05$;

$f(0,8125) = 0,436 + 1,072 - 0,812 - 1 = -0,304$;

$f(0,8438) = 0,507 + 1,202 - 0,844 - 1 = -0,135$;

$f(0,8594) = 0,546 + 1,270 - 0,859 - 1 = -0,043$ и т. д.

Можно принять

$\xi = (0,859 + 0,875)*0,5 = 0,867$

Метод хорд

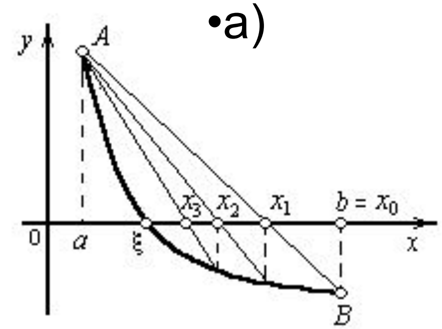
В данном методе процесс итераций состоит в том, что в качестве приближений к корню уравнения принимаются значения *x*1*, x*2*, ..., xn* точек пересечения хорды *AB* с осью абсцисс (Рисунок 3). Сначала запишем уравнение хорды *AB*:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Для точки пересечения хорды *AB* с осью абсцисс (*x* = *x*1, *y* = 0) получим уравнение:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

•а)



•б)

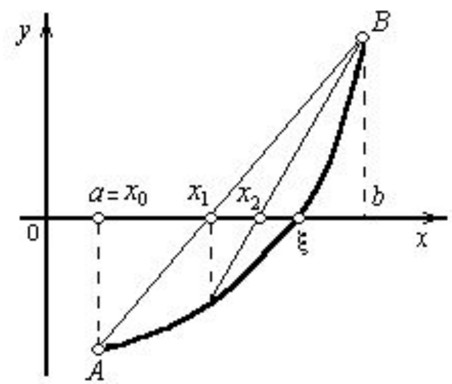


Рисунок 3. Метод хорд

Пусть для определенности $f''(x) > 0$ при $a \le x \le b$ (случай $f''(x) < 0$ сводится к нашему, если записать уравнение в виде $-f(x) = 0$). Тогда кривая $y = f(x)$ будет выпукла вниз и, следовательно, расположена ниже своей хорды AB. Возможны два случая: 1) $f(a) > 0$ (Рисунок 3, *а*) и 2) $f(b) < 0$ (Рисунок 3, *б*).

В первом случае конец *a* неподвижен и последовательные приближения: $x0 = b$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(a)}(x_i - a), \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность, причем

$$a < \xi < \ldots < x_{i+1} < x_i < \ldots < x_1 < x_0.$$

Во втором случае неподвижен конец b, а последовательные приближения: x0 = a;

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(b) - f(x_i)}(b - x_i)$$

образуют ограниченную монотонно возрастающую последовательность, причем

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < \xi < b.$$

Обобщая эти результаты, заключаем:

1. неподвижен тот конец, для которого знак функции *f* (*x*) совпадает со знаком ее второй производной *f* ″ (*x*);
2. последовательные приближения *xn* лежат по ту сторону корня ξ, где функция *f* (*x*) имеет знак, противоположный знаку ее второй производной *f* ″ (*x*).

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет обнаружено, что $|x_i - x_{i-1}| \le ε$,

где ε - заданная предельная абсолютная погрешность.

Пример.

Найти положительный корень уравнения

$f(x) \equiv x^3 - 0{,}2\,x^2 - 0{,}2\,x - 1{,}2 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Прежде всего, отделяем корень. Так как $f(1) = -0{,}6 < 0$ и $f(2) = 5{,}6 > 0$,

то искомый корень ξ лежит в интервале [1, 2]. Полученный интервал велик, поэтому разделим его пополам. Так как

$f(1{,}5) = 1{,}425 > 0$, то $1 < \xi < 1{,}5$.

