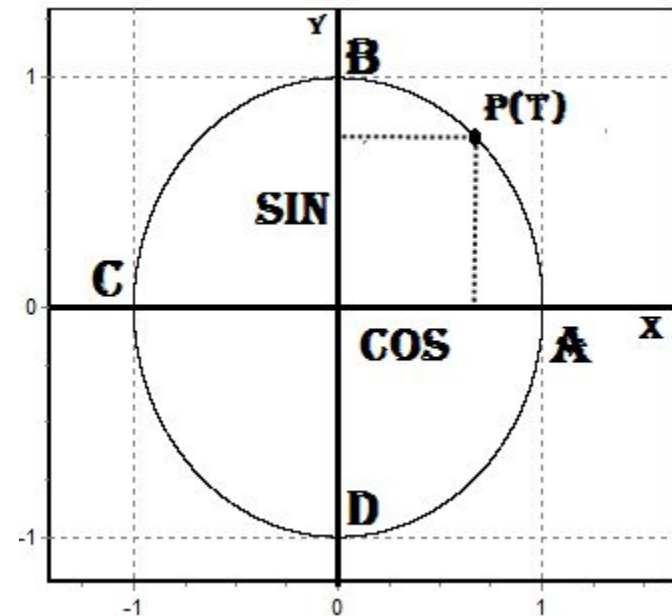


# Занимательная математика

## АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 10 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ:  
СИНУС И КОСИНУС.



# Синус и косинус.

## ЧТО БУДЕМ ИЗУЧАТЬ:

Определение синуса и косинуса.

Определение тангенса и котангенса.

Основное тригонометрическое тождество

Таблица значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса.

Основные свойства.

Синус и косинус в жизни.

Примеры задач.

# Синус и косинус.

## Определение.

Ребята, давайте отметим на *числовой окружности* точку **P**, посмотрите рисунок, наша точка **P** соответствует некоторому числу **t** числовой окружности, тогда *абсциссу* точки **P** будем называть *косинусом* числа **t** и обозначать **cos(t)**, а *ординату* точки **P** назовем *синусом* числа **t** и обозначим **sin(t)**.

*А как будет выглядеть запись синуса и косинуса на математическом языке?*

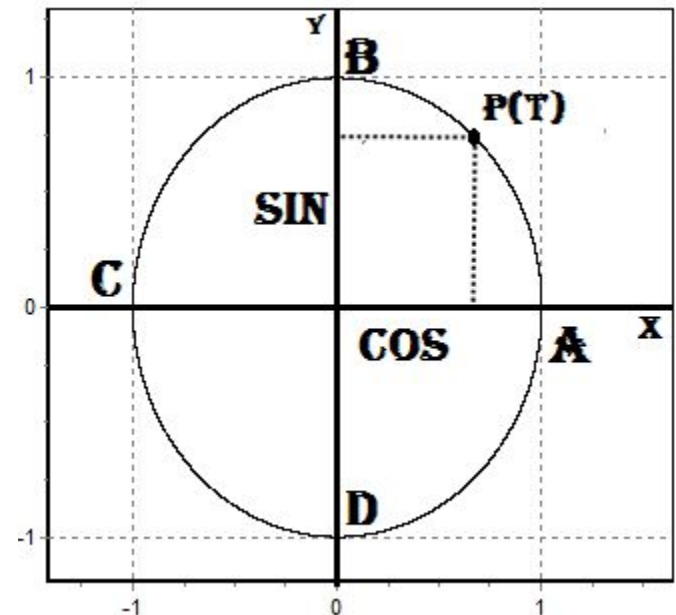
*Давайте посмотрим:*

Наша точка **P(t) = P(x,y)**

тогда:

$$X = \cos(t)$$

$$Y = \sin(t)$$



# Тангенс и котангенс.

## Определение.

*Так же важно определить понятие тангенса и котангенса числа  $t$  числовой окружности, запишем определения:*

Отношение **синуса** числа  $t$  к **косинусу** того же числа называют **тангенсом** числа  $t$  и обозначают  **$tg(t)$** .

