

Симметрия функций и преобразование их графиков

ЦЕЛИ:

- Повторить определение функции; основные понятия, связанные с ней; способы задания функции. Ввести понятие чётной и нечётной функции. Освоить основные способы преобразования графиков.
- Воспитание интереса к математике.
- Развитие зрительного восприятия предмета.

ПЛАН

1. Повторение

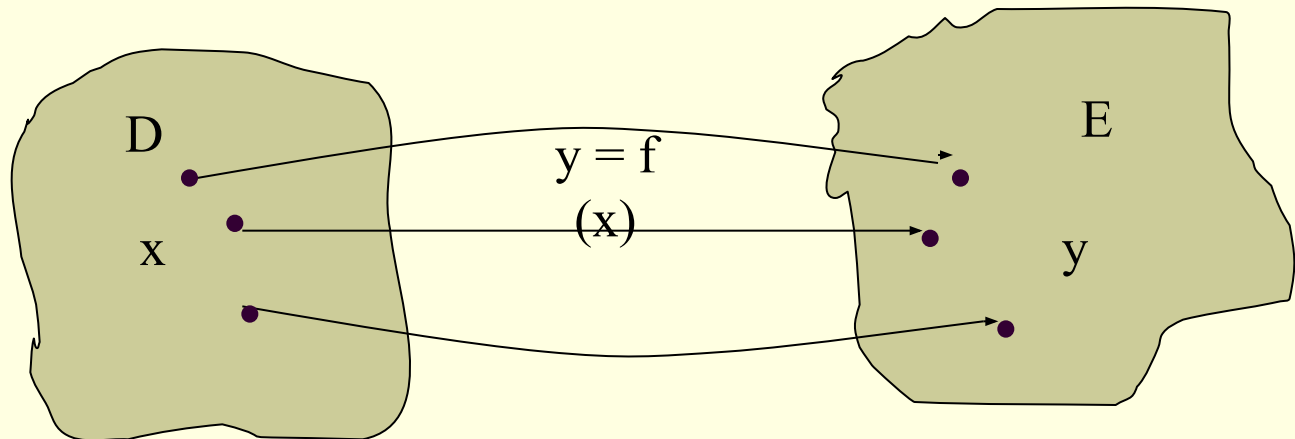
- Определение функции.
- Способы задания функции

2. Преобразование графиков функции

- Симметрия относительно оси y , $f(x) \rightarrow f(-x)$
- Симметрия относительно оси x , $f(x) \rightarrow -f(x)$
- Параллельный перенос вдоль оси x , $f(x) \rightarrow f(x-a)$
- Параллельный перенос вдоль оси y , $f(x) \rightarrow f(x)+b$
- Сжатие и растяжение вдоль оси x , $f(x) \rightarrow f(\alpha x)$, $\alpha > 0$
- Сжатие и растяжение вдоль оси y , $f(x) \rightarrow kf(x)$, $k > 0$
- Построение графика функции $y = |f(x)|$
- Построение графика функции $y = f(|x|)$
- Построение графика обратной функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ

- Числовой функцией называется соответствие, которое каждому числу x из некоторого заданного множества сопоставляет единственное число y .
- Обозначение: $y = f(x)$, где x – независимая переменная (аргумент функции), y – зависимая переменная (функция).
- Множество значений x называется областью определения функции. (D)
- Множество значений y называется областью значения функции. (E)



Пример №1

$$y = \sqrt{x - 2} + 3$$

При $x = 6$, $y(6) = \sqrt{6 - 2} + 3 = 5$

Найдём область определения. $x - 2 \geq 0$, $x \geq 2 \Rightarrow$

$D(y) = [2; +\infty)$; Так как по определению арифметического корня $0 \leq \sqrt{x - 2} \leq +\infty$,

$0 + 3 \leq \sqrt{x - 2} + 3 \leq +\infty + 3$, или $3 \leq y \leq +\infty$,

$$E(x) = [3; +\infty)$$

Пример №2.

Найти область определения и область значения функции $f(x) = 3 + \frac{1}{x-2}$.

Функция определена при $x - 2 \neq 0$, то есть $x \neq 2 \Rightarrow$

$$\underline{D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty);}$$

Так как при всех допустимых значениях x дробь $1/(x-2)$ не обращается в нуль, то функция $f(x)$ принимает все значения, кроме 3. Поэтому

$$\underline{E(f) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty);}$$

Пример №3.

Найти область определения дробно-рациональной функции $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{3x+4}{(x-1)(x+3)}$.

Знаменатели дробей обращаются в нуль при $x = 2$, $x = 1$, $x = -3$. Поэтому область определения

$$D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty);$$

Пример №4.

$$\text{Зависимость } y(x) = \begin{cases} 2x - 3 \\ x^2 + 1 \end{cases}$$

Уже не является функцией. При $x = 1$, пользуясь верхней формулой, найдём $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, а пользуясь нижней формулой, получим $y = 1^2 + 1 = 2$. Таким образом, одному значению $x = 1$ соответствуют два значения y ($y = -1$ и $y = 2$).

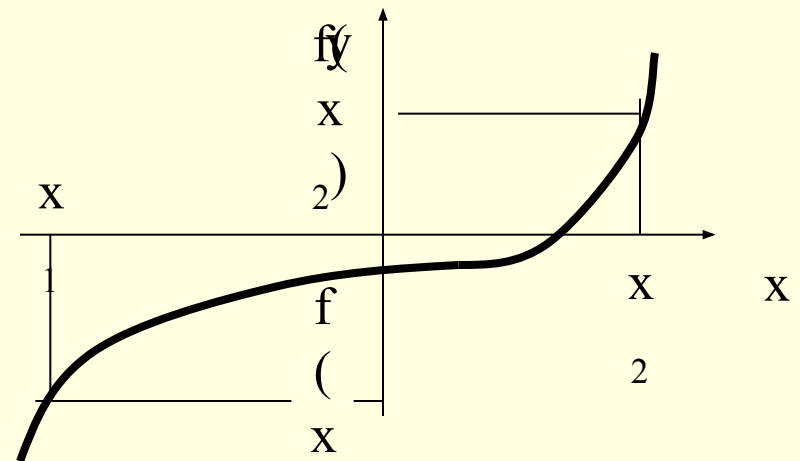
Поэтому эта зависимость (по определению) не является функцией

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

- Аналитический способ: функция задаётся с помощью формулы. Примеры: $y = x^2$, $y = ax + b$
- Табличный способ: функция задаётся с помощью таблицы.
- Описательный способ: функция задаётся словесным описанием.
- Графический способ: функция задаётся с помощью графика.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

- Графиком функции называется множество точек плоскости с координатами $(x; f(x))$



Пример №5.

