



Сумма бесконечной геометрической прогрессии



Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию:

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$$

Будем последовательно вычислять суммы двух, трех и т. д. членов прогрессии. Получим:

$$S_1 = b_1;$$

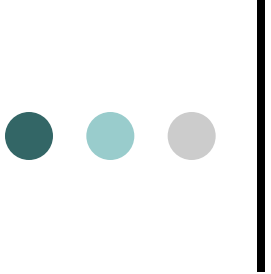
$$S_2 = b_1 + b_2;$$

$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3 ;$$

...

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n.$$

Получили последовательность $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$



Если последовательность S_n сходится к пределу S , то число S называют *суммой геометрической прогрессии*.

! Обратите внимание: называют не суммой n членов геометрической прогрессии, а суммой геометрической прогрессии.

Если же эта последовательность расходится, то о сумме n геометрической прогрессии не говорят, хотя о сумме членов - S_n можно, естественно, и в том случае.

Если знаменатель q геометрической прогрессии

(b_n) удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, то
сумма прогрессии вычисляется по формуле

$$S = \frac{b_1}{1 - q} .$$

Доказательство.

Как известно, сумма первых n членов геометрической прогрессии $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ может быть высчитана по формуле:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} .$$

Как ранее мы установили: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1 - q}$.

А так как $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ мы назвали суммой геометрической прогрессии, то формула доказана $S = \frac{b_1}{1 - q}$.



Пример.

Найти сумму геометрической прогрессии:

$$27, 9, 3, 1, \dots$$

Решение.

Имеем: $b_1 = 27$; $q = \frac{1}{3}$.

Так как знаменатель прогрессии $\frac{1}{3} < 1$, то можно

воспользоваться формулой, доказанной нами только что:

$$S = \frac{b_1}{1-q} \quad . \text{ Значит, } S = \frac{27}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{\frac{2}{3}} = \frac{27 \cdot 3}{2} = 40.5$$

Практические задания

1. Найдите сумму геометрической прогрессии:

a) $32, 16, 8, 4, 2, \dots$; б) $24, -8, \frac{8}{3}, -\frac{8}{9}, \dots$

2. Вычислите:

a) $125 + 25 + 5 + 1 + \dots$; б) $-6 + \frac{2}{3} - \frac{2}{27} + \frac{2}{243} - \dots$

3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n) , если:

a) $S = -\frac{9}{4}, b_1 = -3$; б) $S = 1.5, b_1 = 2$.

4. Найдите n член геометрической прогрессии (b_n) , если:

a) $S = 15, q = -\frac{1}{3}, n = 3$; б) $S = -20, q = -16, n = 4$.