Симметрия функций и преобразование их графиков

ЦЕЛИ:

- Повторить определение функции; основные понятия, связанные с ней; способы задания функции. Ввести понятие чётной и нечётной функции. Освоить основные способы преобразования графиков.
- Воспитание интереса к математике.
- Развитие зрительного восприятия предмета.

ПЛАН

1.Повторение

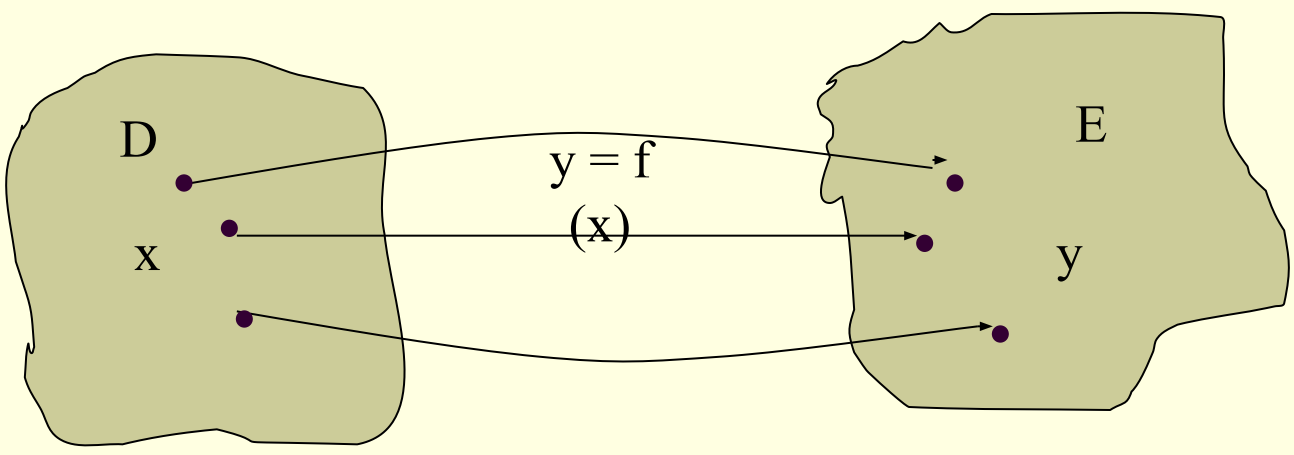
- Определение функции.
- Способы задания функции

2.Преобразование графиков функции

- Симметрия относительно оси y, $f(x) \to f(-x)$
- Симметрия относительно оси x, $f(x) \to -f(x)$
- Параллельный перенос вдоль оси x, $f(x) \to f(x-a)$
- Параллельный перенос вдоль оси y, $f(x) \to f(x)+b$
- Сжатие и растяжение вдоль оси x, $f(x) \to f(\alpha x)$, $\alpha>0$
- Сжатие и растяжение вдоль оси y, $f(x) \to kf(x)$, $k>0$
- Построение графика функции $y = | f(x) |$
- Построение графика функции $y = f(| x |)$
- Построение графика обратной функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ

- Числовой функцией называется соответствие, которое каждому числу **x** из некоторого заданного множества сопоставляет единственное число **y.**
- Обозначение: y = f(x), где x –независимая переменная (аргумент функции), y –зависимая переменная (функция).
- Множество значений x называется областью определения функции.(D)
- Множество значений y называется областью значения функции.(E)



Пример№1

$y = \sqrt{x - 2} + 3$

При $x = 6$, $y(6) = \sqrt{6 - 2} + 3 = 5$

Найдём область определения. $x - 2 \geq 0$, $x \geq 2 \Rightarrow$

$D(y) = [2; +\infty)$; Так как по определению

арифметического корня $0 \leq \sqrt{x - 2} \leq +\infty$,

$0 + 3 \leq \sqrt{x - 2} + 3 \leq +\infty + 3$, или $3 \leq y \leq +\infty$,

$E(x) = [3; +\infty)$

Пример №2.

Найти область определения и область значения функции $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-2}$.

Функция определена при $x - 2 \neq 0$, то есть $x \neq 2 \Rightarrow$

$$D(y) = (-\infty;2) \cup (2; +\infty);$$

Так как при всех допустимых значениях x дробь $1/(x-2)$ не обращается в нуль, то функция $f(x)$ принимает все значения, кроме 3. Поэтому

$E(f) = (-\infty;3) \cup (3; +\infty);$

Пример №3.

Найти область определения дробно-рациональной функции $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{3x+4}{(x-1)(x+3)}$.

Знаменатели дробей обращаются в нуль при x = 2, x = 1, x = -3. Поэтому область определения

$D(f) = (-\infty;-3) \cup (-3; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$;

Пример №4.

Зависимость $y(x) = \begin{cases} 2x - 3 \\ x^2 + 1 \end{cases}$

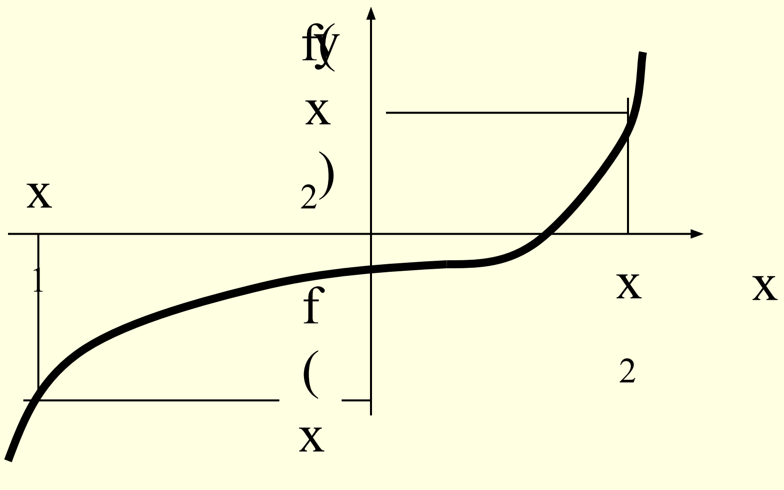
Уже не является функцией. При x = 1, пользуясь верхней формулой, найдём y = 2*1 – 3 = -1, а пользуясь нижней формулой, получим
$y = 1^2 + 1 = 2$. Таким образом, одному значению x =1 соответствуют два значения y (y=-1 и y=2).
Поэтому эта зависимость (по определению) не является функцией

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

- Аналитический способ: функция задаётся с помощью формулы. Примеры: $y = x^2$, $y = ax + b$
- Табличный способ: функция задаётся с помощью таблицы.
- Описательный способ: функция задаётся словесным описанием.
- Графический способ: функция задаётся с помощью графика.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

- Графиком функции называется множество точек плоскости с координатами (x; f(x))



Пример №5.