Отношение **косинуса** числа  $t$  к **синусу** того же числа называют **котангенсом** числа  $t$  и обозначают  **$ctg(t)$** .

$$tg(t) = \frac{\sin t}{\cos t} \quad ctg(t) = \frac{\cos t}{\sin t}$$

**Стоит заметить, так как на 0 делить нельзя, то, для тангенса  $\cos(t) \neq 0$ , а для котангенса  $\sin(t) \neq 0$**

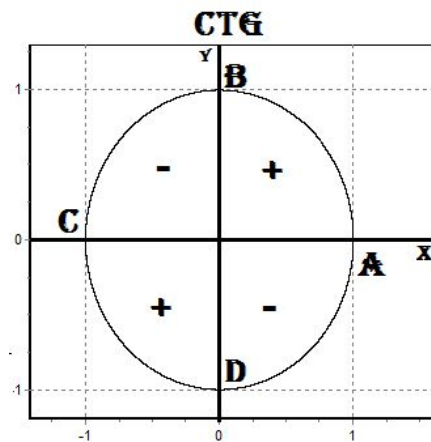
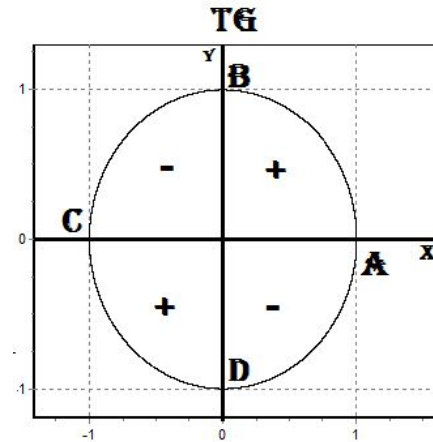
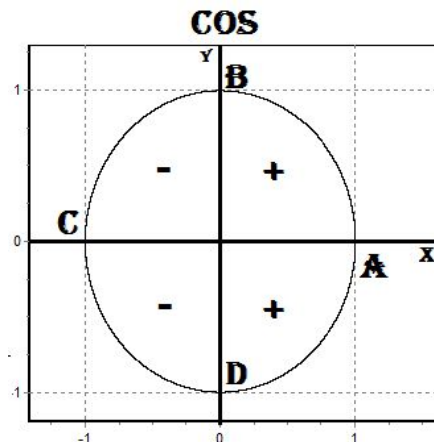
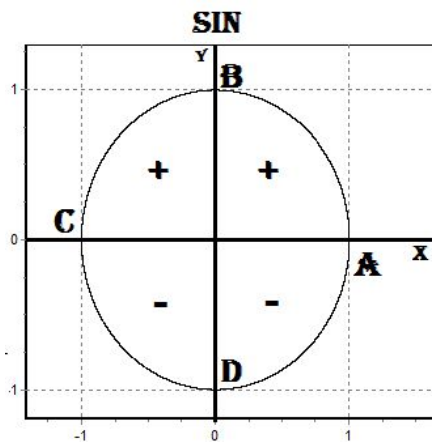
# Синус и косинус.

## Основное тригонометрическое тождество.

Давайте вспомним уравнение числовой окружности:  $X^2 + Y^2 = 1$   
нашему числу  $X$  соответствует *абсцисса* координатной плоскости, а числу  $Y$  – *ордината*, посмотрим *определение синуса и косинуса* на первом слайде и получим:

$$X^2 + Y^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad \text{Важно, запомните!}$$

*Значения синуса, косинуса, тангенса, котангенса в четвертях окружности:*



# Синус и косинус.

Таблица значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса.

T	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
SIN(T)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
COS(T)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
TG(T)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.	0
CTG(T)	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не сущ.	0	не сущ.

*не сущ. – не существует значение, т.к. на 0 делить нельзя*

# Синус и косинус.

## Основные свойства.

Для любого числа  $t$  справедливы равенства:

$$\sin(-t) = -\sin(t)$$

$$\cos(-t) = \cos(t)$$

$$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg}(t)$$

$$\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg}(t)$$

$$\sin(t + 2\pi \cdot k) = \sin(t)$$

$$\cos(t + 2\pi \cdot k) = \cos(t)$$

$$\sin(t + \pi) = -\sin(t)$$

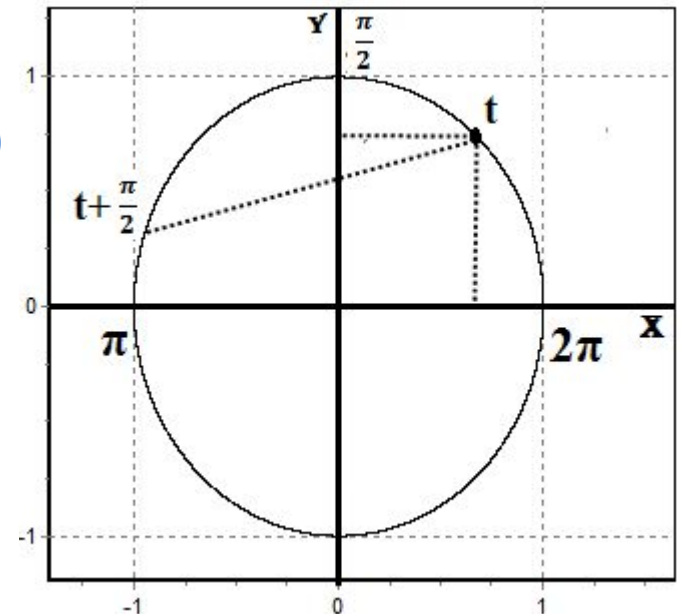
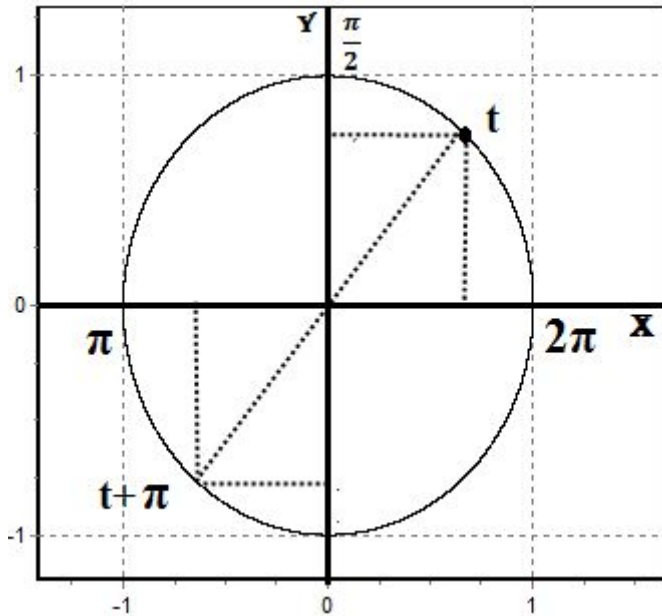
$$\cos(t + \pi) = -\cos(t)$$

$$\operatorname{tg}(t + \pi \cdot k) = \operatorname{tg}(t)$$

$$\operatorname{ctg}(t + \pi \cdot k) = \operatorname{ctg}(t)$$

$$\sin(t + \pi/2) = \cos(t)$$

$$\cos(t + \pi/2) = -\sin(t)$$

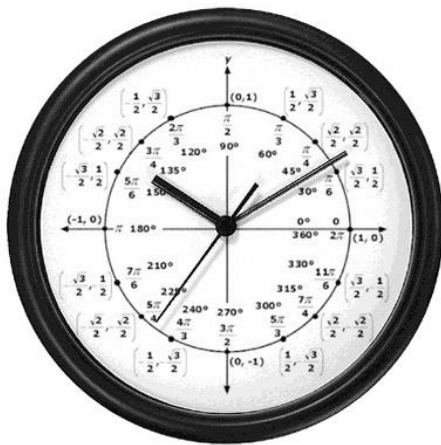


# Синус и косинус.

Синус и косинус в жизни.

*Для чего нужны синусы и косинусы в обычной жизни?*

*На практике синусы и косинусы применяются во всех инженерных специальностях, особенно в строительных. Их используют моряки и летчики в расчетах курса движения. Не обходятся без синусов и косинусов геодезисты, и даже путешественники. В географии применяют для измерения расстояний между объектами, а также в спутниковых навигационных системах.*





# Синус и косинус.

## Пример

**Вычислить синус и косинус  $t$  при:  $t=53\pi/4$**

**Решение:**

*Т.к. числам  $t$  и  $t+2\pi \cdot k$  ( $k$ -целое число) соответствует одна и та же точка числовой окружности:*

$$53\pi/4 = (12 + 5/4) \cdot \pi = 12\pi + 5\pi/4 = 5\pi/4 + 2\pi \cdot 6$$

*Воспользуемся свойством  $\sin(t + 2\pi \cdot k) = \sin(t)$ ,  $\cos(t + 2\pi \cdot k) = \cos(t)$*

$$\sin(5\pi/4 + 2\pi \cdot 6) = \sin(5\pi/4) = \sin(\pi/4 + \pi)$$

$$\cos(5\pi/4 + 2\pi \cdot 6) = \cos(5\pi/4) = \cos(\pi/4 + \pi)$$

*Воспользуемся свойством  $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$ ,  $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$*

$$\sin(\pi/4 + \pi) = -\sin(\pi/4)$$

$$\cos(\pi/4 + \pi) = -\cos(\pi/4)$$

**Из таблицы значений синуса и косинуса получаем:**

$$\sin(53\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(53\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