Так как $f''(x) = 6x - 0{,}4 > 0$ при $1 < x < 1{,}5$ и $f(1{,}5) > 0$, то воспользуемся формулой для решения поставленной задачи:

$x_1 = 1 + \dfrac{0{,}6}{1{,}425 + 0{,}6}(1{,}5 - 1) = 1{,}15$; $|x1 - x0| = 0{,}15 > \varepsilon$,

следовательно, продолжаем вычисления; $f(x1) = -0{,}173$;

$x_2 = 1{,}15 + \dfrac{0{,}173}{1{,}425 + 0{,}173}(1{,}5 - 1{,}15) = 1{,}190$;

$|x2 - x1| = 0{,}04 > \varepsilon$, $f(x2) = -0{,}036$;

$x_3 = 1{,}190 + \dfrac{0{,}036}{1{,}425 + 0{,}036}(1{,}5 - 1{,}190) = 1{,}198$;

$|x3 - x2| = 0{,}008 < \varepsilon$.

Таким образом, можно принять $\xi = 1{,}198$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Заметим, что точный корень уравнения $\xi = 1{,}2$.

Метод Ньютона.

Отличие этого итерационного метода от предыдущего состоит в том, что вместо хорды на каждом шаге проводится касательная к кривой $y = f(x)$ при $x = xi$ и ищется точка пересечения касательной с осью абсцисс (Рисунок 4). При этом не обязательно задавать отрезок [*a, b*], содержащий корень уравнения , достаточно найти лишь некоторое начальное приближение корня $x = x0$.

Применяя метод Ньютона, следует руководствоваться следующим правилом: *в качестве исходной точки x0 выбирается тот конец интервала [a, b], которому отвечает ордината того же знака, что и знак f ″ (x).*

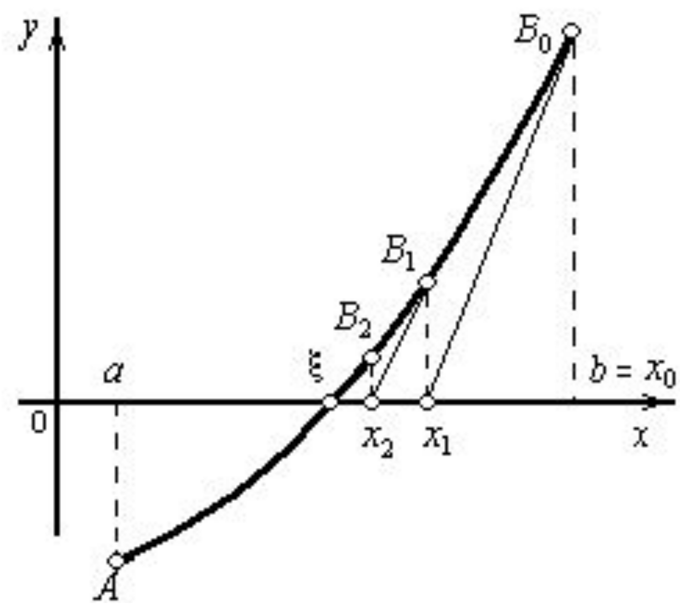


Рисунок 4. Метод Ньютона

Уравнение касательной, проведенной к кривой *y* = *f*(*x*) через точку *B*0 с координатами *x*0 и *f*(*x*0), имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Отсюда найдем следующее приближение корня *x*1 как абсциссу точки пересечения касательной с осью *Ox* (*y* = 0)*:*

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Аналогично могут быть найдены и следующие приближения как точки пресечения с осью абсцисс касательных, проведенных в точках B1, B2 и так далее. Формула для i +1 приближения имеет вид:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Для окончания итерационного процесса может быть использовано или условие |f(xi)| < ε, или условие близости 2^x *последовательных приближений|* $x_i - x_{i-1}$*|< ε.*

Итерационный процесс сходится если f(x0) $\cdot$ *f ″ (x0) > 0.*

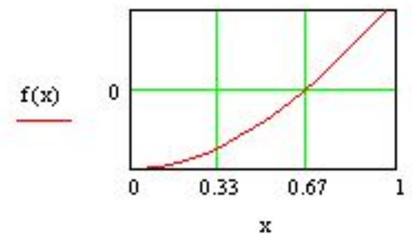
Mathcad Professional - [Метод Ньютона.mcd]

Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

1. Отделение корней

$f(x) := 2 \cdot x \cdot \sin(x) - \cos(x) \qquad x := 0, 0.1 .. 1$

$x_0 := 0.67$ - начальное приближение, определенное по графику f(x)=0



2. Уточнение корней (методом Ньютона)

$n := 100$
$i := 1 .. n$ - предположительное число итераций

$\varepsilon := 10^{-4}$ - задание точности вычислений

$df(x) := \frac{d}{dx} f(x)$ - определение функции, вычисляющей производную от f(x)

$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{df(x_0)}$ - вычисление первого приближения по формуле Ньютона

$x_{i+1} := \mathrm{until}\left(\left| x_i - x_{i-1} \right| - \varepsilon, x_i - \frac{f(x_i)}{df(x_i)} \right)$ - реализация итерационного процесса по методу Ньютона с использованием функции **until**

$j := \mathrm{last}(x)$ - определение числа итераций за которые итерационный процесс сошелся

$j = 4$

$x = \begin{pmatrix} 0.67 \\ 0.65342 \\ 0.65327 \\ 0.65327 \\ 0 \end{pmatrix}$ - итерационная последовательность

$x_{j-1} = 0.65327$ - **корень уравнения f(x)**

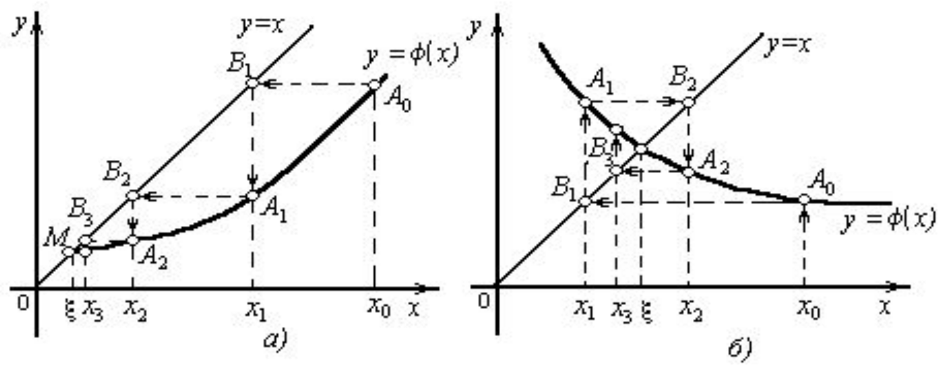
Метод простой итерации

Для использования метода итерации исходное нелинейное уравнение $f(x) = 0$ заменяется равносильным уравнением $x = \phi(x)$. Пусть известно начальное приближение корня $x = x0$. Подставляя это значение в правую часть

уравнения , получим новое приближение: $x1 = \phi(x0)$.

Далее, подставляя каждый раз новое значение корня в , получаем последовательность значений: $x_{i+1} = \varphi(x_i), \quad (i = 0, 1, \ldots)$.

Геометрически метод итерации может быть пояснен следующим образом. Построим на плоскости *xOy* графики функций $y = x$ и $y = \phi(x)$. Каждый действительный корень уравнения является абсциссой точки пересечения *M* кривой $y = \phi(x)$ с прямой $y = x$ (Рисунок 6, *а*).



Отправляясь от некоторой точки $A0$ [$x0$, ϕ ($x0$)], строим ломаную $A0B1A1B2A2$... (“лестница”), звенья которой попеременно параллельны оси Ox и оси Oy, вершины $A0$, $A1$, $A2$, ...лежат на кривой y=ϕ (x), а вершины $B1$, $B2$, $B3$, …, - на прямой $y = x$. Общие абсциссы точек $A1$ и $B1$, $A2$ и $B2$, ..., очевидно, представляют собой соответственно последовательные приближения $x1$, $x2$, ... корня ξ.

Возможен также другой вид ломаной $A0B1A1B2A2$ ... – «спираль» (Рисунок 6, *б*). Решение в виде «лестницы» получается, если производная ϕ′ (x) положительна, а решение в виде «спирали», если ϕ′ (x) отрицательна.

