МАСТЕР-КЛАСС

Элективный курс по математике, как один из важных инструментов реализации задач профильного обучения

Косолапова Л.В.,
учитель математики МОУ СОШ им. А.С. Попова городского округа Власиха Московской области

Тема элективного занятия:

«ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ АРКФУНКЦИИ»

ЦЕЛИ УРОКА:

1. Обобщить, систематизировать и углубить знания и умения учащихся по теме «Обратные тригонометрические функции. Решение уравнений, содержащих аркфункции».

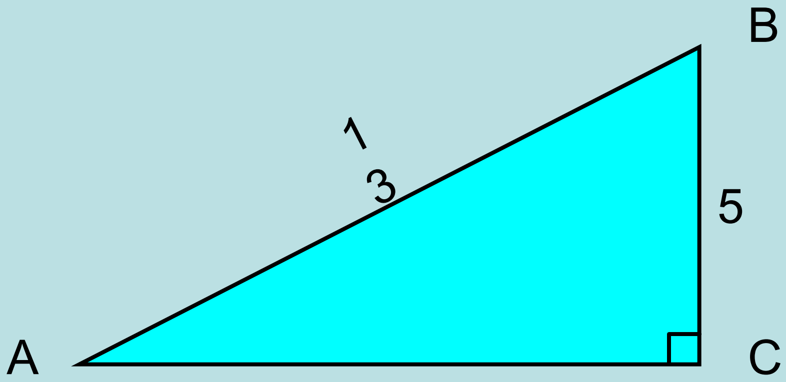
2. Прививать интерес к исследовательской деятельности и работе в группах.

3. Научить применять полученные на уроках знания в измененной ситуации, успешно справляться с задачами повышенной сложности и нестандартными задачами с целью подготовки к успешной сдаче ЕГЭ.

ПЛАН УРОКА

- **Исследовательская работа**
- **Устные упражнения**
- **Проверка домашнего задания**
- **Решение уравнений**
- **Работа в группах**
- **Подведение итогов**

Исследовательская работа



а) Найти: $\angle A$ и $\angle B$

Ответ: $\angle A = \arcsin\dfrac{5}{13}$

$\angle B = \arccos\dfrac{5}{13}$

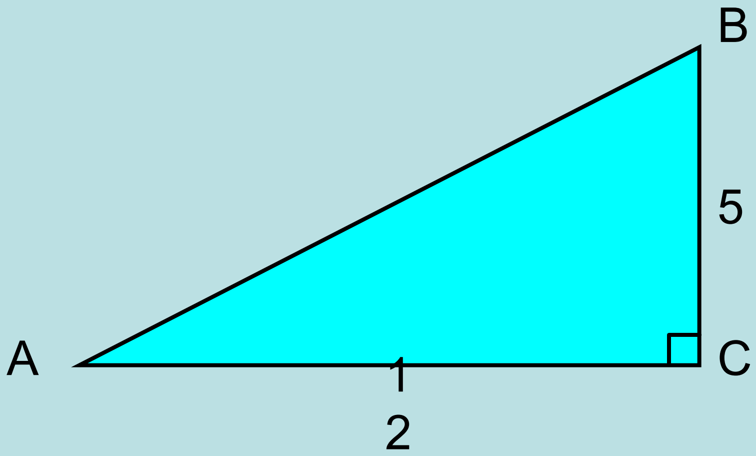
б) Вычислить: $\arcsin\dfrac{5}{13} + \arccos\dfrac{5}{13} = \dfrac{\pi}{2}$

Вывод:

При всех допустимых значениях x верно равенство:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Исследовательская работа



в) Найти: ∠ A и ∠ B

Ответ:

∠ A = $arctg\,\frac{5}{12} = arcctg\,\frac{12}{5}$

∠ B = $arcctg\,\frac{5}{12} = arctg\,\frac{12}{5}$

г) Вычислить:

$$arctg\,\frac{5}{12} + arcctg\,\frac{5}{12} = \frac{\pi}{2}$$

Вывод: $arctg\,x + arcctg\,x = \frac{\pi}{2}$

$$arctg\,\frac{a}{b} = arcctg\,\frac{b}{a}$$

Устные упражнения

1. Найдите значение выражения:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Решение:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}=-\frac{13\pi}{12}$$