Дана функция $y = 2x - 3|x| + 4$. Принадлежит ли графику этой функции точка с координатами

а) $(-2; -6)$; б) $(-3; -10)$

Решение.

а) при $x = -2$, $y = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot |-2| + 4 = -4 - 3 \cdot 2 + 4 = -6$

Так как $y(-2) = -6$, то точка $A(-2; -6)$ принадлежит графику функции.

б) при $x = -3$, $y = 2 \cdot (-3) - 3 \cdot |-3| + 4 = -6 - 3 \cdot 3 + 4 = -11$

Так как $y(-3) = -11$, то точка $B(-3; -10)$ не принадлежит графику функции

Пример №6.

Дана функция $f(x) = -x^2 + 6x - 8$. Найдём точки пересечения графика функции с осями координат.

Решение.

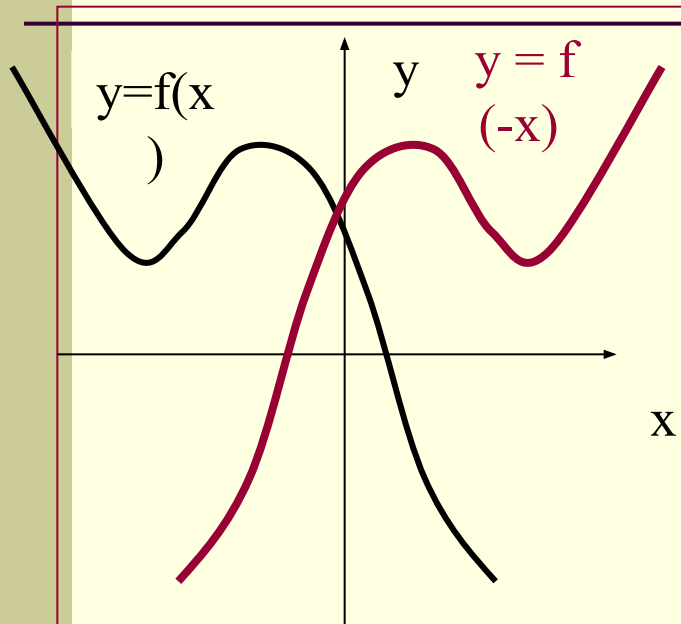
1) Точка пересечения с осью ординат, при $x=0$,
 $y(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 - 8 = -8$. Получаем координаты этой точки
 $A(0; -8)$

2) Точка пересечения с осью абсцисс, при $y=0$,
 $0 = -x^2 + 6x - 8$, $x^2 - 6x + 8 = 0$, $D = 36 - 32 = 4$,
 $x_1 = (6-2)/2 = 2$,

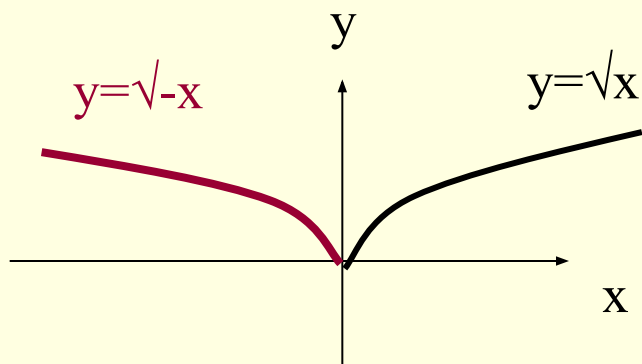
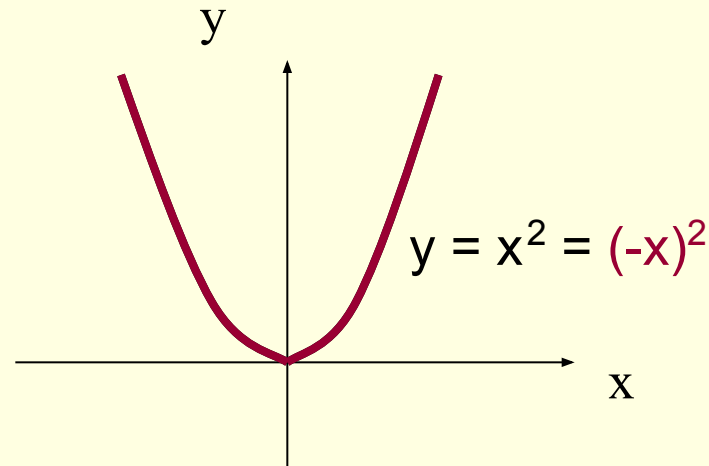
$x_2 = (6+2)/2 = 4$. Поэтому график функции пересекает ось абсцисс в двух точках: $B(2; 0)$ и $C(4; 0)$