Дана функция $y = 2x – 3|x| + 4$. Принадлежит ли графику этой функции точка с координатами

а) (-2; -6); б) (-3; - 10)

Решение.

а) при $x = -2$, $y = 2\cdot(-2) -3\cdot|-2| + 4 = - 4 - 3\cdot3 + 4 =-6$

Так как $y(-2) = -6$, то точка A(-2; -6) принадлежит графику функции.

б) при $x = -3$, $y = 2\cdot(-3) -3\cdot|-3| + 4 = - 6 - 3\cdot3 + 4 =-11$

Так как $y(-3) = -11$, то точка B(-3; -10) не принадлежит графику функции

Пример №6.

Дана функция $f(x) = - x^2 + 6x – 8$. Найдём точки пересечения графика функции с осями координат.

Решение.

1) Точка пересечения с осью ординат, при $x=0$,

$y(0) = - 0^2 + 6 \cdot 0 – 8 = - 8$. Получаем координаты этой точки $A(0; -8)$

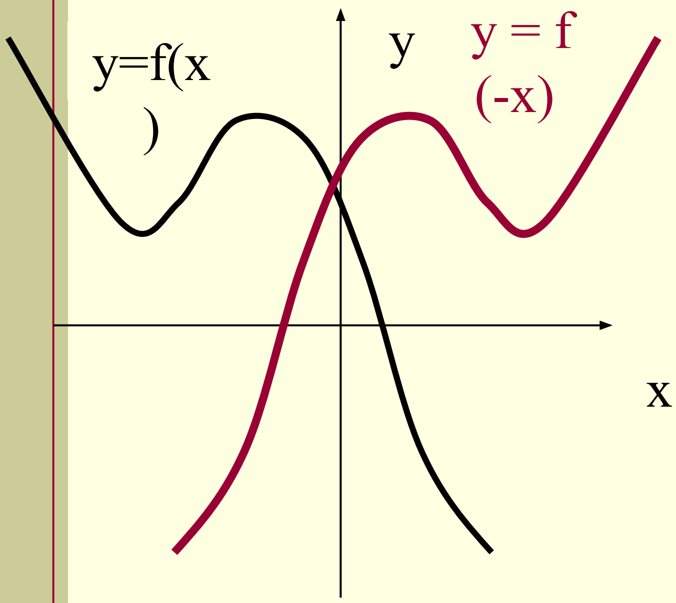
2) Точка пересечения с осью абсцисс, при $y =0$,

$0 = - x^2 + 6x – 8$, $x^2 - 6x + 8=0$, $D = 36 – 32 =4$,

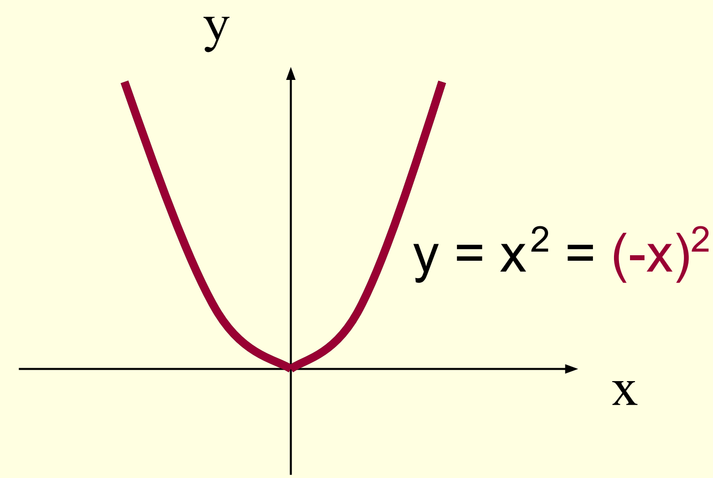
$x_1= (6-2)/2=2$,

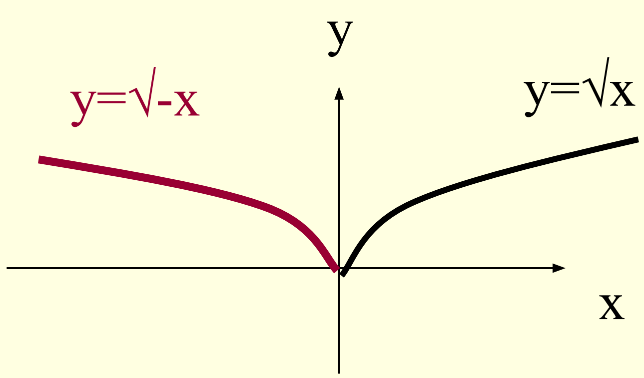
$x_1= (6+2)/2=4$. Поэтому график функции пересекает ось абсцисс в двух точках: $B(2; 0)$ и $C(4;0)$

Симметрия относительно оси у
f(x)→ f(- x)



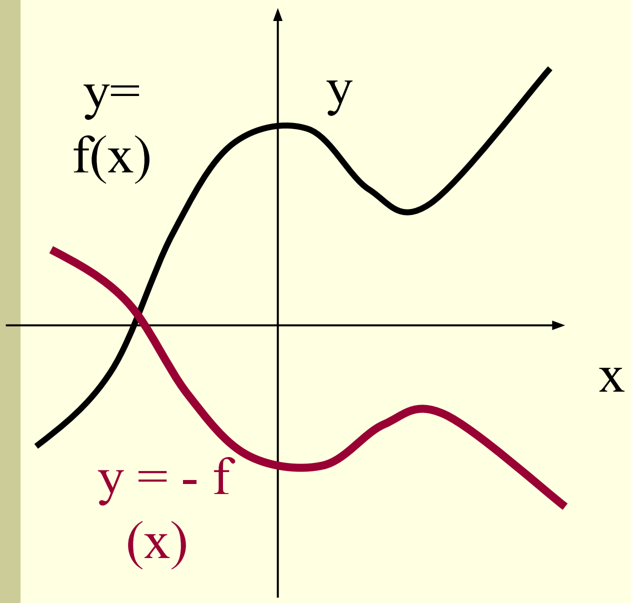
Графиком ф-и у = f (- х) получается преобразованием симметрии графика ф-и у = f (х) относительно оси у.