Устные упражнения

2. Укажите область определения функции:

$$y = \arcsin(2x - 5)$$

Решение:

$$D(y):\quad -1 \le 2x - 5 \le 1;\quad 4 \le 2x \le 6;\quad 2 \le x \le 3$$

$$D(y) = [2;3]$$

Устные упражнения

3. Укажите область значений функции:

$$y = \frac{\pi}{3} - 2\arccos x$$

Решение:

$$E(y):\quad 0 \le \arccos x \le \pi;\quad -2\pi \le -2\arccos x \le 0;$$

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi \le \frac{\pi}{3} - 2\arccos x \le \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{5\pi}{3} \le \frac{\pi}{3} - 2\arccos x \le \frac{\pi}{3}$$

$$E(y) = \left[-\frac{5\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$$

Устные упражнения

4. Найдите значение выражения:

$$\arcsin 0{,}3 + \arccos 0{,}3$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}$

Устные упражнения

5. Известно, что $\arcsin x = \frac{\pi}{8}$. Найдите $\arccos x$.

Решение:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$$

Устные упражнения

6. **Известно, что $\sin(\arcsin x) = -\frac{1}{3}$. Найдите x.**

Решение: Пусть $\arcsin x = \varphi$,

тогда $\sin\varphi = x$.

Но $\sin\varphi = -\frac{1}{3}$.

Значит $x = -\frac{1}{3}$

Устные упражнения

7. Известно, что $\arccos x = \frac{\pi}{5}$. Найдите $\arccos(-x)$.

Решение:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$$

Устные упражнения

8*. Вычислите $\mathrm{ctg}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{2}{3}\right)$

Решение:

$$ctg\left(arctg\,\frac{2}{3}\right)=ctg\left(arcctg\,\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}=1{,}5$$

Проверка домашнего задания

Решим уравнение

$$\arcsin\left(x^2 - x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2-x} + \arccos\frac{4y}{\pi} + \operatorname{tg}^2(z + x - 1)\right) + \sqrt{2x^2 - x - 1} =$$

$$= \sqrt{x - x^2} + \operatorname{arctg}(2 - x)$$

Решение.

Методы решения уравнения нестандартные. Найти область допустимых значений уравнения трудно. Если уравнение имеет решение, то решениями являются тройки чисел (x_0, y_0, z_0) и, в частности, определены выражения:

$$\sqrt{2x^2 - x - 1} \quad \text{и} \quad \sqrt{x - x^2},$$

т.е. справедлива система неравенств:

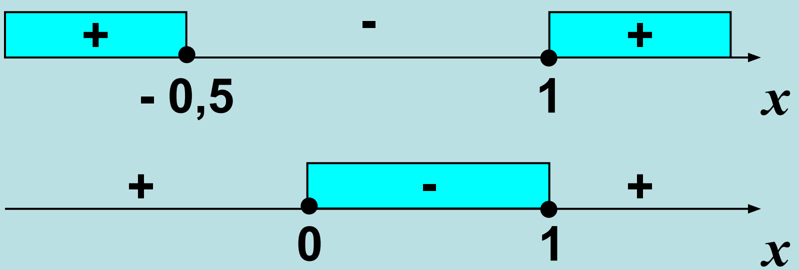
$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \geq 0 \\ x - x^2 \geq 0 \end{cases}$$

Проверка домашнего задания

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \geq 0 \\ x^2 - x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\left(x-1\right)\left(x+0{,}5\right) \geq 0 \\ x\left(x-1\right) \leq 0 \end{cases}$$



$x = 1$ **- единственное решение системы.**

Подставим $x = 1$ **в исходное уравнение. Получим уравнение:**

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos\frac{4y}{\pi} + tg^2 z\right) = arctg\, 1$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos\frac{4y}{\pi} + tg^2 z\right) = \frac{\pi}{4}$$

Проверка домашнего задания

Т.к. $\arcsin a = \dfrac{\pi}{4}$ **только для** $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **, то**

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos\frac{4y}{\pi} + tg^2 z = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\arccos\frac{4y}{\pi} + tg^2 z = 0$$

Оценим каждое слагаемое левой части уравнения.

