

*Сложная функция.
Производная сложной
функции.*





Рассмотрим функции

$$f(t) = \sin t \quad g(x) = x^2 - 2x + 5$$

$$y = \sin(x^2 - 2x + 5)$$

$$y = f(g(x))$$

**Внешняя
функция**

**Внутренняя
функция**



Примеры:

$$1) y = (2x + 1)^6$$

Внешняя функция $f = t^6$

Внутренняя функция $t = 2x + 1$

$$2) y = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} = (\sin x)^{-2}$$

Внешняя функция $f = t^{-2}$

$$y = (\sin x)^{-2}$$

Внутренняя функция $t = \sin x$



$$3) y = \boxed{tg} \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

Внутренняя функция
 $t = 2x + \frac{\pi}{4}$

Внешняя функция $f = tgt$



Определить внутреннюю и внешнюю функции для данной сложной функции:

$$1) y = (4x + 1)^4$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 4x + 1 - \text{внутренняя функция} \\ f = t^4 - \text{внешняя функция} \end{array} \right.$$



Определить внутреннюю и внешнюю функцию для данной сложной функции:

$$2) y = \sin 2x$$

$t = 2x$ - **Внутренняя функция**

$f = \sin t$ - **Внешняя функция**



Определить внутреннюю и внешнюю функцию для данной сложной функции:

$$3) y = \frac{1}{(x+1)^3} \quad y = \left(\underbrace{x+1}_{\text{внутренняя}} \right)^{\boxed{-3}}_{\text{внешняя}}$$

$t = x + 1$ - **Внутренняя функция**

$f = t^{-3}$ - **Внешняя функция**



Определить внутреннюю и внешнюю функцию для данной сложной функции:

$$4) y = \cos^2 x \quad y = (\underbrace{\cos x}_{\text{внутренняя}})^{\overbrace{2}^{\text{внешняя}}}$$

$t = \cos x$ - **Внутренняя функция**

$f = t^2$ - **Внешняя функция**



Правило нахождения производной сложной функции

**Производная сложной функции равна
производной внешней функции
на производную внутренней функции**

$$1) y = \boxed{\cos} 4x$$

$$\begin{cases} t = 4x \\ f = \cos t \end{cases}$$

$$\boxed{y' = f' \cdot t'}$$

$$\begin{aligned} y' &= (\cos t)' \cdot (4x)' = -\sin t \cdot 4 = -4 \sin t = \\ &= 4 \sin 4x \end{aligned}$$



$$2) y = \boxed{ctg} \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\begin{cases} t = 2x + \frac{\pi}{3} \\ f = ctgt \end{cases}$$

$$\boxed{y' = f' \cdot t'}$$

$$\begin{aligned} y' &= (ctgt)' \cdot \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)' = -\frac{1}{\sin^2 t} \cdot 2 = -\frac{2}{\sin^2 t} = \\ &= -\frac{2}{\sin^2 \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)} \end{aligned}$$



$$3) y = \sin^2 x \quad y = (\underbrace{\sin x}_{f})^{\boxed{2}}$$

$$\begin{cases} t = \sin x \\ f = t^2 \end{cases}$$

$$\boxed{y' = f' \cdot t'}$$

$$\begin{aligned} y' &= (t^2)' \cdot (\sin x)' = 2t \cdot \cos x = \\ &= \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} = \sin 2x \end{aligned}$$



$$4) y = (x^2 + 2x)^4$$

$$\begin{cases} t = x^2 + 2x \\ f = t^4 \end{cases}$$

$$y' = f' \cdot t'$$

$$\begin{aligned} y' &= (t^4)' \cdot (x^2 + 2x)' = 4t^3 \cdot (2x + 2) = 8t^3 \cdot (x + 1) = \\ &= 8(x + 1) \cdot (x^2 + 2x)^3 \end{aligned}$$



Найти производные функций:

$$1) y = (1 - 4x)^2$$

$$2) y = \frac{1}{3x + 2}$$

$$3) y = \cos 3x$$

$$4) y = \operatorname{ctg}(4x - 3)$$

$$1) y' = -8(1 - 4x)$$

$$2) y' = -\frac{3}{(3x + 2)^2}$$

$$3) y' = -3 \sin 3x$$

$$4) y' = -\frac{4}{\sin^2(4x - 3)}$$



Решить уравнение $y' = 0$

$$1) y = \boxed{\cos} 2x + x - 1$$

$$y' = (\cos 2x + x - 1)' = (\cos 2x)' + (x)' - 1' =$$

$$\begin{cases} t = 2x \\ f = \cos t \end{cases}$$

$$= (\cos t)' \cdot (2x)' + 1 - 0 = -\sin t \cdot 2 + 1 =$$

$$= -2 \sin t + 1 = -2 \sin 2x + 1$$



$$-2 \sin 2x + 1 = 0$$

$$-2 \sin 2x = -1$$

$$2 \sin 2x = 1$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\sin t = a$$

$$t = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = (-1)^k \cdot \arcsin \frac{1}{2} + \pi k$$

$$2x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



$$2) y = \sin 4x - 2x + 3$$

$$y' = 0$$

$$y' = (\sin 4x - 2x + 3)' = (\sin 4x)' - (2x)' + 3' =$$

$$\begin{cases} t = 4x \\ f = \sin t \end{cases}$$

$$= (\sin t)' \cdot (4x)' - 2 + 0 = \cos t \cdot 4 - 2 = 4 \cos t - 2 =$$

$$= 4 \cos 4x - 2$$

$$4 \cos 4x - 2 = 0$$

$$\cos 4x = \frac{1}{2}$$



$$\cos 4x = \frac{1}{2}$$

$$\cos t = a$$

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$4x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n,$$

$$4x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \quad x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$



$$3) y = \sin \frac{x}{2} + \frac{x}{4}$$

$$y' = 0$$

$$y' = \left(\sin \frac{x}{2} + \frac{x}{4} \right)' = \left(\sin \frac{x}{2} \right)' + \left(\frac{x}{4} \right)' =$$

$$\begin{cases} t = \frac{x}{2}, \\ f = \sin t \end{cases}$$

$$= (\sin t)' \cdot \left(\frac{x}{2} \right)' + \frac{1}{4} \cdot (x)' =$$

$$= \cos t \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$



$$\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$$

$$\frac{x}{2} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad x = \pm \frac{4\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$$