Электронный справочник «Способы решения квадратных уравнений»

Открыть

Способы решений полных квадратных уравнений.

С помощью Дискриминанта

Разложение

«Переброска»

Выделение

Свойство коэффициентов

Теорема Виета

Графическое решение

Выйти

С помощью Дискриминанта.

- Дискриминант позволяет определить сколько же корней имеет данное квадратное уравнение.

$$D = b^2 - 4ac$$

- Формула корней квадратного уравнения имеет вид: $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

она позволяет найти корни любого квадратного уравнения (если они есть), в том числе приведенного и неполного.

- Таким образом, квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$,

– если D > 0, то имеет два различных корня;

– если D = 0, то имеет единственный корень;

– если D < 0, то не имеет корней.

Назад

Разложение на множители.

- **Пример 1**

  $x^2 - 4x + 4 = 0$, разложим левую часть уравнения на множители;

  $x^2 - 2x - 2x + 4 = 0$,

  $x(x - 2) - 2(x - 2) = 0$,

  $(x - 2)(x - 2) = 0$, произведение равно нулю, значит хотя бы один из его множителей равен нулю

  $x - 2 = 0$,

  $x = 2$.

  Ответ: 2.

- **Пример 2**

  $x^2 + 10x - 24 = 0$,

  $x^2 + 12x - 2x - 24 = 0$,

  $x(x + 12) - 2(x + 12) = 0$,

  $(x + 12)(x - 2) = 0$,

  $x + 12 = 0$ или $x - 2 = 0$

  $x = -12$ $x = 2$.

  Ответ: -12 и 2.

Назад

Метод выделения полного квадрата.

- **Пример 1**

  $x^2 - 4x + 4 = 0$, используем формулу сокращенного умножения;

  $(x - 2)^2 = 0$,

  $x - 2 = 0$,

  $x = 2$.

  Ответ: 2

- **Пример 2**

  $x^2 + 6x - 7 = 0$, выделим в левой части полный квадрат

  $x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 7 = 0$, первое слагаемое – квадрат числа x, а второе – удвоенное произведение x на 3, поэтому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 3^2.

  Преобразуем левую часть уравнения прибавляя к ней и вычитая 3^2.

  $(x + 3)^2 - 9 - 7 = 0$,

  $(x + 3)^2 - 16 = 0$,

  $(x + 3)^2 = 16$,

  $x + 3 = 4$ или $x + 3 = -4$

  $x = 1$ $x = -7$.

  Ответ: 1 и -7 .

Назад

Решение уравнений с использованием теоремы Виета

- Приведенное квадратное уравнение имеет вид $x^2 + px + q = 0$.

  Его корни удовлетворяют теореме Виета: $x_1 \cdot x_2 = q$

  $x_1 + x_2 = - p.$

  По коэффициентам можно предсказать знаки корней:

Свободный член «+»

Свободный член «-»

Назад

Свободный член положительный.

- Если свободный член приведенного уравнения положителен, то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависит от второго коэффициента.

  Если $q > 0$ и $p > 0$, то оба корня отрицательны.

  Если $q > 0$ и $p < 0$, то оба корня положительные.

- **Пример 1**

  $x^2 + 10x + 9 = 0$,

  $x_1 = -1$ и $x_2 = -9$,

  т.к. $q = 9 > 0$ и $p = 10 > 0$;
- **Пример 2**

  $x^2 - 6x + 9 = 0$,

  $x_1 = 3$ и $x_2 = 3$,

  т.к. $q = 9 > 0$ и $p = -6 < 0$.

Назад

Свободный член отрицательный.

- Если свободный член приведенного уравнения отрицателен, то уравнение имеет два различных по знаку корня.

  Если $q < 0$ и $p > 0$, то больший по модулю корень будет отрицателен.

  Если $q < 0$ и $p < 0$, то больший по модулю корень будет положителен.