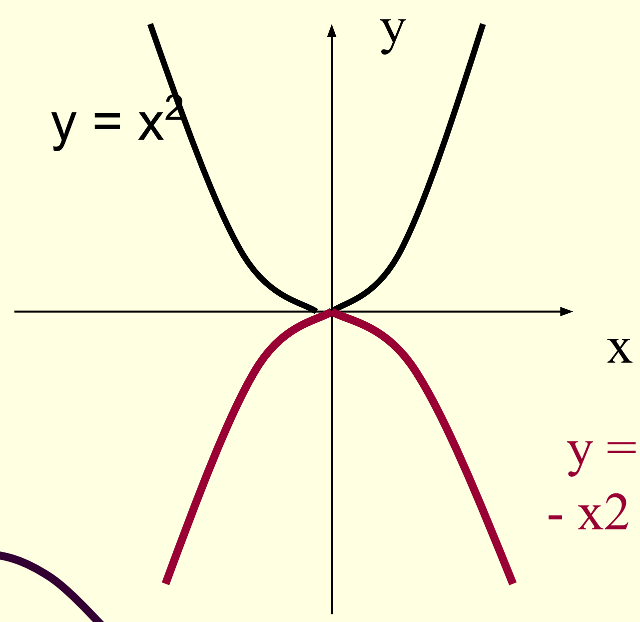


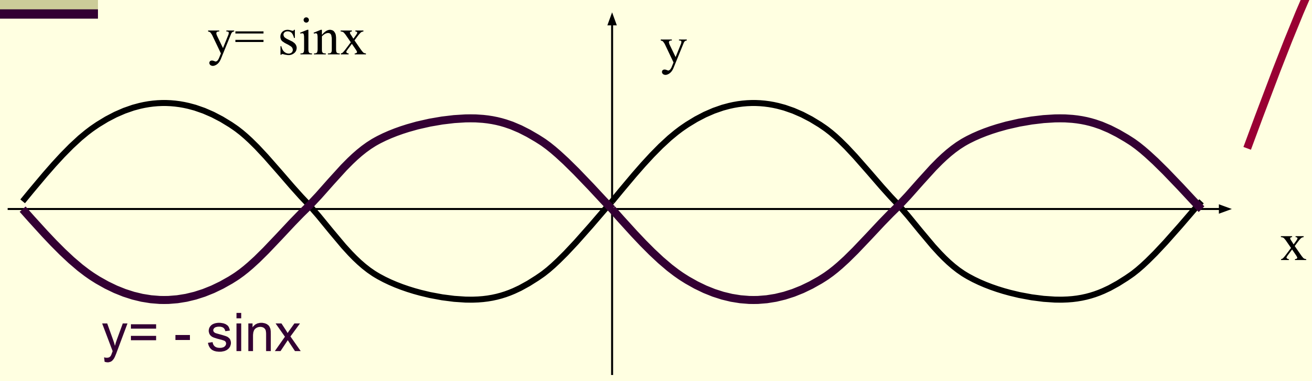


Симметрия относительно оси х $f(x) \rightarrow -f(x)$

График ф-и у = - f (х) получается преобразованием симметрии графика ф-и у = f (х) относительно оси х.





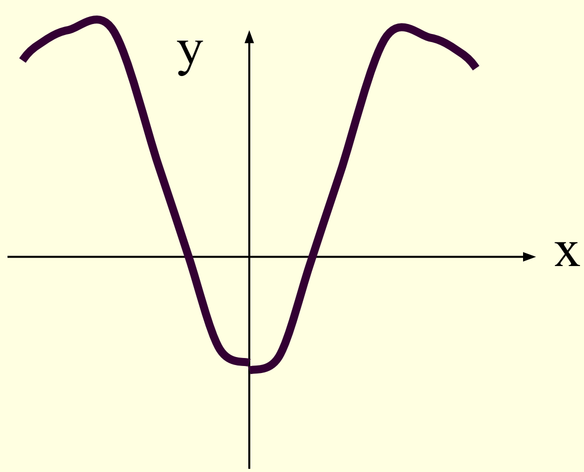


Чётность и нечётность

Функция наз-ся **чётной,** если:

- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения f (- x) = f (x)

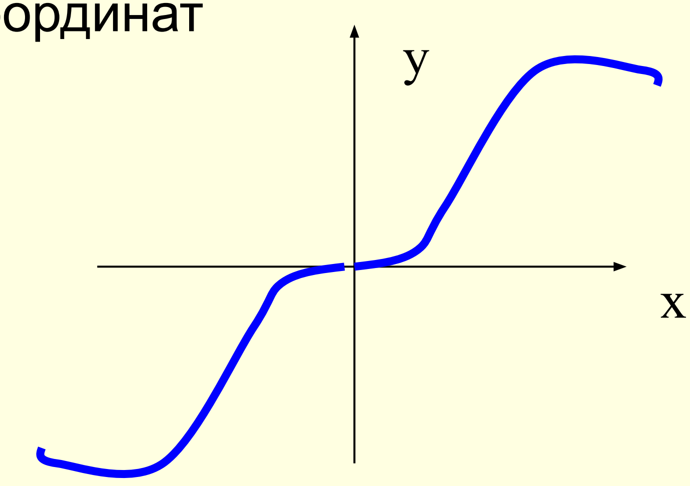
График чётной функции симметричен относительно оси y



Функция наз-ся **нечётной**, если:

