

# Решение тригонометрических уравнений

$$a \sin x + b \cos x = c$$

*Мишурова Любовь Александровна,  
учитель математики*

*Муниципальное общеобразовательное учреждение  
«Средняя общеобразовательная школа № 2»*



# Цели урока:

- Создания условий для осознанного усвоения решения тригонометрических уравнений вида  $a \sin x + b \cos x = c$ .
- Формирование навыков самоконтроля и взаимоконтроля, алгоритмической культуры учащихся.
- Развитие устной математической речи. Обеспечение условий для развития умения решать тригонометрические уравнения, совершенствовать мыслительные умения старшеклассников сравнивать, обобщать и анализировать, развития навыков обработки информации.
- Развитие коммуникативных умений делового общения сверстников. Воспитание аккуратности.



# Проверка домашнего задания

$$\sin 7x - \sin x = \cos 4x$$



# Решение.

$$\begin{aligned}\sin 7x - \sin x &= \cos 4x, \\ 2\sin 3x \cos 4x - \cos 4x &= 0, \\ \cos 4x (2\sin 3x - 1) &= 0, \\ \cos 4x = 0 \text{ или } 2\cos 3x - 1 &= 0 \\ \cos 4x &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x &= \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ X &= \pi/8 + \pi n/4, n \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= 1/2, \\ 3x &= \pm \arccos 1/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 3x &= \pm \pi/3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ X &= \pm \pi/9 + 2/3\pi n, n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } X = \pi/8 + \pi n/4, X = \pm \pi/9 + 2/3\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



Решить уравнение

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 4x$$



# Решение.

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 4x,$$

$$-(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 4x,$$

$$-\cos 2x = \cos^2 2x - \sin^2 2x,$$

$$-\cos 2x = \cos^2 2x - (1 - \cos^2 2x),$$

$$-\cos 2x - \cos^2 2x + 1 - \cos^2 2x = 0,$$

$$-2\cos^2 2x - \cos 2x + 1 = 0,$$

$$2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0.$$

Заменим  $\cos 2x$  на  $Y$ , где  $|Y| \leq 1$

$$\text{Тогда } 2y^2 + y - 1 = 0,$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9,$$

$$Y = 1/2, \quad y = -1.$$

Выполним обратную замену

$$\cos 2x = 1/2,$$

$$2x = \pm \arccos 1/2 = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$2x = \pm \pi/3 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$X = \pm \pi/6 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos 2x = -1,$$

$$2x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pi/2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $X = \pm \pi/6 + \pi n, \quad x = \pi/2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

# Решение уравнений учащимися

- №628 (1)
- №628 (3)
- №629 (2)



$$\cos x = a, \text{ где } |a| \leq 1$$





$$x = \pm \arccos a + 2\pi n,$$
$$n \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$



$$\sin X = a, \text{ где } |a| \leq 1$$



$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$$
$$n \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$