Симметрия относительно оси y

$$f(x) \rightarrow f(-x)$$



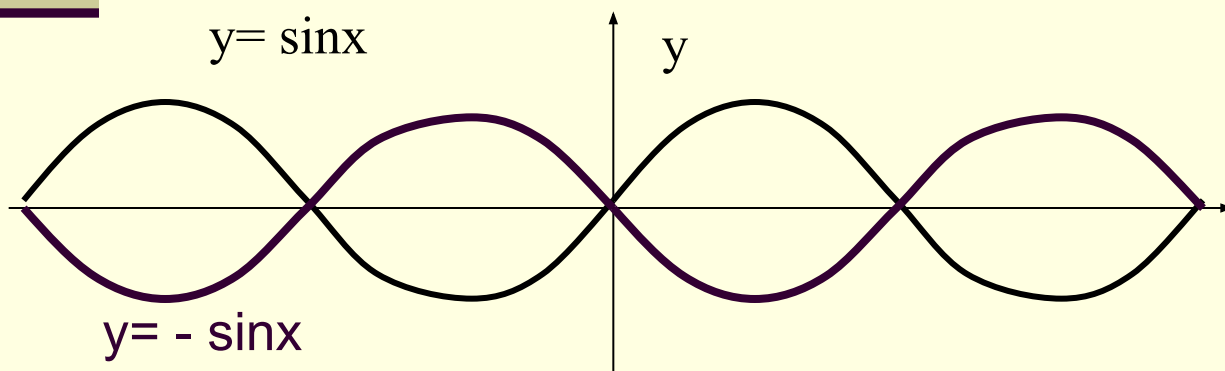
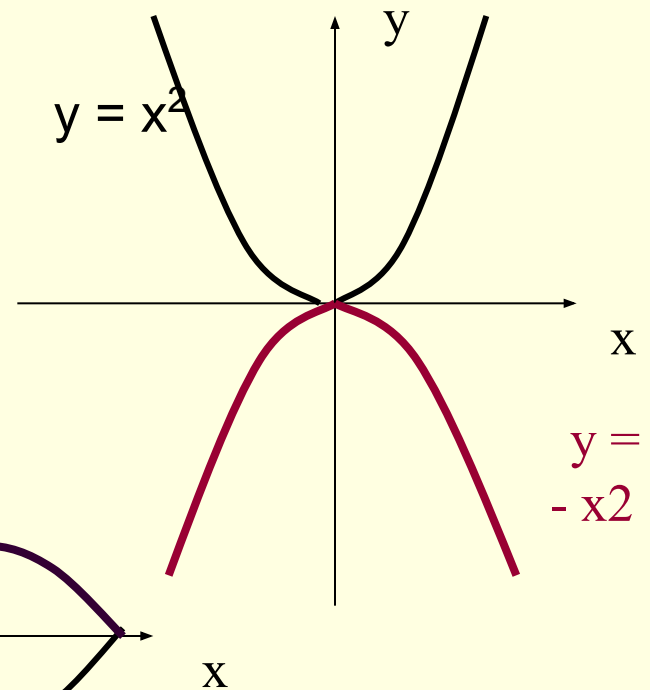
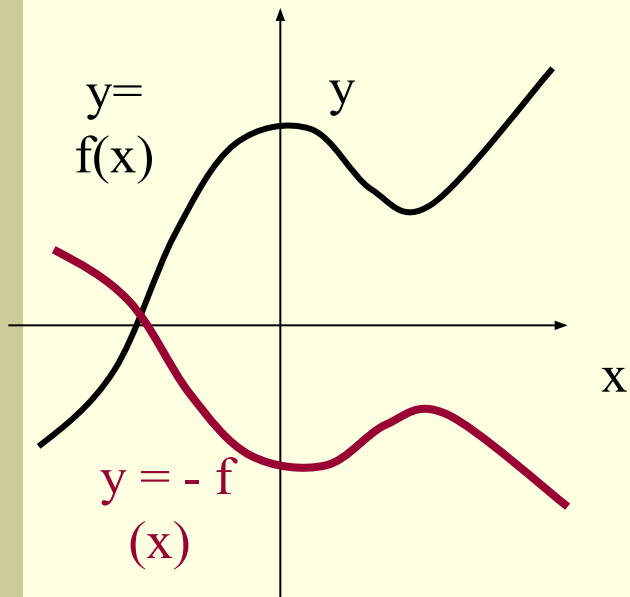
Графиком ф-и $y = f(-x)$ получается преобразованием симметрии графика ф-и $y = f(x)$ относительно оси y .



Симметрия относительно оси x

$$f(x) \rightarrow -f(x)$$

График функции $y = -f(x)$ получается преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно оси x.

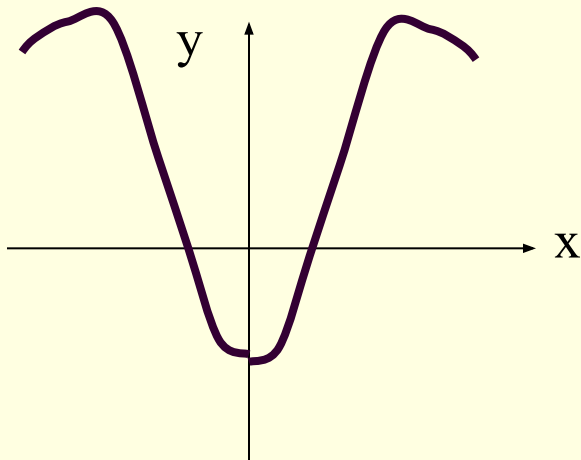


Чётность и нечётность

Функция наз-ся **чётной**, если:

- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения $f(-x) = f(x)$

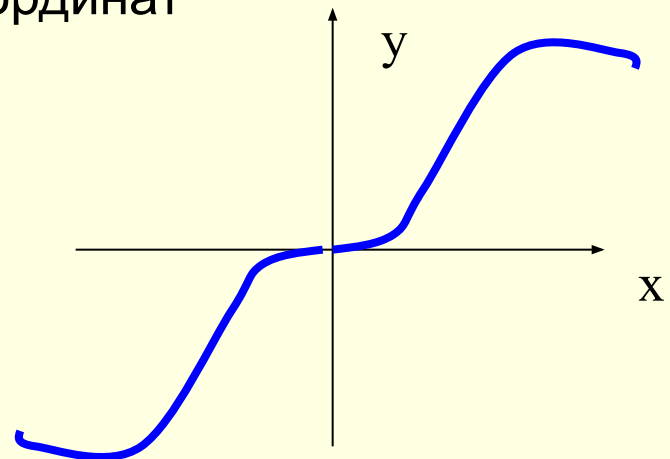
График чётной функции симметричен относительно оси y



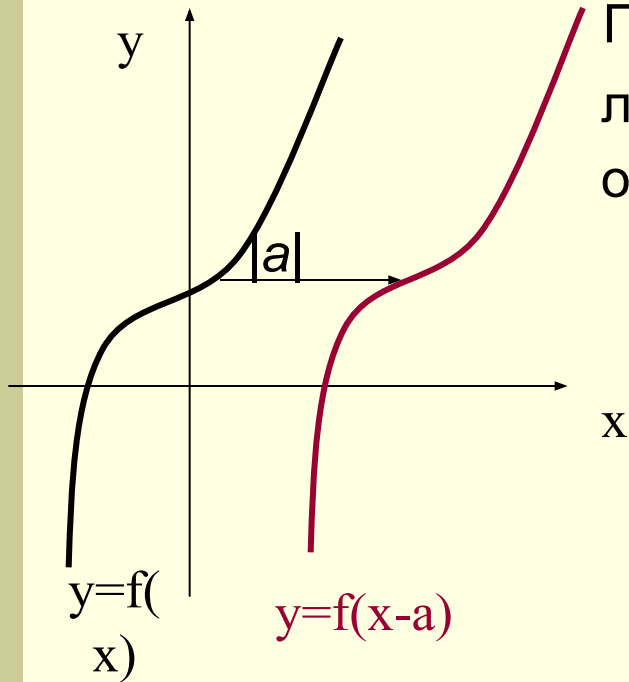
Функция наз-ся **нечётной**, если:

- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения $f(-x) = -f(x)$

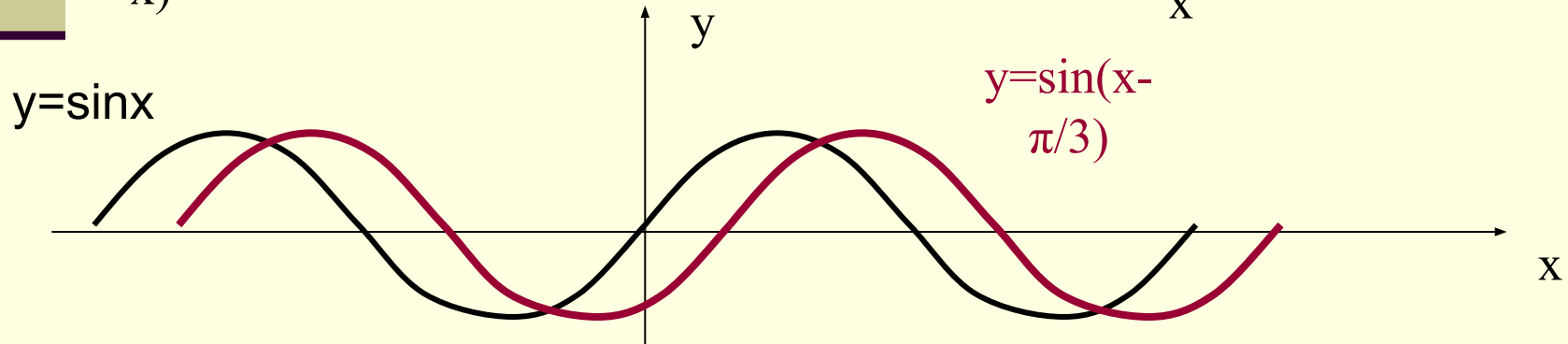
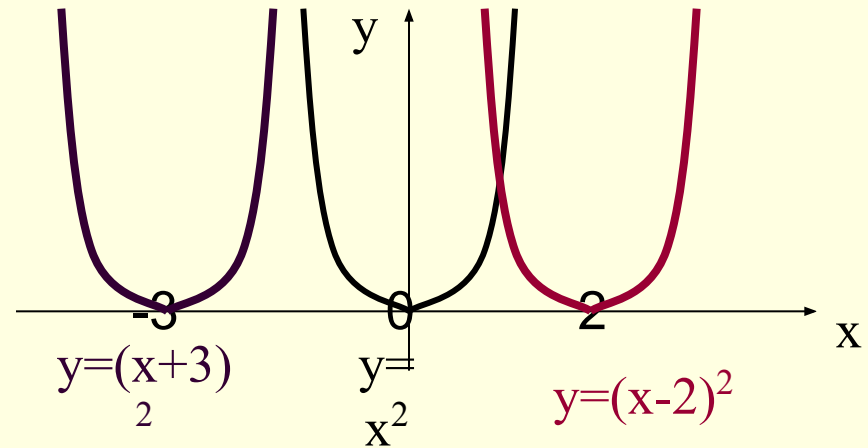
График нечётной функции симметричен относительно начала координат



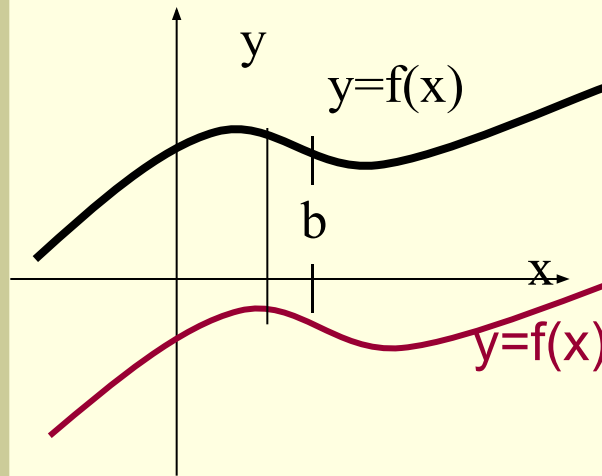
Параллельный перенос вдоль оси x , $f(x) \rightarrow f(x-a)$



