СХЕМА ГОРНЕРА

Занятие элективного курса
по алгебре в 10 классе.
Учитель математики Ковальчук Л.Л.
МОУ СОШ №36

2010

Схема Горнера

- Схема Горнера - это алгоритм вычисления значения многочлена при определенном значении переменной. Использование схемы Горнера значительно упрощает вычисления, а также помогает эффективно подбирать корни.

- Горнер Вильямс Джордж (1786-22.9.1837)-английский математик. Родился в Бристоле. Учился и работал там же, затем в школах Бата. Основные труды по алгебре. В 1819г. опубликовал способ приближенного вычисления вещественных корней многочлена, который называется теперь способом Руффини-Горнера (этот способ был известен китайцам еще в XIII в.) Именем Горнера названа схема деления многочлена на двучлен x-a.

СХЕМА ГОРНЕРА

—способ деления многочлена n-й степени $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$

на линейный двучлен x — a,

основанный на том, что коэффициенты неполного частного $b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}$

и остаток r связаны с коэффициентами делимого многочлена и с a формулами:

$$b_0=a_0,\ b_k=ab_{k-1}+a_k,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 \text{ и } r=ab_{n-1}+a_n.$$

Вычисления по схеме Горнера располагают в таблицу:

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
a	b_0	$b_1=ab_0+a_1$	$b_2=ab_1+a_2$	$\dots$	$b_{n-1}=ab_{n-2}+a_{n-1}$	$r=ab_{n-1}+a_n,$

Пример 1. Разделить

$f(x)=x^4+2x^3-4x+3$ на $x+3$.

	1	2	0	—4	3
—3	1	—1	3	—13	42

Неполное частное равно $x^3—x^2+3x — 13$
и остаток равен 42=f(—3).

- Основным преимуществом этого метода является компактность записи и возможность быстрого деления многочлена на двучлен. По сути, схема Горнера является другой формой записи метода группировки, хотя, в отличие от последнего, является совершенно ненаглядной. Ответ (разложение на множители) тут получается сам собой, и мы не видим самого процесса его получения. Мы не будем заниматься строгим обоснованием схемы Горнера, а лишь покажем, как она работает.

Пример2.

Докажем, что многочлен $P(x)=x^4-6x^3+7x-392$

делится на $x-7$, и найдем частное от деления.

- Решение.

Используя схему Горнера, найдем P(7):

	1	-6	0	7	-392
7	1	1	7	56	0

- Отсюда получаем P(7)=0, т.е. остаток при делении многочлена на x-7 равен нулю и, значит, многочлен P(x) кратен (x-7).При этом числа во второй строке таблицы являются коэффициентами частного от деления P(x) на

  (x-7), поэтому

- $P(x)=(x-7)(x^3+x^2+7x+56)$.

Разложить на множители многочлен $x^3 - 5x^2 - 2x + 16$.

Данный многочлен имеет целые коэффициенты. Если целое число является корнем этого многочлена, то оно является делителем числа 16. Таким образом, если у данного многочлена есть целые корни, то это могут быть только числа ±1; ±2; ±4; ±8; ±16. Непосредственной проверкой убеждаемся, что число 2 является корнем этого многочлена, то есть $x^3 - 5x^2 - 2x + 16 = (x - 2)Q(x)$, где $Q(x)$ − многочлен второй степени

	1	−5	−2	16
2	1	−3	−8	0

- Полученные числа 1, –3, –8 являются коэффициентами многочлена, который получается при делении исходного многочлена на $x – 2$. Значит, результат деления:
$1 \cdot x^2 + (–3)x + (–8) = x^2 – 3x – 8$. Степень многочлена, полученного в результате деления, всегда на 1 меньше, чем степень исходного. Итак:
$x^3 – 5x^2 – 2x + 16 = (x – 2)(x^2 – 3x – 8)$.

- Например, деление по схеме Горнера многочлена $2x^3$-$4x^2$+5 на многочлен x + 3 запишется так:

	2	−4	0	5
−3	2	−10	30	−85

- В процессе деления сначала заполняется верхняя строка и крайняя левая клетка нижней строки; затем по приведенным выше формулам определяются коэффициенты частного – по очереди, начиная со старшего, – и помещаются в клетки нижней строки. Последним определяется остаток, который оказывается в крайней правой клетке. В нашем примере частное равно $2x^2$ -10x+30, а остаток равен -85.)

Пример 2. Разделить, пользуясь схемой Горнера, многочлен x^4+6x^2-5x-3 на двучлен $x+1$.

Здесь $\alpha=-1$. В остальном решение выполняется так же:

	1	0	6	-5	-3
-1	1	-1	7	-12	9

Частное равно $x^3-x^2+7x-12$, остаток равен 9.

Спасибо за внимание!
Успехов!