$$\operatorname{tg} x = a, \text{ где } a \in \mathbb{R}$$

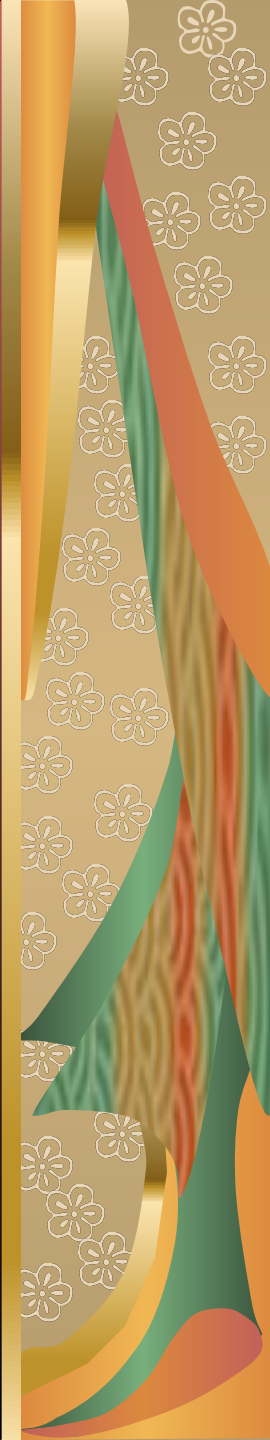


$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,$$
$$n \in \mathbb{Z}$$

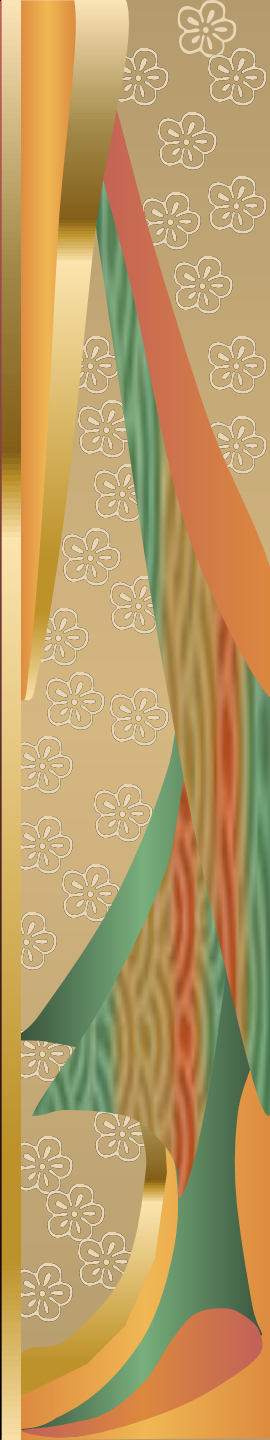
$$\operatorname{arctg} (-a) = -\operatorname{arctg} a$$



$$\cos x = 0$$



$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = 1$$





$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = -1$$



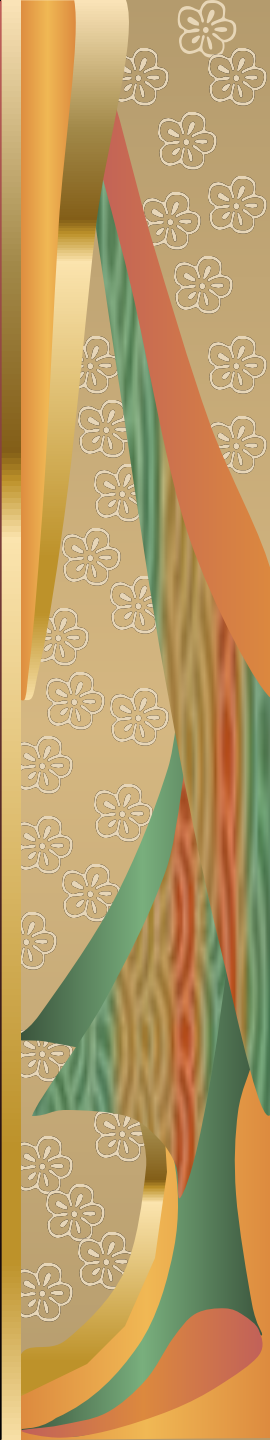
$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



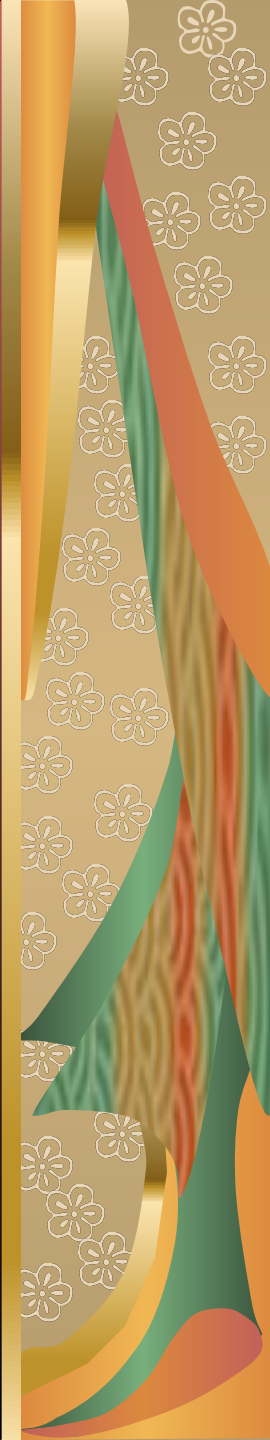
$$\sin x = 0$$



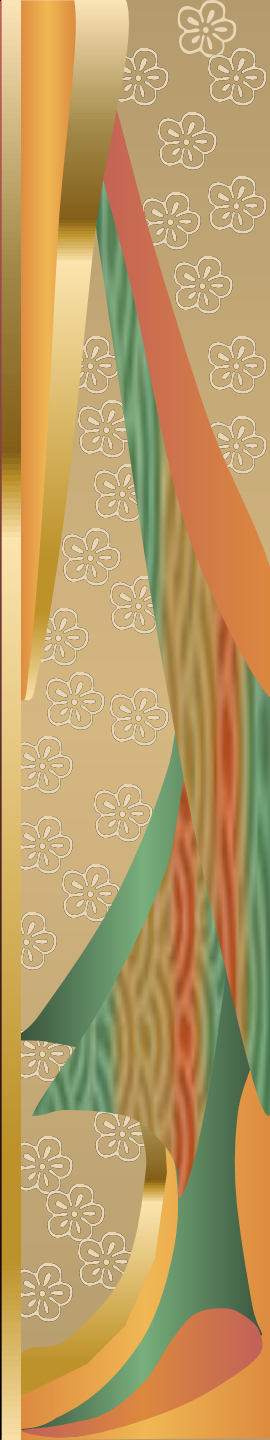
$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x = 1$$