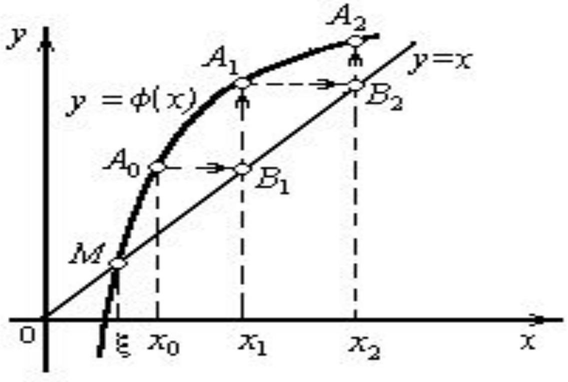
На Рисунке 6, *а, б* кривая y = ϕ(x) в окрестности корня ξ- пологая, то есть $|\varphi'(x)|$ <1, и процесс итерации сходится.

Однако, если рассмотреть случай, где $|\varphi'(x)|$ >1, то процесс итерации может быть расходящимся (Рисунок 7). Поэтому для практического применения метода итерации нужно выяснить достаточные условия сходимости итерационного процесса.

Теорема: *Пусть функция* ϕ(*x*) *определена и дифференцируема на отрезке* [*a*, *b*], *причем все ее значения* ϕ(*x*) ∈ [*a*, *b*].

Тогда, если существует правильная дробь q такая, что $|\varphi'(x)| \le q < 1$ *при a < x < b, то:* 1) *процесс итерации* $x_{i+1} = \varphi(x_i), \quad (i = 0, 1, \dots).$ *сходится независимо от начального значения x*0 ∈ [*a*, *b*];

2) *предельное значение* $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$ *является единственным корнем уравнения x* = ϕ(*x*) *на отрезке* [*a*, *b*].



Пример.

Уравнение
$f(x) \equiv x^3 - x - 1 = 0$ имеет корень $\xi \in [1, 2]$, так как $f(1) = -1 < 0$ и $f(2) = 5 > 0$.

Уравнение можно записать в виде $x = x^3 - 1$. Здесь $\phi(x) = x^3 - 1$ и $\phi'(x) = 3x^2$;

Поэтому $\phi'(x) \geq 3$ при $1 \leq x \leq 2$

и, следовательно, условия сходимости процесса итерации не выполнены.

Если записать уравнение в виде $x = \sqrt[3]{x+1}$,

то будем иметь: $\psi(x) = \sqrt[3]{x+1}$ и $\psi'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

Отсюда $0 < \psi'(x) < \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}} < \dfrac{1}{4}$ при $1 \leq x \leq 2$ и значит, процесс итерации для уравнения быстро сойдется.

1,3243

Найдем корень ξ уравнения (10) с точностью до 10^{-2}. Вычисляем последовательные приближения x*n* с одним запасным знаком по формуле

$$x_i = \sqrt[3]{x_i + 1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Найденные значения помещены в Таблицу 1:

Таблица 1

Значения последовательных приближений *xi*.

i	0	1	2	3	4
xi	1	1,260	1,312	1,322	1,3243

С точностью до 10^{-2} ***можно положить ξ = 1,324.***

Mathcad Professional - [Решение уравнений средствами Mathcad.mcd]

Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

Пример 1. Решение уравнения cos(x) = x + 0.2 с помощью функции root

1 способ

$x := 1$ - начальное приближение

$f(x) := \cos(x) - x - 0.2$

$\mathrm{root}(f(x), x) = 0.616$

2 способ

$x := 1$ - начальное приближение

$\mathrm{root}(\cos(x) - x - 0.2, x) = 0.616$

3 способ

$\mathrm{root}(\cos(x) - x - 0.2, x, 0, 1) = 0.616$

В способах 1 и 2, начальное приближение показывает функции root, где начать искать корень. В способе 3, 3 и 4 параметры определяют область, где искать корень.

В способе 1 первый аргумент - это функция f(x), определенная в документе. В способах 2 и 3 - это выражение.

Пример 2. Нахождение корней полинома $x^4 - 10 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 1$

$$v := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Используйте команду **Символы ⇒ ⇒ Коэффициенты полинома** для создания вектора v

$$\mathrm{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0.591 \\ 0.305 - 0.277i \\ 0.305 + 0.277i \\ 9.981 \end{pmatrix}$$