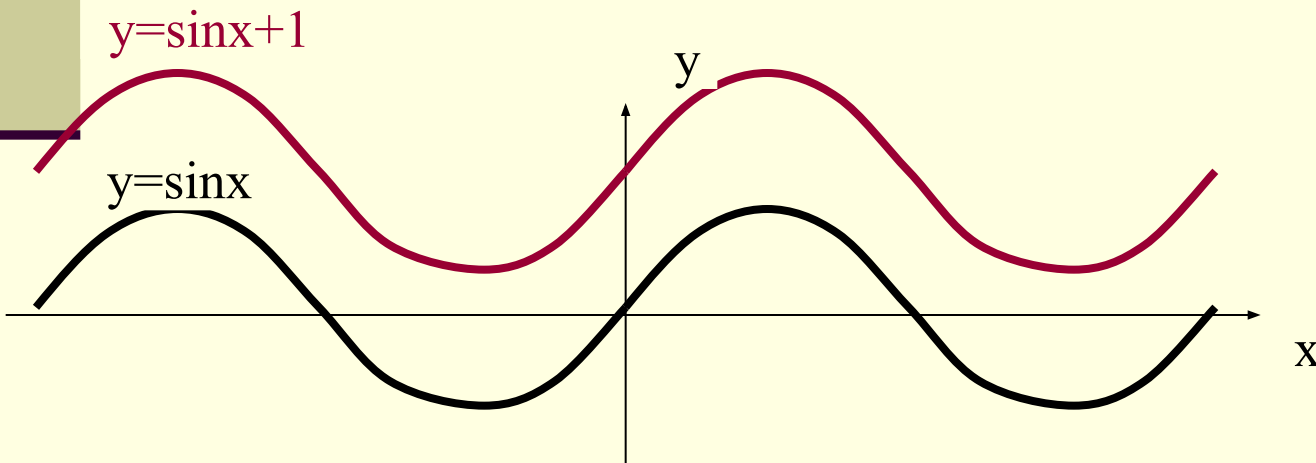
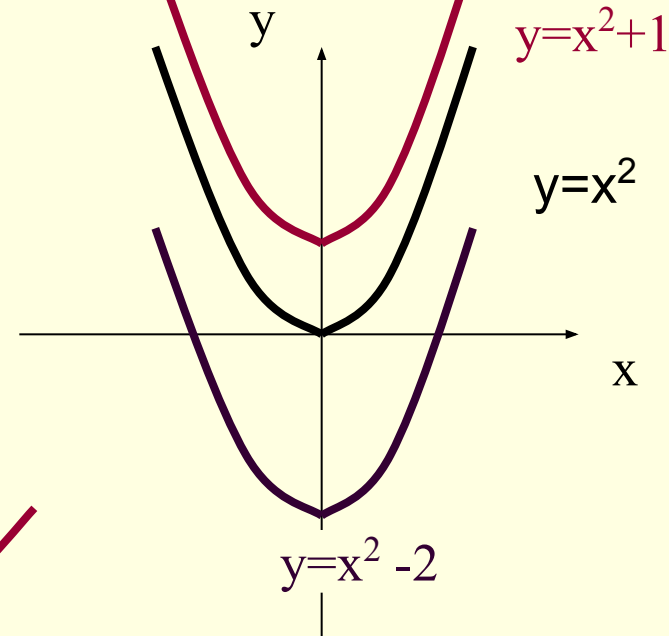
Графиком f -и $y = f(x-a)$ получается параллельным переносом графика f -и вдоль оси x на $|a|$ вправо при $a > 0$ и влево при $a < 0$.



Параллельный перенос вдоль оси y , $f(x) \rightarrow f(x)+b$



Графиком f -и $y = f(x)+b$ получается параллельным переносом графика f -и $y = f(x)$ вдоль оси y на $|b|$ вверх при $b > 0$ и вниз при $b < 0$.



Сжатие и растяжение вдоль оси x ,

$$f(x) \rightarrow f(\alpha x), \alpha > 0$$

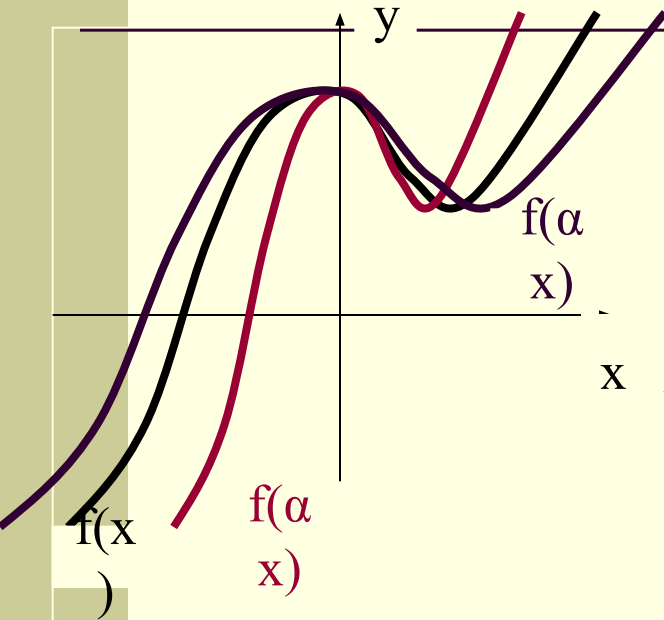


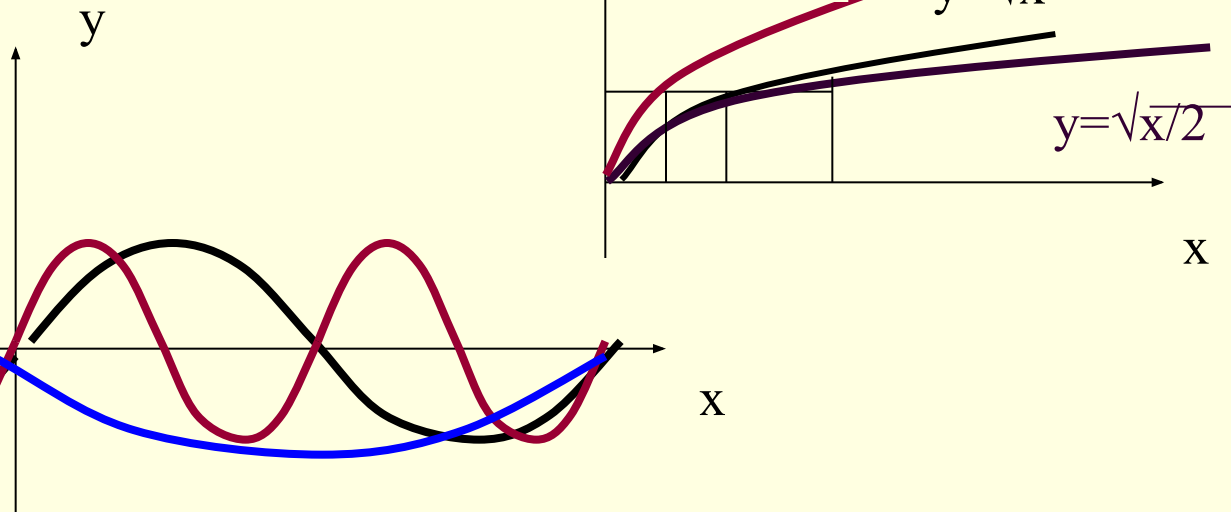
График функции $y = f(\alpha x)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси x в α раз при $\alpha > 1$