$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

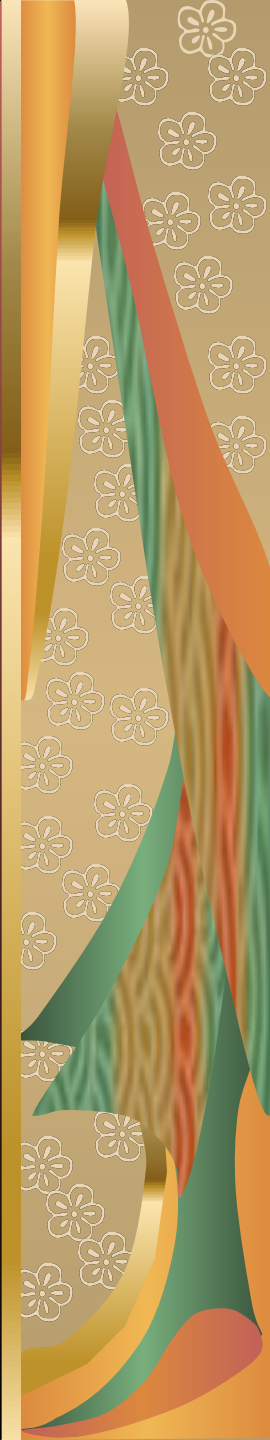


$$\sin x = -1$$





$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



# Решить уравнение

- $4\sin^2x - 4\sin x - 3 = 0$
- $2\cos^2x - \sin x - 1 = 0$



# ОТВЕТЫ.

- $4\sin^2x - 4\sin x - 3 = 0$
- $(-1)^{n+1} \pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
  
- $2\cos^2x - \sin x - 1 = 0$
- $\pm\pi/6 + \pi n; -\pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$



Уравнения:

$$\sin^2 x = \frac{1}{3};$$

$$\cos^2 x = -\frac{1}{4}.$$



# Уравнение

$$2 \sin x - 3 \cos x = 0$$



# Уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$ .

Уравнение  $2\sin x - 3\cos x = 0$ .

Поделив уравнение на  $\cos x$ , получим  $2\operatorname{tg}x - 3 = 0$ ,  $\operatorname{tg}x = \frac{3}{2}$ ,  $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

При решении этой задачи обе части уравнения  $2\sin x - 3\cos x = 0$  были поделены на  $\cos x$ .

Напомним, что при делении уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут быть потеряны корни. Поэтому нужно проверить, не являются ли корни уравнения  $\cos x = 0$  корнями данного уравнения. Если  $\cos x = 0$ , то из уравнения  $2\sin x - 3\cos x = 0$  следует, что  $\sin x = 0$ . Однако  $\sin x$  и  $\cos x$  не могут одновременно равняться нулю, так как они связаны равенством  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . Следовательно, при делении уравнения  $a\sin x + b\cos x = 0$  где  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ , на  $\cos x$  (или  $\sin x$ ) получаем уравнение, равносильное данному.

# Уравнение $2 \sin x + \cos x = 2$ .

Используя формулы  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ ,  $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$  и

записывая правую часть уравнения в виде  $2 = 2 \cdot 1 = 2(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2})$

получаем  $4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ ,

$3 \sin^2 \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0$ . Поделив это уравнение на  $\cos^2 \frac{x}{2}$

получим равносильное уравнение  $3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0$ .

Обозначая  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$ , получаем  $3y^2 - 4y + 1 = 0$ , откуда  $y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{3}$ .

1)  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}, \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

2)  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .



# $2 \sin x + \cos x = 2$

Данное уравнение является уравнением вида  $a \sin x + b \cos x = c$ ,

(1)

где  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ , которое можно решить другим способом. Разделим обе части этого уравнения на  $\sqrt{a^2 + b^2}$ :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(2)

Введем вспомогательный аргумент  $\varphi$ , такой, что

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Такое число существует, так как

$$\left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$$

Таким образом, уравнение можно записать в виде

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Последнее уравнение является простейшим тригонометрическим уравнением.



Решить уравнение

$$4 \sin x + 3 \cos x = 5.$$



# Решить уравнение $4 \sin x + 3 \cos x = 5$ .

Здесь  $a = 4$ ,  $b = 3$ ,  $c = 5$ ,  $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$

Поделим обе части уравнения на 5:

$$\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x = 1.$$

Введем вспомогательный аргумент  $\varphi$ , такой, что  $\cos \varphi = \frac{4}{5}$   $\sin \varphi = \frac{3}{5}$

Исходное уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi &= 1 \\ \sin(x + \varphi) &= 1 \end{aligned}$$

откуда  $x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , где  $\varphi = \arccos \frac{4}{5}$ ,  $x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .