Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Г.В. Аверкова
Курс «Высшая математика»

# Тема 2 «Скалярные и векторные величины»

Линейные операции над векторами, угол между векторами, проекция вектора на ось, разложение вектора на составляющие по осям координат, направляющие косинусы вектора, условие коллинеарности двух векторов. Скалярное произведение двух векторов. Условие перпендикулярности векторов, скалярный квадрат вектора, длина вектора.

# Цели и задачи

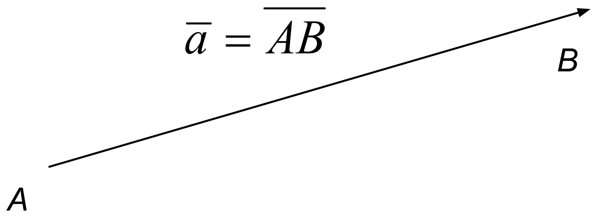
- Цели:
  – Рассмотреть основные понятия по теме «Скалярные и векторные величины»
- Задачи:
  – Ввести геометрическое определение вектора и рассмотреть действия над векторами и их свойства
  – Определить координаты вектора через геометрические проекции вектора на координатные оси
  – Установить взаимосвязь между действиями над векторами и координатной формой векторов

# Теоретический материал

Направленный отрезок, на котором заданы начало, конец и направление, называется вектором.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется нулевым вектором, или нуль-вектором.

$$\overline{a} = \overline{AB}$$




Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной (или модулем).

$$\left|\overline{a}\right| = \left|\overline{AB}\right|$$

# Теоретический материал

Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Нулевой вектор считается коллинеарным с любым вектором.

Векторы называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и их длины равны.

Два противоположно направленных вектора равной длины называются противоположными. Причем, для них выполняется:

1) $\left|\overline{a}\right| = \left|-\overline{a}\right|,$

2) $-(-\overline{a}) = \overline{a}$

# Теоретический материал

## Линейные операции над векторами

### Сложение векторов

Суммой двух векторов называется вектор, построенный по правилу треугольника или по правилу параллелограмма.

### Умножение вектора на число

Произведением вектора $\bar{a}$ на число *k* называется вектор $\bar{b} = k\bar{a}$, имеющий длину $|\bar{b}| = |k| \cdot |\bar{a}|$, направление которого
1) совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $k>0$,
2) противоположно направлению вектора $\bar{a}$, если $k<0$,
3) произвольно, если $k=0$.

# Теоретический материал

## Основные свойства линейных операций над векторами

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$

2) $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$

3) $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$

4) $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$

5) $k\cdot\overline{a}=\overline{a}\cdot k$

6) $(k+l)\cdot\overline{a}=k\overline{a}+l\overline{a}$

7) $(kl)\cdot\overline{a}=k(l\overline{a})$

8) $k(\overline{a}+\overline{b})=k\overline{a}+k\overline{b}$

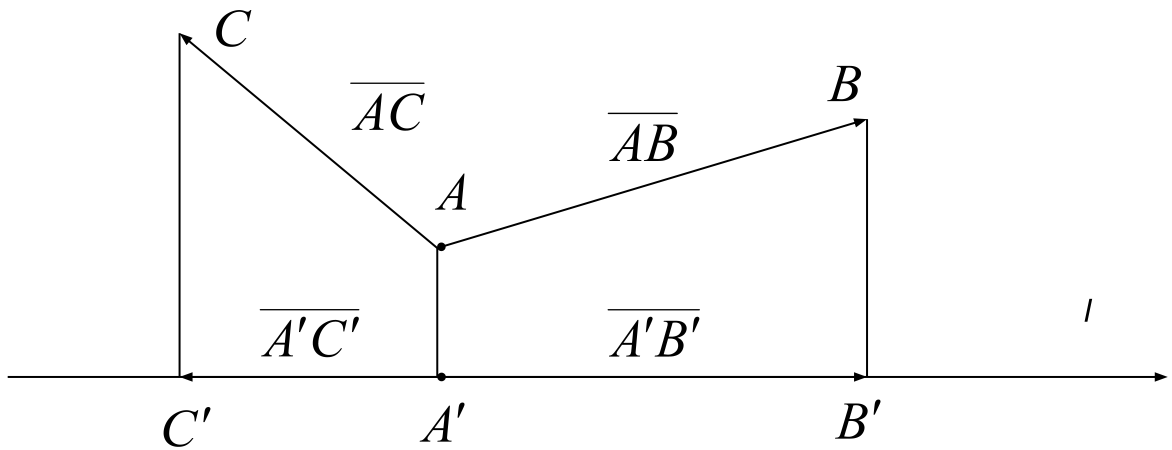
9) $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$

10) $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$

# Теоретический материал

## Проекция вектора на ось

Проекцией точки *A* на ось *l* называется основание перпендикуляра, опущенного из точки *A* на ось *l*.




$$np_l \overline{AB} = \left|\overline{A'B'}\right|, \qquad np_l \overline{AC} = -\left|\overline{A'C'}\right|$$

В качестве оси можно рассматривать некоторый вектор

$$np_{\bar{b}} \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos(\bar{a} \hat{,} \bar{b})$$

## Координаты вектора

Координатами вектора в пространстве называются его проекции на координатные оси и записываются в виде

$$\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\},$$

где $a_x = пр_x \overline{a}, \quad a_y = пр_y \overline{a}, \quad a_z = пр_z \overline{a}.$

Базисными, или основными, называются векторы:

$$\overline{i} = \{1,0,0\}, \qquad \overline{j} = \{0,1,0\}, \qquad \overline{k} = \{0,0,1\}.$$

Любой вектор можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}.$$

# Теоретический материал

## Векторы в координатной форме

Если заданы векторы в координатной форме, то имеют место формулы:

1) Длина вектора $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

2) Сумма векторов $\overline{a} + \overline{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$

3) Произведение вектора на число $k\overline{a} = \{ka_x, ka_y, ka_z\}$

4) Если заданы координаты начала *A* и конца *B* вектора, то $\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$

5) Условие коллинеарности двух векторов $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$



ВГУЭС

# Теоретический материал

Направляющие косинусы вектора

$$\overline{n} = \{A, B, C\}$$

определяются формулами:

,

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

,

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

# Теоретический материал

## Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$\overline{a}\overline{b} = (\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos(\overline{a}, \hat{\ } \overline{b})$$

Если заданы координаты векторов, то их скалярное произведение равно сумме попарных произведений соответствующих координат

$$\overline{a}\overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Косинус угла между векторами определяется формулой

$$\cos(\overline{a}, \hat{\ } \overline{b}) = \frac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

# Теоретический материал

## Свойства скалярного произведения двух векторов

1) $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$

2) $(k\bar{a})\bar{b} = k(\bar{a}\bar{b}) = \bar{a}(k\bar{b})$

3) $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$

4) $\bar{a}\bar{b} = |\bar{b}| np_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}| np_{\bar{a}}\bar{b}$, откуда $np_{\bar{b}}\bar{a} = \dfrac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{b}|}$

5) $\bar{a}^2 = \bar{a}\bar{a} = |\bar{a}|^2$, откуда $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$

6) Условие перпендикулярности двух векторов.

Два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

# Ключевые понятия

- Вектор
- Проекция вектора на ось
- Коллинеарность векторов
- Сложение векторов
- Координаты вектора
- Скалярное произведение
- Угол между векторами
- Умножение вектора на число

# Контрольные вопросы

- Определение вектора. Длина вектора
- Проекция вектора на ось
- Коллинеарные векторы. Условие коллинеарности
- Сложение векторов и свойства
- Координаты вектора. Разложение вектора по базисным векторам
- Скалярное произведение и свойства
- Угол между векторами
- Умножение вектора на число и свойства

# Дополнительная литература