# Синус и косинус.

## Пример

**Вычислить синус и косинус  $t$  при:  $t = -49\pi/3$**

**Решение:**

*Т.к. числам  $t$  и  $t+2\pi \cdot k$  ( $k$ -целое число) соответствует одна и та же точка числовой окружности то:*

$$-49\pi/3 = -(16 + 1/3) \cdot \pi = -16\pi + (-\pi/3) = (-\pi/3) + 2\pi \cdot (-8)$$

*Воспользуемся свойством  $\sin(t + 2\pi \cdot k) = \sin(t)$ ,  $\cos(t + 2\pi \cdot k) = \cos(t)$*

$$\sin(-\pi/3 + 2\pi \cdot (-8)) = \sin(-\pi/3)$$

$$\cos(-\pi/3 + 2\pi \cdot (-8)) = \cos(-\pi/3)$$

*Воспользуемся свойством  $\sin(-t) = -\sin(t)$ ,  $\cos(-t) = \cos(t)$*

$$\sin(-\pi/3) = -\sin(\pi/3)$$

$$\cos(-\pi/3) = \cos(\pi/3)$$

**Из таблицы значений синуса и косинуса получаем:**

$$\sin(-49\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-49\pi/3) = \frac{1}{2}$$

# Синус и косинус.

## Пример

Решить уравнение а)  $\sin(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , б)  $\sin(t) > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение:

$\sin(t)$  – из определения, это *ордината* точки числовой окружности.

Значит на числовой окружности нужно найти точки с *ординатой*

$\frac{\sqrt{3}}{2}$  и записать, каким числам  $t$ , они соответствуют - точки  $F$  и  $G$  на рисунке.

а) Точка  $F$  и  $G$  имеют координаты:

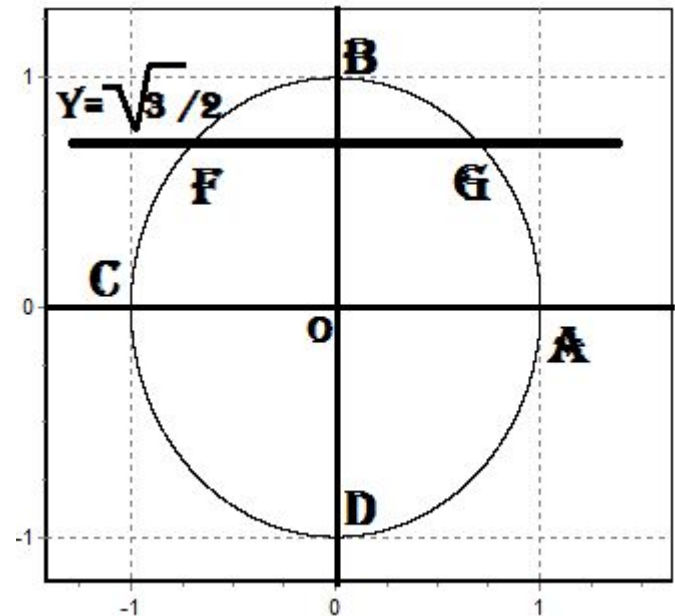
$$\pi/3 + 2\pi \cdot k \text{ и } 2\pi/3 + 2\pi \cdot k$$

б) Уравнению  $y > \frac{1}{2}$  это дуга  $FG$  тогда:

$$\pi/3 + 2\pi \cdot k < t < 2\pi/3 + 2\pi \cdot k$$

Ответ : а)  $t = \pi/3 + 2\pi \cdot k$  и  $t = 2\pi/3 + 2\pi \cdot k$

$$\text{б) } \pi/3 + 2\pi \cdot k < t < 2\pi/3 + 2\pi \cdot k$$



# Синус и косинус.

## Пример

**Решить уравнение** а)  $\cos(t)=1/2$  б)  $\cos(t)>1/2$

$\cos(t)$  – из определения, это *абсцисса* точки числовой окружности.