График функции $y = f(\alpha x)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси x в $1/\alpha$ раз при $0 < \alpha < 1$

$$y = \sin 1/2x$$

$$y = \sin x$$

$$y = \sin 2x$$



Сжатие и растяжение вдоль оси y , $f(x) \rightarrow kf(x), k > 0$

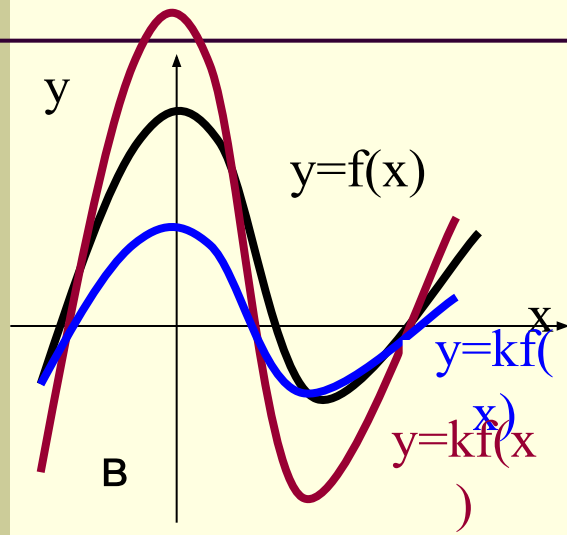
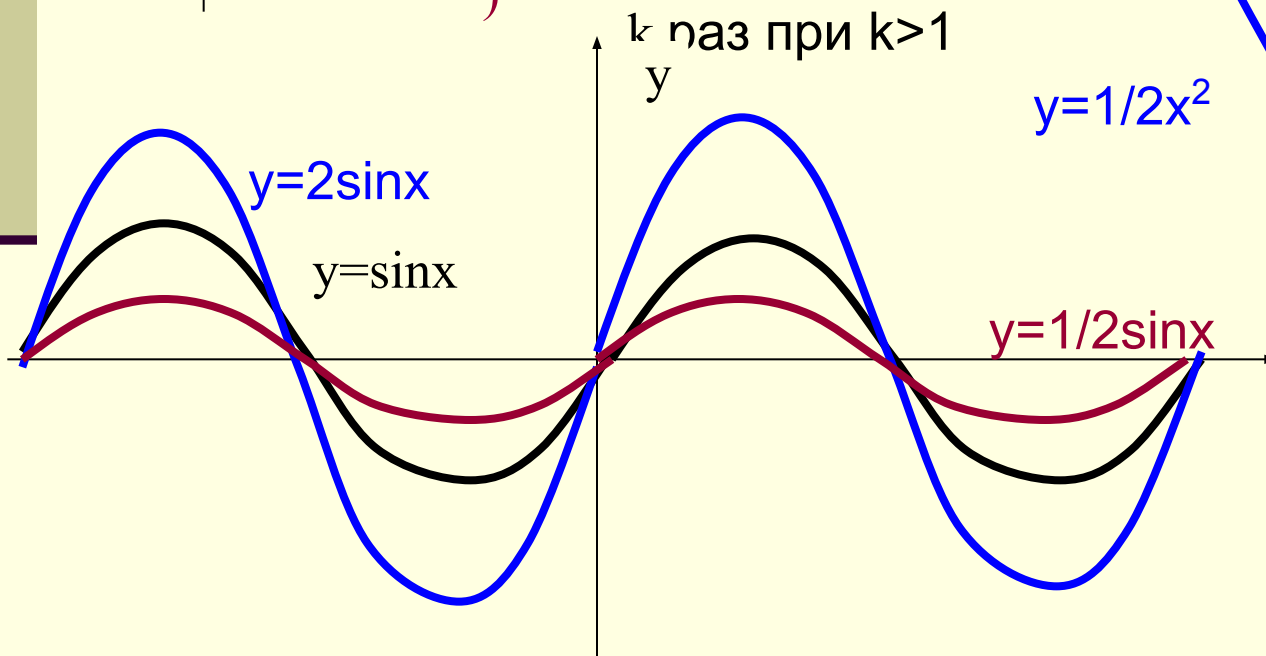
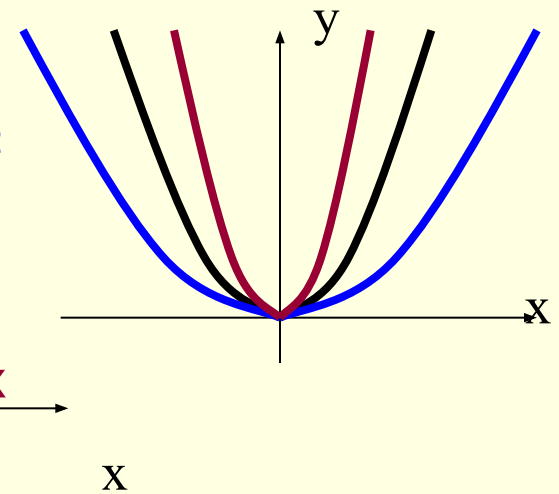


График функции $y = kf(x)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y в $1/k$ раз при $0 < k < 1$

График функции $y = f(\alpha x)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси x