- **Пример 1**

  $x^2 + 2x - 8 = 0$,

  $x_1 = -4$ и $x_2 = 2$,

  т.к. $q = -8 < 0$ и $p = 2 > 0$;

- **Пример 2**

  $x^2 - 2x - 15 = 0$,

  $x_1 = 5$ и $x_2 = -3$,

  т.к. $q = -15 < 0$ и $p = -2 < 0$.

Назад

Решение уравнения способом «переброски».

- Умножая обе части квадратного уравнения на *a*, получаем уравнение

  $a^2x^2 + abx + ac = 0$.

  Пусть $ax = y$, откуда $x = \frac{y}{a}$; тогда получим уравнение $y^2 + by + ac = 0$,

  равносильное данному. С помощью теоремы Виета найдем корни: y_1 и y_2,

  где $y_1 y_2 = ac$ и $y_1 + y_2 = -b$.

  Окончательно получаем $x_1 = \frac{y_1}{a}$ $x_2 = \frac{y_2}{a}$.

  При этом способе коэффициент *a* умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют способом «переброски».

  Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

- **Пример**

  $2x^2 – 11x + 15 = 0$, «перебросим» коэффициент 2 к свободному члену:

  $y^2 – 11y + 30 = 0$, согласно теореме Виета найдем корни:

  $y_1y_2 = 30$ и $y_1 + y_2 = 11$,

  $y_1 = 5$ и $y_2 = 6$, окончательно получим:

  $x_1 = 5/2$ и $x_2 = 6/2$,

  $x_1 = 2,5$ и $x_2 = 3$.

  Ответ: 2,5 и 3.

Назад

Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

- Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Первое свойство

Второе свойство

Третье свойство

Назад

Первое свойство коэффициентов.

- Если сумма коэффициентов равна нулю, т.е. $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.
- Доказательство: Разделим обе части уравнения на a, получим приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
- Согласно теореме Виета: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.
- По условию, $a + в + c = 0$, тогда $в = - a - c$. Значит,

  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1\frac{c}{a}$, $x_1 + x_2 = \frac{b}{a} = \frac{(-a-c)}{a} = 1 \cdot \frac{c}{a}$.
- Получаем $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$, что и требовалось доказать.
- **Пример**

  $3x^2 + 5x - 8 = 0$,

  т.к. $a + b + c = 0$

  $(3 + 5 - 8 = 0)$, то получим

  $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{8}{3}$-

  Ответ: 1 и $\frac{8}{3}$-

Назад

Второе свойство коэффициентов.

- Если $a - b + c = 0$, или $b = a + c$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.
  Доказательство аналогично.

- **Пример**
  $11x^2 + 27x + 16 = 0$,
  Т.к. $\boldsymbol{a - в + c = 0}$ $(11 - 27 + 16 = 0)$, значит
  $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{16}{11}$.
  Ответ: -1 и $\frac{16}{11}$

Назад

Третье свойство коэффициентов.

- Если второй коэффициент b = 2k четное число, то формулу корней можно записать в виде $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

- **Пример**

  $4x^2 - 36x + 77 = 0$,

  $a = 4$, $b = -36$, $c = 77$, $k = -18$;

  $D = k^2 - ac = (-18)^2 - 4 \cdot 77 = 324 - 308 = 16$, $D > 0$, два различных корня;

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} = \frac{18 \pm 4}{4}$$

  $x_1 = 5,5$; $x_2 = 3,5$.

  Ответ: 5,5 и 3,5.

Назад

Графическое решение квадратных уравнений.

- Преобразуем уравнение $x^2 + px + q = 0$ и получим вид: $x^2 = - px - q$.
- Построим графики зависимостей $y = x^2$ и $y = - px - q$.
- График первой зависимости - парабола, проходящая через начало координат.
- График второй зависимости – прямая . (приложение 1, рис.1).

Возможны следующие случаи:

- прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;
- прямая и парабола могут касаться и имеют одну общую точку, значит уравнение имеет одно решение;
- прямая и парабола не имеют общих точек, т. е. квадратное уравнение не имеет корней.

Примеры

Назад

Примеры.