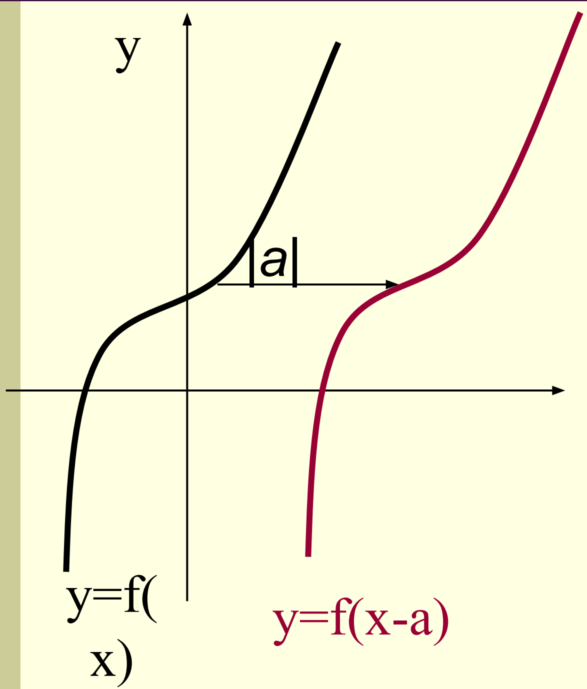
- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения f (- x) = - f (x)

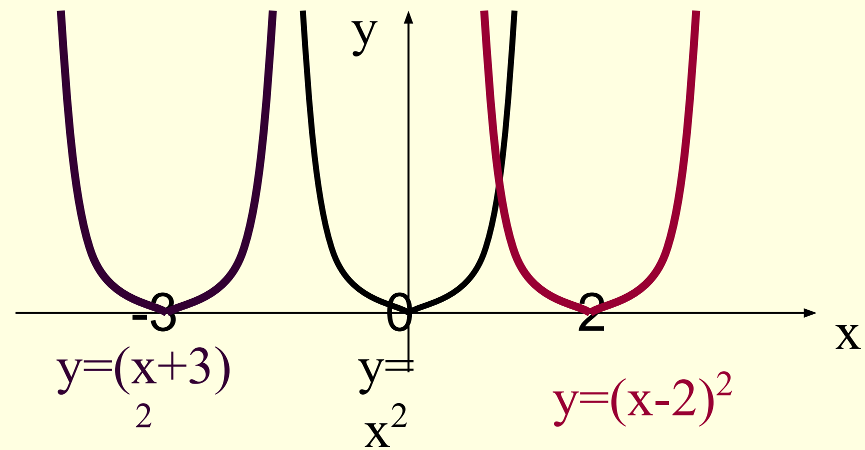
График нечётной функции симметричен относительно начала координат

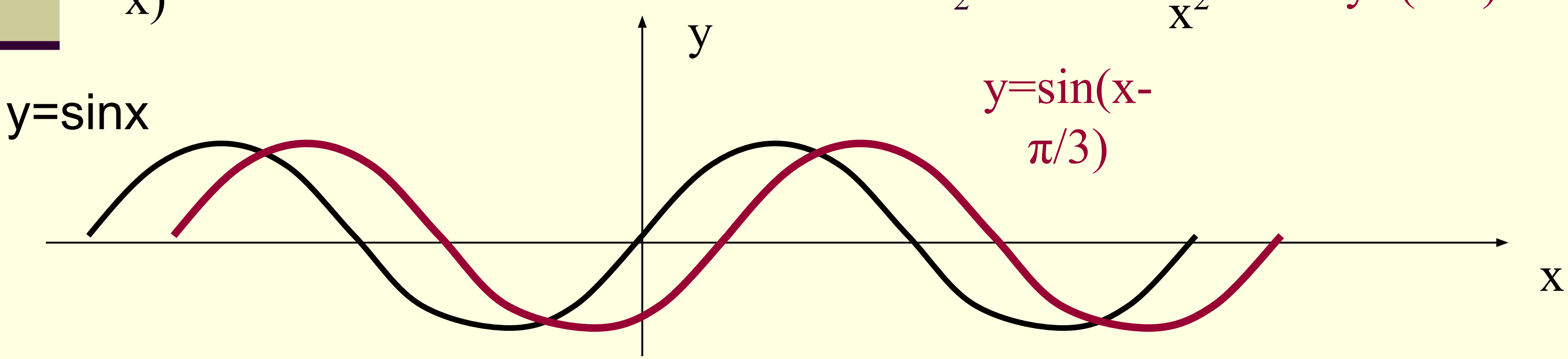


Параллельный перенос вдоль оси х, $f(x) \rightarrow f(x-a)$

Графиком ф-и y = f (x-a) получается парал – лельным переносом графика ф-и вдоль оси х на |*a*| вправо при а >0 и влево при а <0.