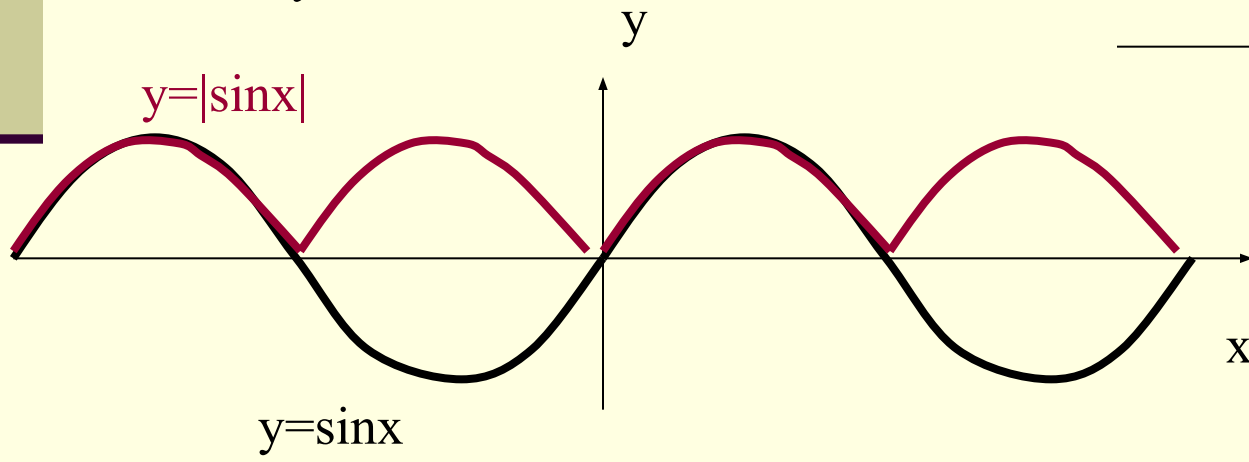
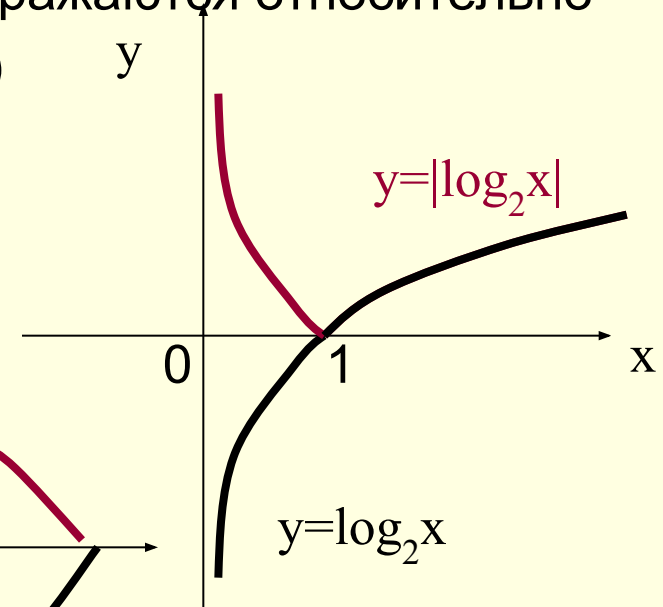
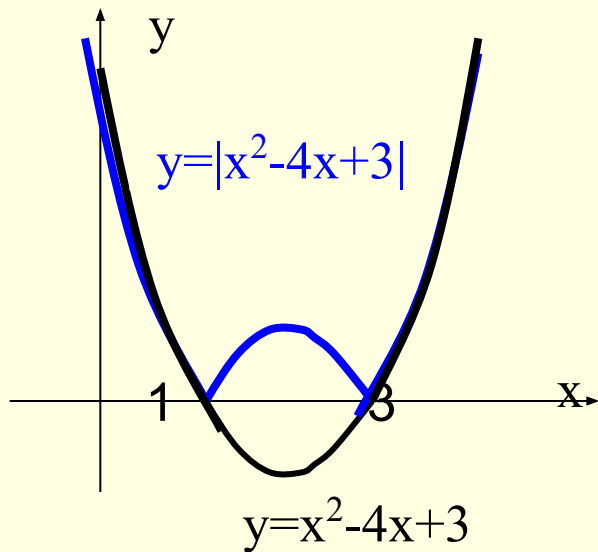
$$y = 1/2x^2$$



$$y = 1/2\sin x$$

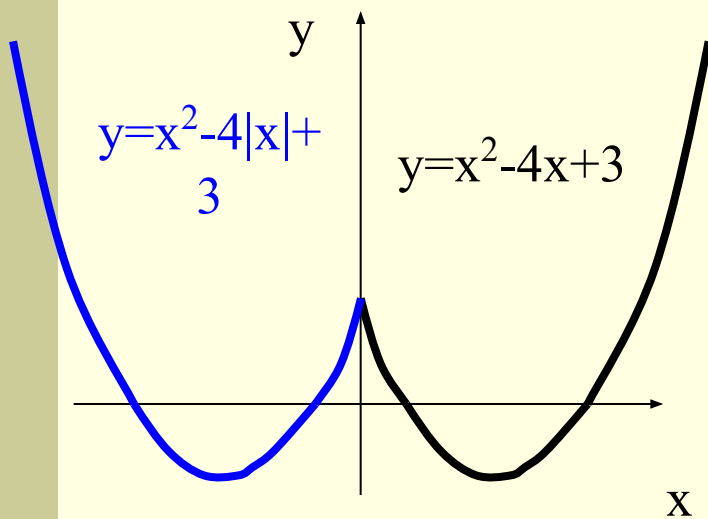
Построение графика функции $y=|f(x)|$

Части графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси x и на оси x остаются без изменения, лежащие ниже оси x – симметрично отражаются относительно этой оси (вверх)