- **Пример 1**

  $x^2 - 3x - 4 = 0$, запишем уравнение в виде $x^2 = 3x + 4$, рассмотрим графики зависимостей $y = x^2$ и $y = 3x + 4$,

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

  Прямую $y = 3x + 4$ построим по двум точкам M (0; 4) и N(3; 13) (приложение 1, рис.2).
  Прямая и парабола пересекаются в двух точках A и B с абсциссами $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$.
  Ответ: - 1 и 4 .

- **Пример 2.**

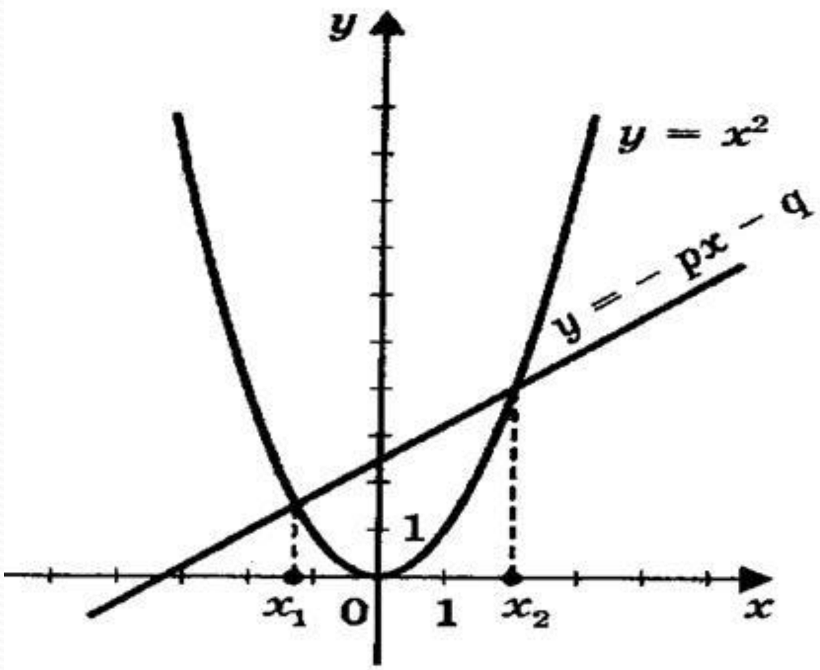
  $x^2 - 2x + 1 = 0$,
  Построим параболу $y = x^2$ по координатам (см. таблицу выше) и прямую
  $y = 2x - 1$ по двум точкам M(0; -1) и N(1\2; 0) (приложение 1, рис.3).
  Прямая и парабола пересекаются в точке A с абсциссой $x = 1$.
  Ответ: 1.

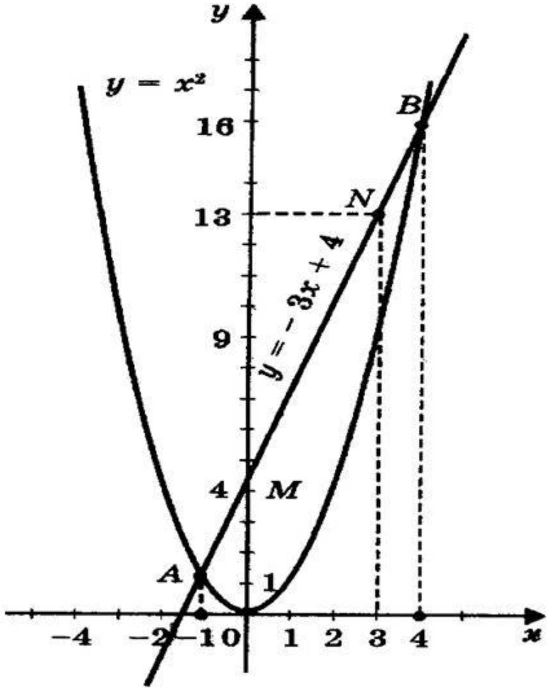
- **Пример 3.**

  $x^2 - 2x + 5 = 0$,
  Построим параболу $y = x^2$ по координатам (см. таблицу выше) и прямую
  $y = 2x - 5$ по двум точкам M(0; -5) и N(2,5; 0) (приложение 1, рис.4).
  Прямая и парабола не имеют точек пересечения, значит данное уравнение не имеет корней.
  Ответ: нет корней.