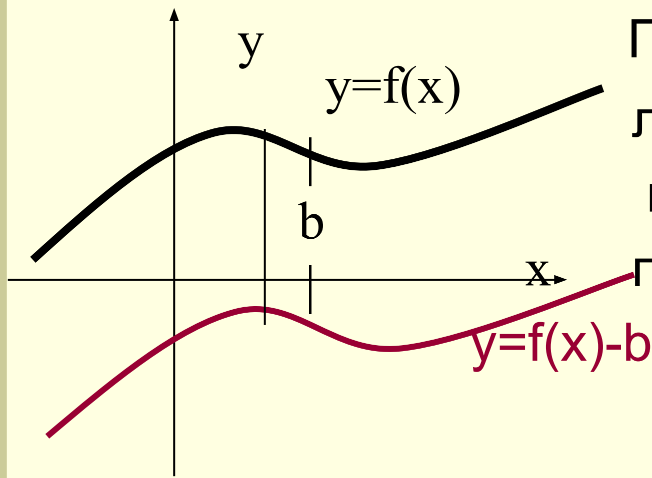


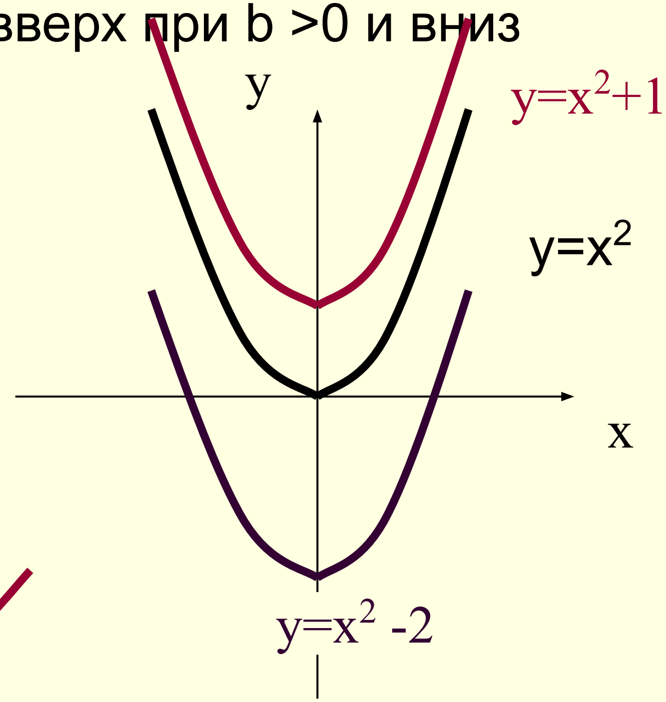


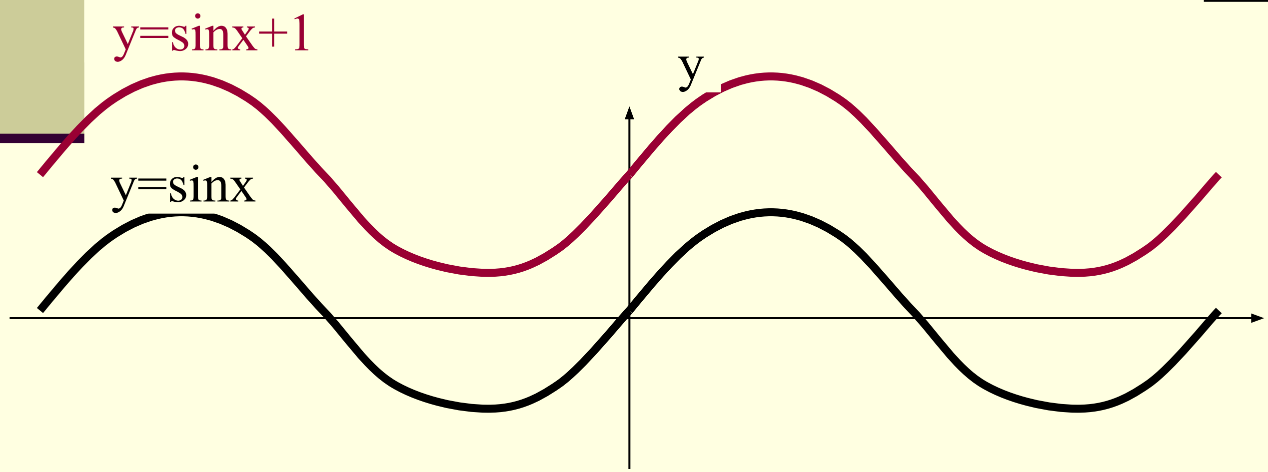


Параллельный перенос вдоль оси y, f(x) → f(x)+b

Графиком ф-и y = f (x)+b получается парал – лельным переносом графика ф-и y = f (x) вдоль оси y на |*b*| вверх при b >0 и вниз при b <0.







Сжатие и растяжение вдоль оси x, $f(x) \rightarrow f(\alpha x),\ \alpha>0$

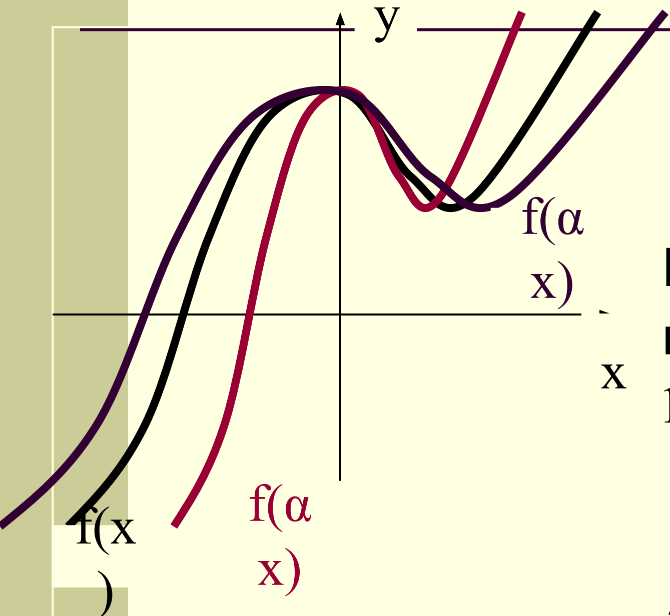
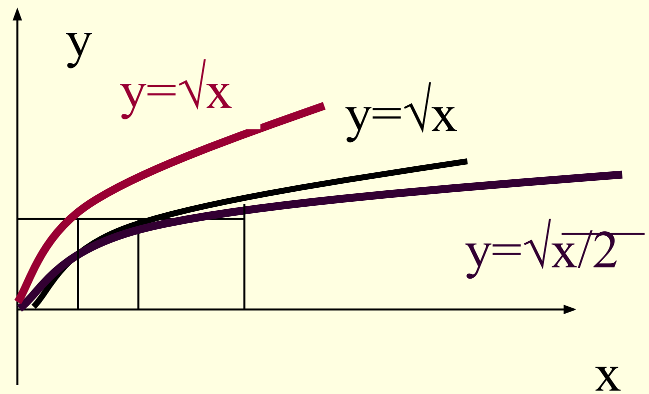
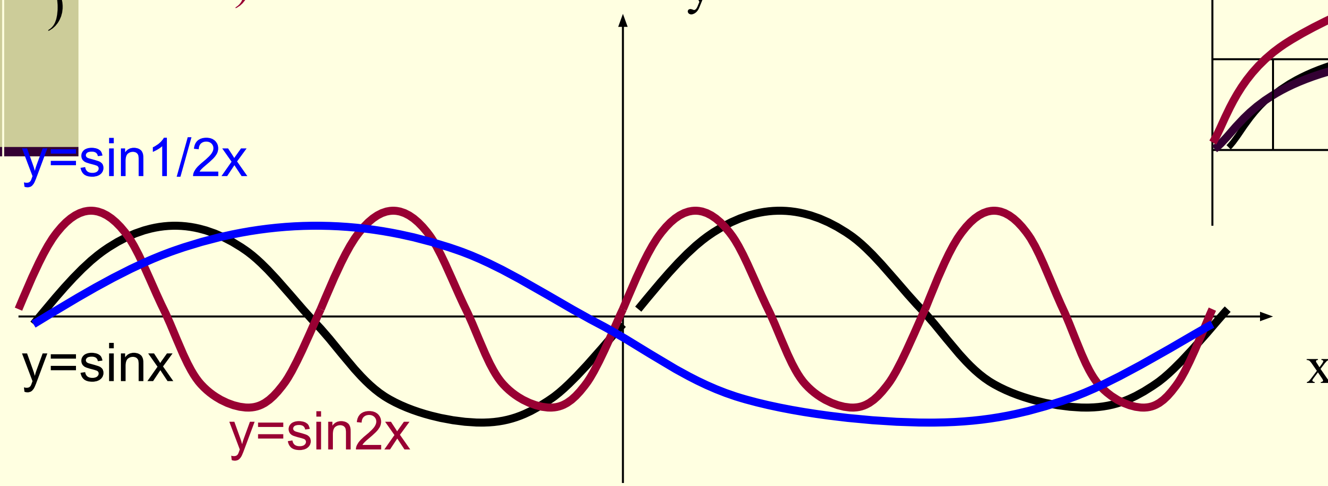