По определению арккосинуса $0 \le \arccos\dfrac{4y}{\pi} \le \pi$ **.**

$tg^2 z \ge 0$ **при всех допустимых значениях** z**.**

Значит, оба слагаемые неотрицательны. Сумма двух неотрицательных слагаемых равна нулю, если каждое из них равно нулю, т.е.

Проверка домашнего задания

$$\arccos\frac{4y}{\pi} = 0 \qquad\qquad tg^2 z = 0$$

$$\frac{4y}{\pi} = \cos 0 \qquad\qquad tg = 0$$

$$\frac{4y}{\pi} = 1 \qquad\qquad z = \pi n, n \in Z$$

$$y = \frac{\pi}{4}$$

Итак, если исходное уравнение имеет решение, то все они содержатся среди троек чисел

$$\left(1; \quad \frac{\pi}{4}; \quad \pi n\right), \quad n \in Z$$

Проверка домашнего задания

Проверка показывает, что каждая такая тройка удовлетворяет исходному уравнению, а значит, является решением этого уравнения.

Ответ: $\left(1;\quad \frac{\pi}{4};\quad \pi n\right),\quad n \in Z$

Повторение

Уравнения, способ решения которых предполагает использование свойств аркфункций

Решить уравнение:

$$\operatorname{arcctg}(x^2 - 5x + 8) = -\frac{2}{3};$$

$$\arcsin(1 - x) = \arccos(1 + x);$$

$$3\arcsin x + \pi x - \pi = 0.$$

Решение любого уравнения полезно начинать с анализа его области определения. Если эта область пуста или состоит из конечного числа элементов (и это число невелико), то вывод о множестве корней уравнения сделать нетрудно. Также иногда бывает целесообразно оценивать множества значений левой и правой частей уравнения.

Ни один из описанных приемов не дает возможности решить четвертое уравнение. Если записать это уравнение в виде

$$3 \arcsin x = \pi - \pi x,$$

то к полученному уравнению удобно применить один из общих приемов решения уравнений, в основе которого лежит утверждение: если $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции и $f(x)$ — возрастающая, $g(x)$ — убывающая или постоянная, то их графики пересекаются не более чем в одной точке.

Имеем: $f(x) = 3 \arcsin x$ — возрастающая функция, $g(x) = \pi - \pi x$ — убывающая. Обе функции непрерывны. Значит, если уравнение имеет корень, то ровно один. Этот корень $\left(x = \dfrac{1}{2}\right)$ нетрудно найти.

Итак, при решении уравнений, содержащих аркфункции, используются общие приемы решения уравнений. Они связаны с установлением области определения уравнения, оценкой множеств значений выражений в левой и правой частях уравнения, исследованием функций на монотонность.

Работа в группах

Уравнения, содержащие аркфункции, разделяют на виды по способу их решения:

- уравнения, способ решения которых предполагает использование свойств аркфункций;
- простейшие уравнения;
- уравнения, сводящиеся к алгебраическим относительно аркфункции;
- уравнения, способ решения которых состоит в действии тригонометрической функции на обе части уравнения.

Работа в группах. Решить уравнения

1) $2\arcsin \tilde{o} + \arccos \tilde{o} = 4$

2) $\arcsin(2\tilde{o}) + \operatorname{arctg} \dfrac{3x}{x^2 - 5x + 6} = \pi$

3) $\arccos(\tilde{o} - 2) = 2\operatorname{arctg}(\tilde{o} - 1)$

4) $2(\arcsin \tilde{o})^2 - \arcsin \tilde{o} = 6$

5) $\sin(\arcsin(4\tilde{o} - 1)) = 3x^2$

6) $2\operatorname{arctg}(2\tilde{o} - 3) = \pi$

7) $\arccos(\tilde{o}^2 - x) = \arccos(2\tilde{o} - 2)$

8) Âû÷èñëèòü : $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right) + \arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

Ответы к работе в группах

1. Корней нет
2. Корней нет
3. 2
4. - $\sin 1{,}5$
5. 1/3
6. 1,5
7. 1
8. -7

Итоги урока

Результаты групповой работы:

I место – команда Григорьевой Владиславы
II место – команда Горяйновой Виктории
III место – команда Гридасова Виктора

Ребята получили поздравления и поощрительные призы с пожеланиями дальнейших успехов в учебе.