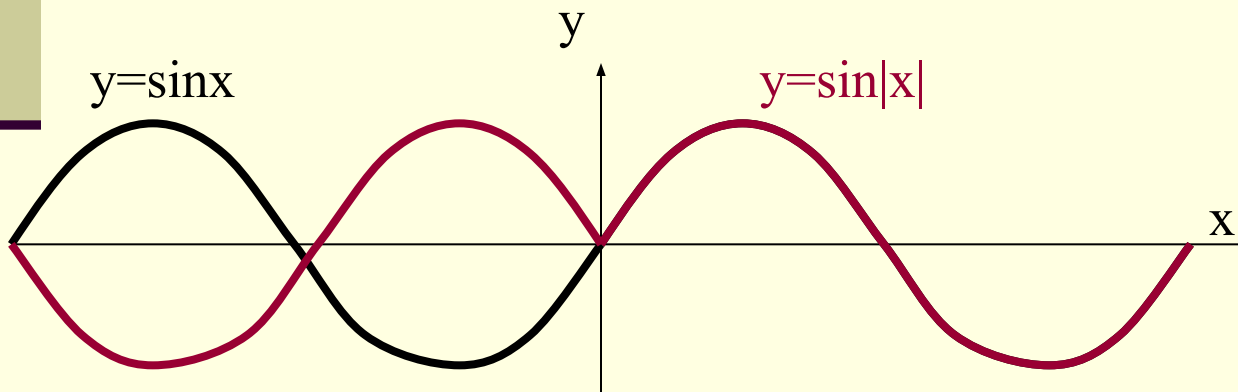


Построение графика функции

$$y=f(|x|)$$

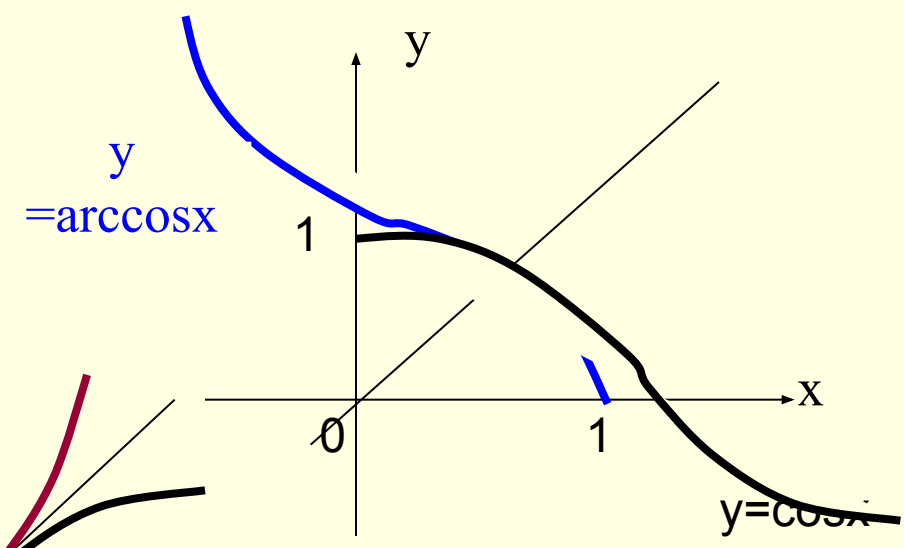
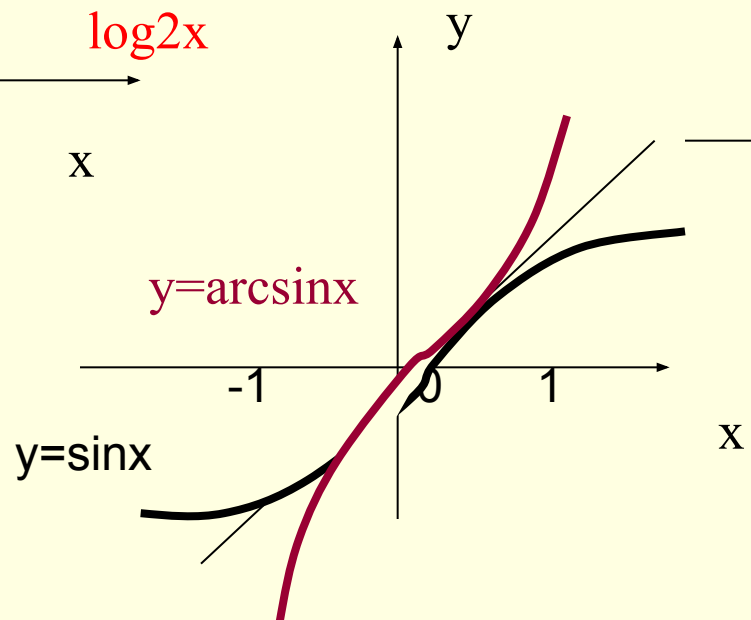
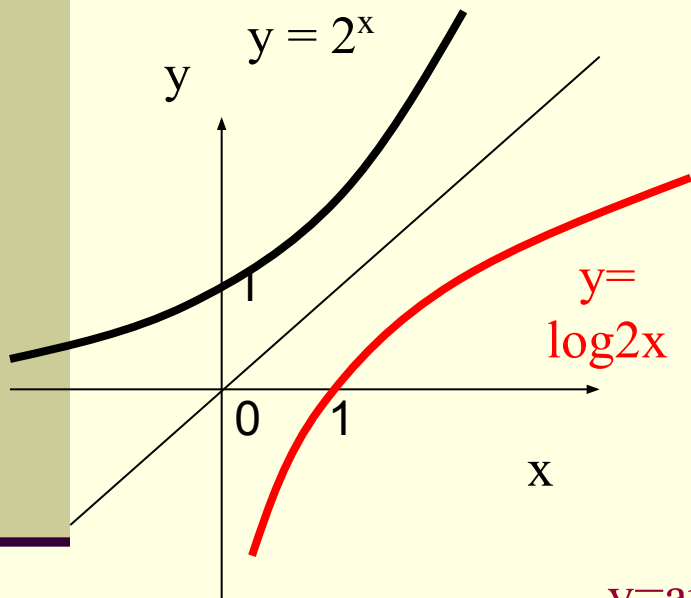


Часть графика функции $y = f(x)$, лежащая левее оси x и на оси y удаляется, а часть, лежащая правее оси y - остаётся без изменения и, кроме того, симметрично отражается относительно оси y (влево). Точка графика, лежащая на оси y , остаётся неизменной.



Построение графика обратной функции

График ф-и $y = g(x)$, обратной данной для функции $y = f(x)$, можно получить преобразованием симметрии графика ф-и $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$.



Контрольные вопросы

- Дайте определение чётной, нечётной функций.
- Расскажите о способах задания функции.
- Что такое область определения?
- Что такое область значения?
- Как найти точки пересечения с осями координат?
- Какие свойства симметрии вы изучили?
- Как проявляются свойства симметрии на графиках?
- Задание на дом гл.7, занятие 4, стр. 133 – 136.
Вопросы и упражнения 1- 11.