График функции y = f (α x) получается сжатием графика функции y =f (x) вдоль оси x в α раз при α >1

График функции y = f (α x) получается растяжением графика функции y =f (x) вдоль оси x в 1/α раз при 0 <α <1





Сжатие и растяжение вдоль оси у, $f(x) \to kf(x), k>0$

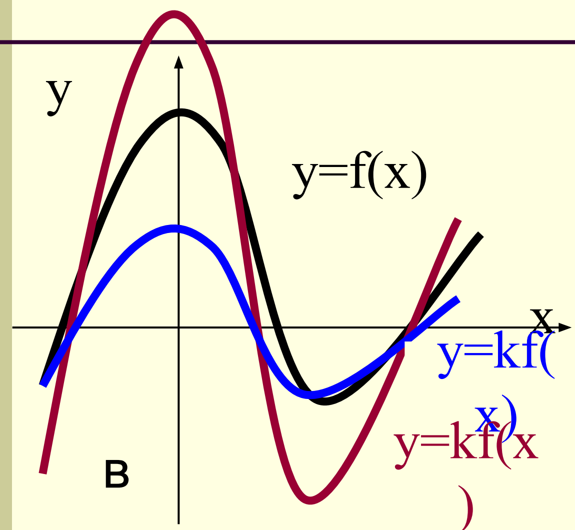
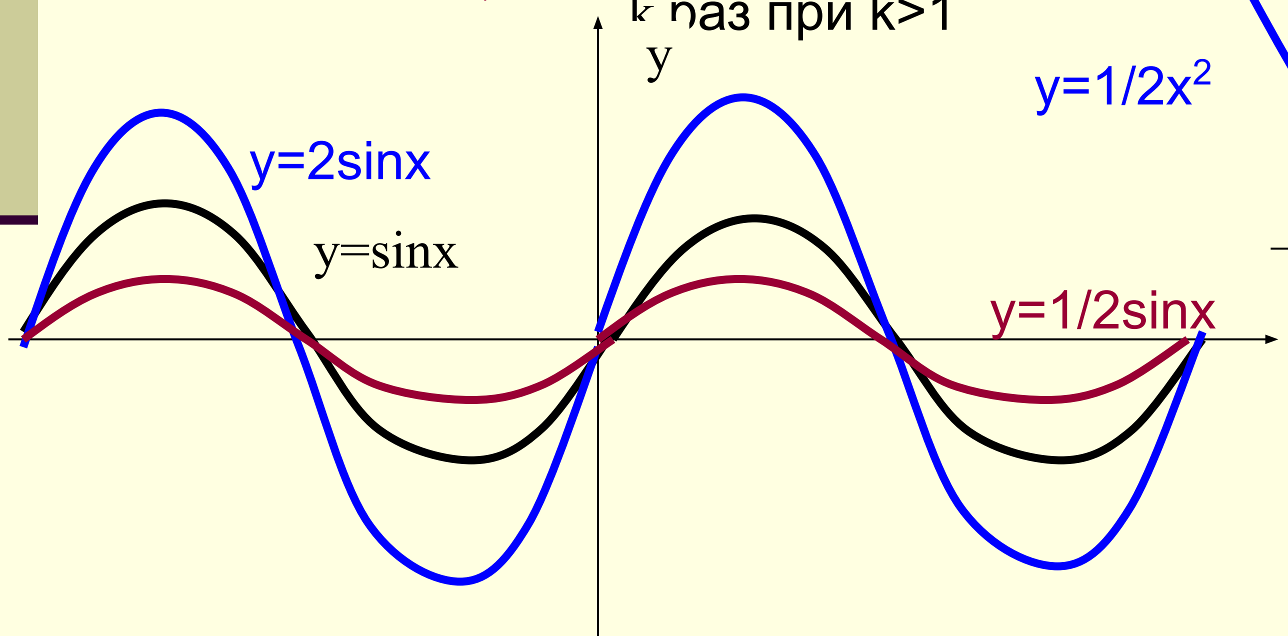
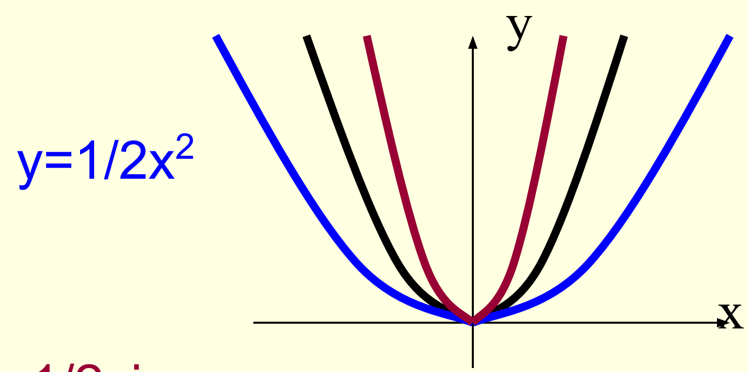