Значит на числовой окружности нужно найти точки с *абсциссой равной 1/2* и записать, каким числом  $t$ , они соответствуют – точки  $F$  и  $G$  на рисунке

а) Точка  $F$  и  $G$  соответствуют координаты:

$$-\pi/3 + 2\pi \cdot k \text{ и } \pi/3 + 2\pi \cdot k$$

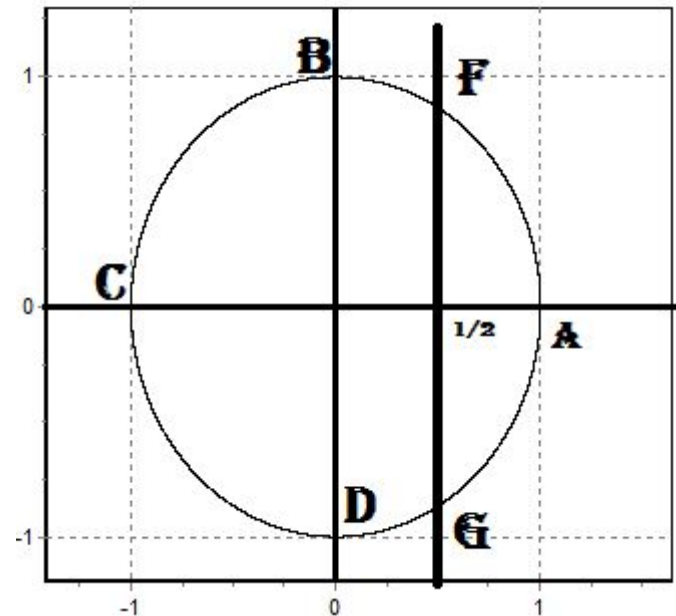
б) Уравнению  $x > 1/2$

соответствует дуга  $FG$  тогда:

$$-\pi/3 + 2\pi \cdot k < t < \pi/3 + 2\pi \cdot k$$

**Ответ :** а)  $t = -\pi/3 + 2\pi \cdot k$  и  $t = \pi/3 + 2\pi \cdot k$

б)  $-\pi/3 + 2\pi \cdot k < t < \pi/3 + 2\pi \cdot k$



# Синус и косинус.

## Пример

**Вычислить тангенс и котангенс  $t$  при:  $t = -7\pi/3$**

**Решение:**

*Т.к. числам  $t$  и  $t+2\pi \cdot k$  ( $k$ -целое число) соответствует одна и та же точка числовой окружности то:*

$$-7\pi/3 = -(2 + 1/3) \cdot \pi = -2\pi + (-\pi/3) = (-\pi/3) + 2\pi$$

*Вспользуемся свойством  $\text{tg}(x + \pi \cdot k) = \text{tg}(x)$ ,  $\text{ctg}(x + \pi \cdot k) = \text{ctg}(x)$*

$$\text{tg}((-\pi/3) + 2\pi) = \text{tg}(-\pi/3)$$

$$\text{ctg}((-\pi/3) + 2\pi) = \text{ctg}(-\pi/3)$$

*Вспользуемся свойством  $\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)$ ,  $\text{ctg}(-x) = -\text{ctg}(x)$*

$$\text{tg}(-\pi/3) = -\text{tg}(\pi/3)$$

$$\text{ctg}(-\pi/3) = -\text{ctg}(\pi/3)$$

**Из таблицы значений получаем:**

$$\text{tg}(-7\pi/3) = -\text{tg}(\pi/3) = -\sqrt{3}$$

$$\text{ctg}(-7\pi/3) = -\text{ctg}(\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

# Синус и косинус.

Задачи для самостоятельного решения.

- 1) **Вычислить синус и косинус  $t$  при:  $t=61\pi/6$ ,  $t= -52\pi/3$**
- 2) **Решить уравнение а)  $\sin(t)= -1/2$ , б)  $\sin(t) > -1/2$  в)  $\sin(t) < -1/2$**
- 3) **Решить уравнение а)  $\cos(t) = -1/2$ , б)  $\cos(t) > -1/2$ , в)  $\cos(t) < 1/2$ ,**
- 4) **Вычислить тангенс и котангенс  $t$  при: а)  $t= 19\pi/6$  б)  $t= 41\pi/4$**