Назад

Приложение.

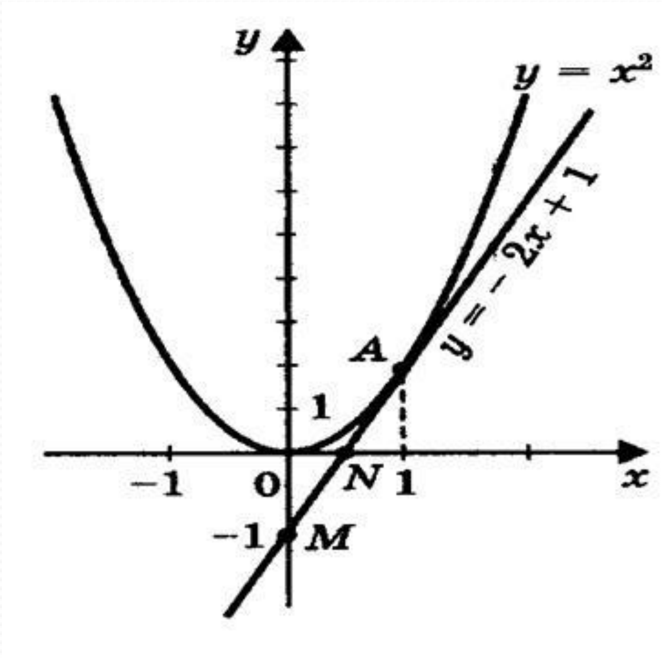


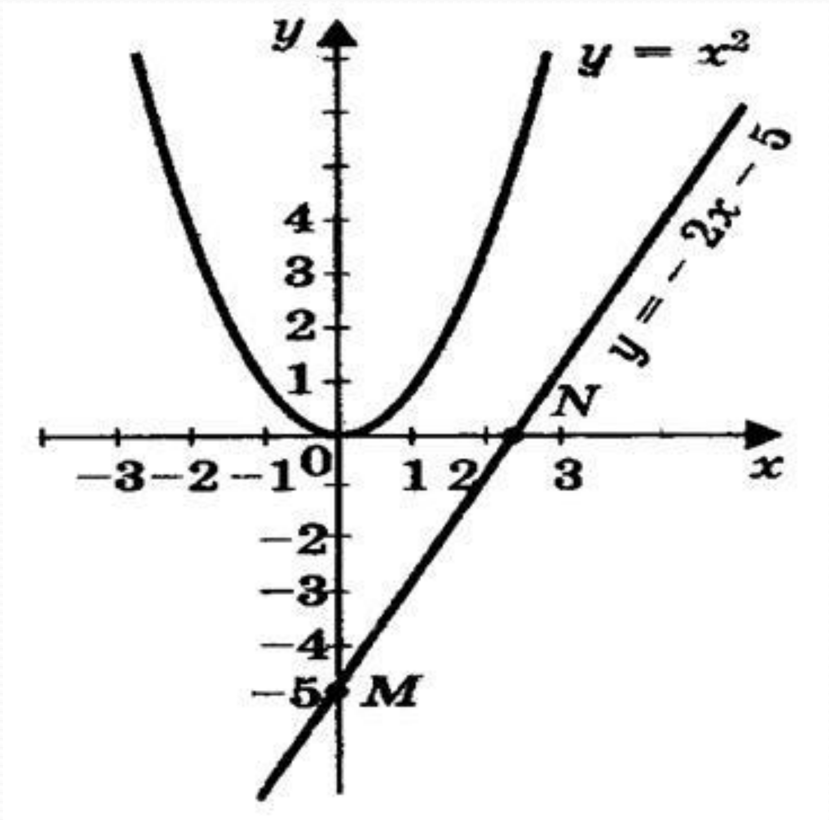


- Рисунок 1
- Рисунок 2

Назад

Приложение.





- Рисунок 3
- Рисунок 4

Назад

Спасибо за внимание!