График функции у = kf (х) получается сжатием графика функции у =f (х) вдоль оси у в $1/k$ раз при $0 < k < 1$

График функции у = f (α х) получается растяжением графика функции у =f (х) вдоль оси у

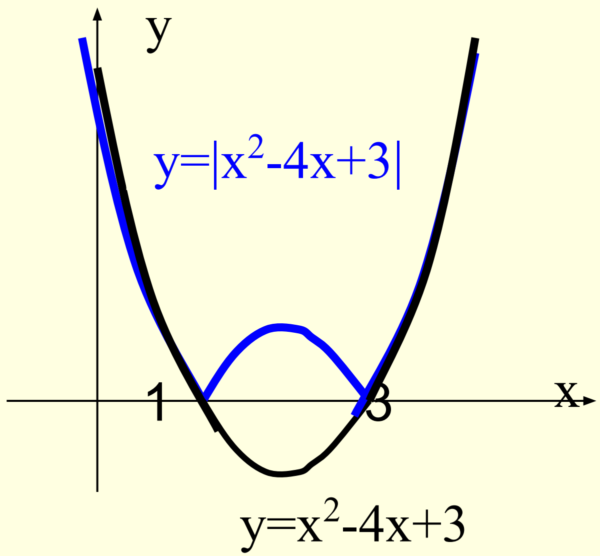
k раз при k>1

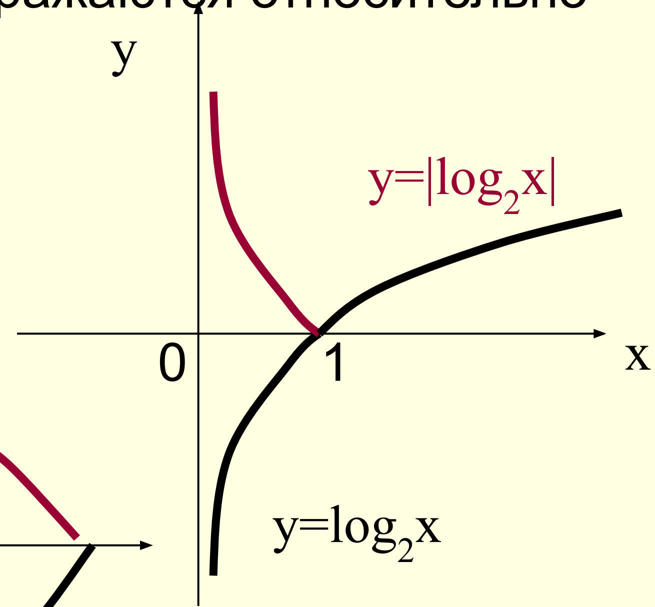


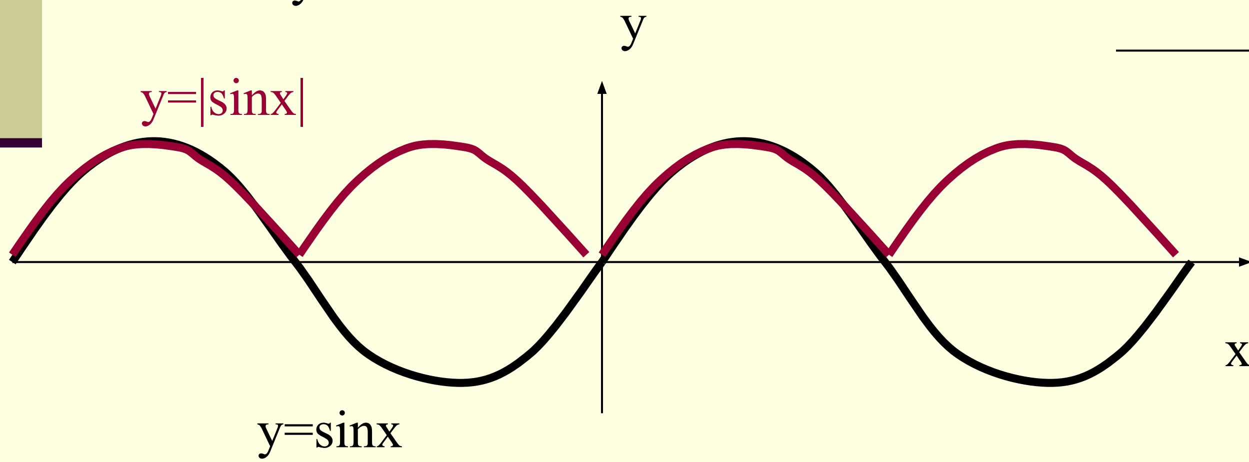


Построение графика функции $y=|f(x)|$

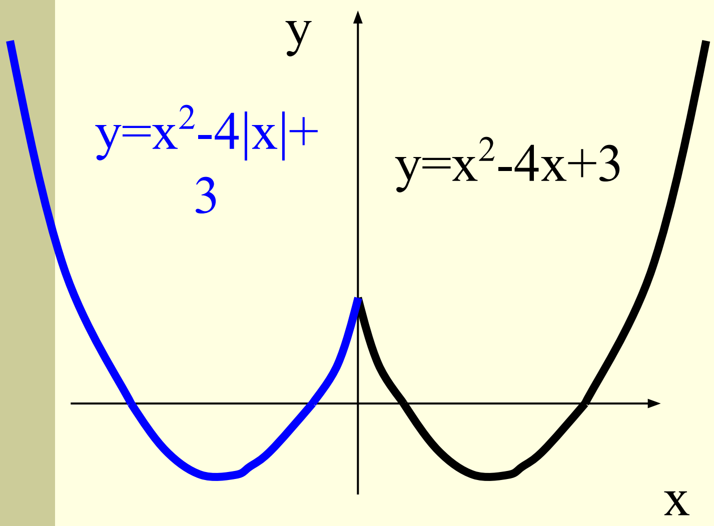
Части графика функции y = (x), лежащие выше оси x и на оси x остаются без изменения, лежащие ниже оси x – симметрично отражаются относительно этой оси (вверх)



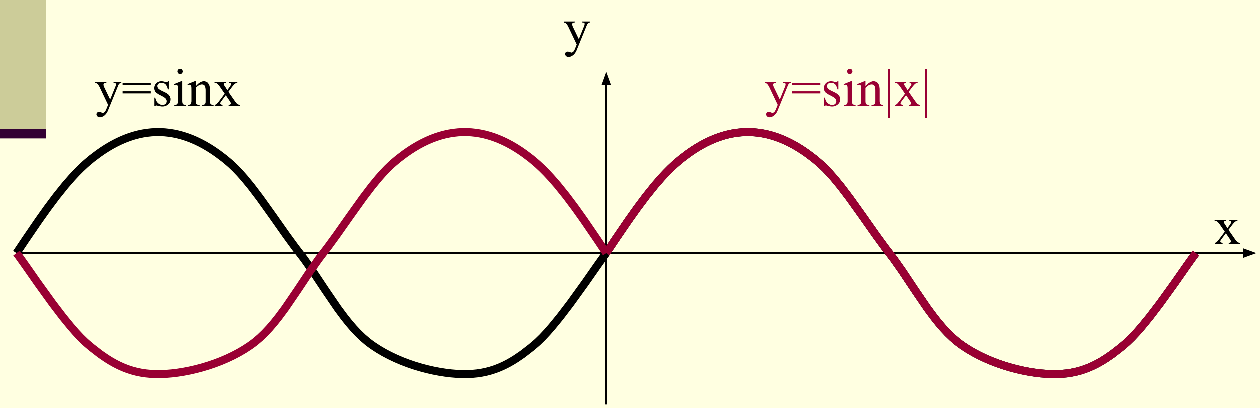




Построение графика функции y=f(|x|)

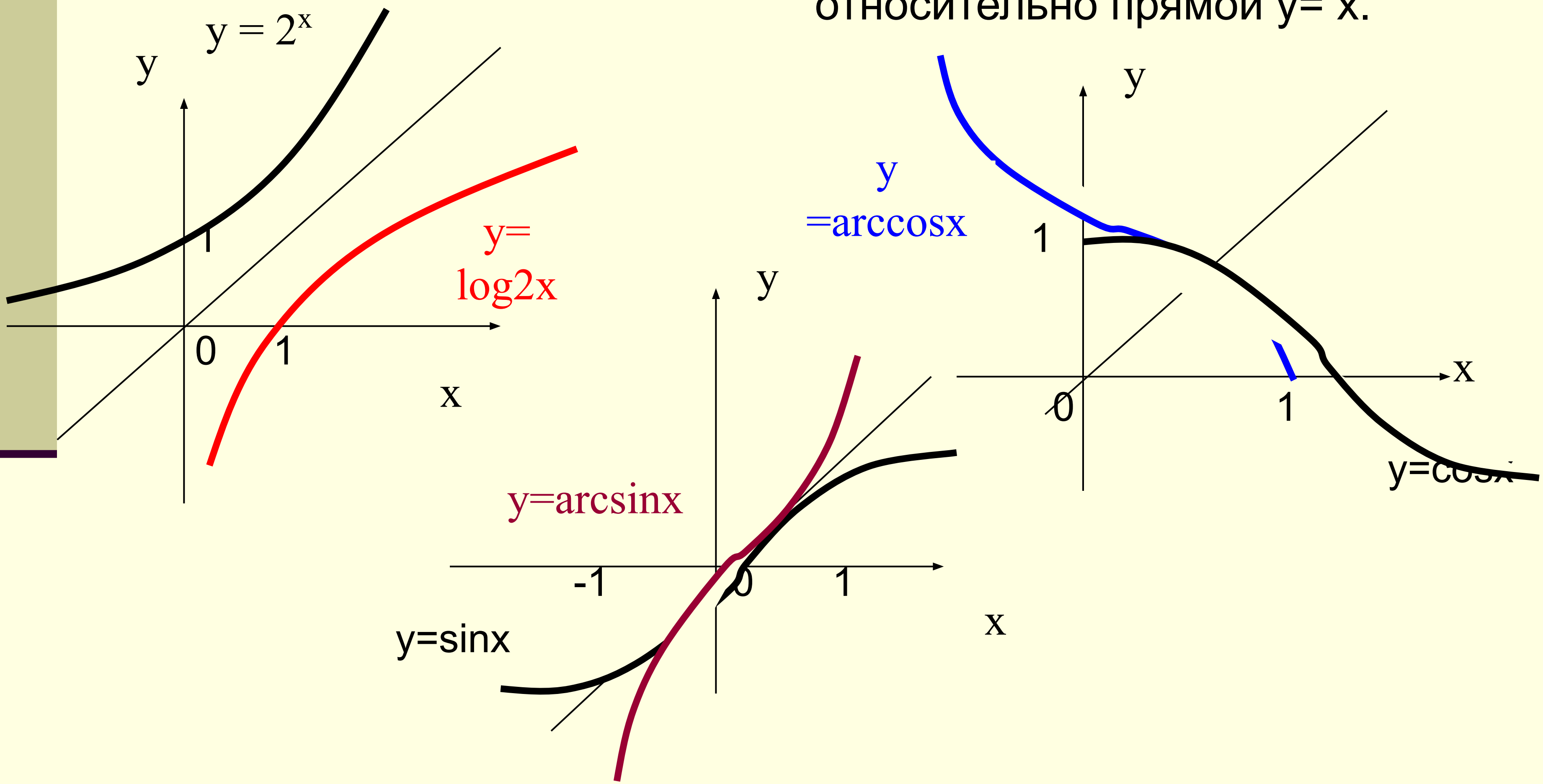


Часть графика функции y = (x), лежащая левее оси x и на оси y удаляется, а часть, лежащая правее оси y - остаётся без изменения и, кроме того, симметрично отражается относительно оси y (влево). Точка графика, лежащая на оси y, остаётся неизменной.



Построение графика обратной функции

График ф-и y = g(x), обратной данной для функции y = f (x), можно получить преобразованием симметрии графика ф-и y = f (x) относительно прямой y= x.



Контрольные вопросы

- Дайте определение чётной, нечётной функций.
- Расскажите о способах задания функции.
- Что такое область определения?
- Что такое область значения?
- Как найти точки пересечения с осями координат?
- Какие свойства симметрии вы изучили?
- Как проявляются свойства симметрии на графиках?
- Задание на дом гл.7, занятие 4, стр. 133 – 136. Вопросы и упражнения 1- 11.