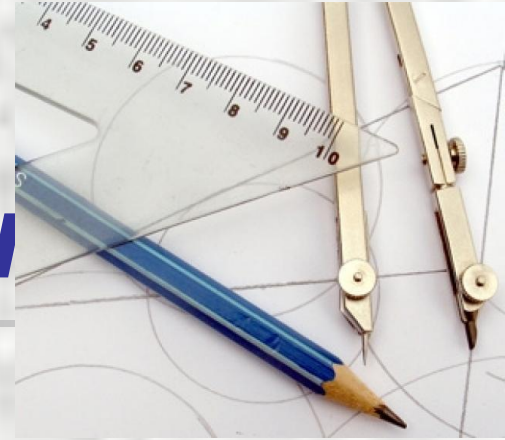




***Теорема Менелая и
теорема Чебы
в школьном курсе
математики***



***«Все незначительное нужно,
Чтобы значительному быть...»
И. Северянин***

Содержание

Теоретические основы

- Теорема Чевы
- Теорема Менелая

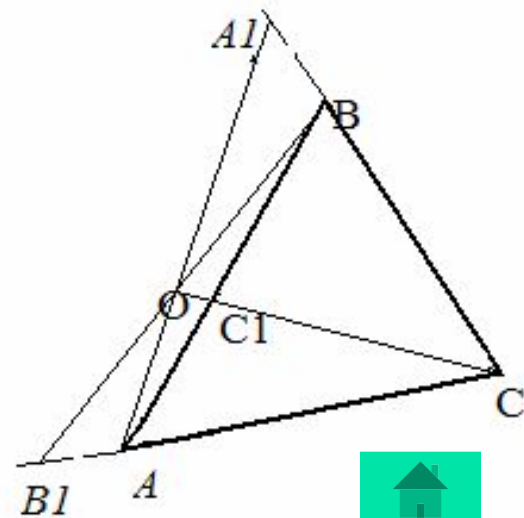
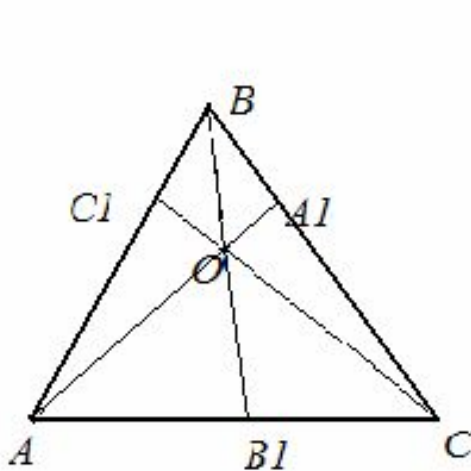
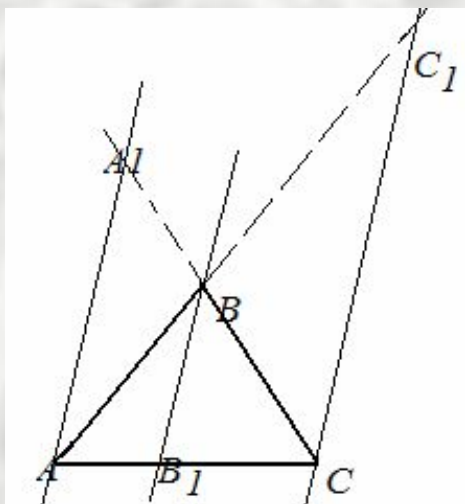
Методические рекомендации

- Методика обучения решению задач в период предпрофильной подготовки
- Изучение темы «Теорема Менелая и теорема Чевы» в курсе геометрии 10 класса Изучение темы «Теорема Менелая и теорема Чевы» в курсе геометрии 10 класса
- Изучение темы «Теорема Менелая и теорема Чевы» в курсе геометрии 10 класса

Теорема Чебы

- Пусть в $\triangle ABC$ на сторонах BC, AC, AB или их продолжениях взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 , не совпадающие с вершинами треугольника. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда выполняется равенство

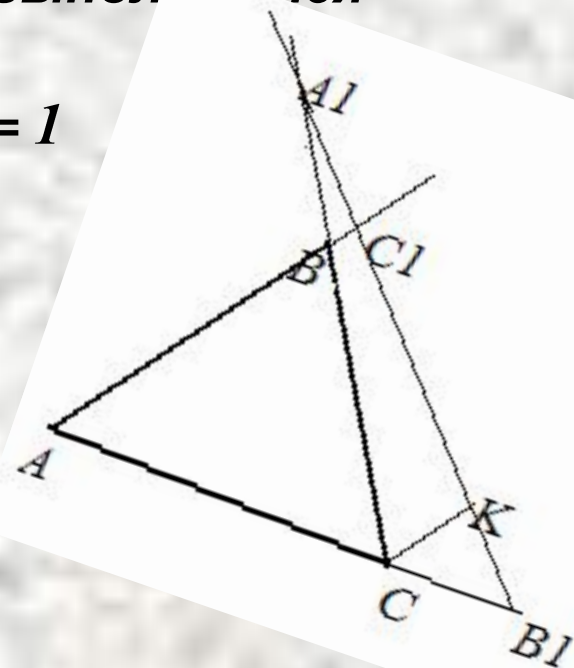
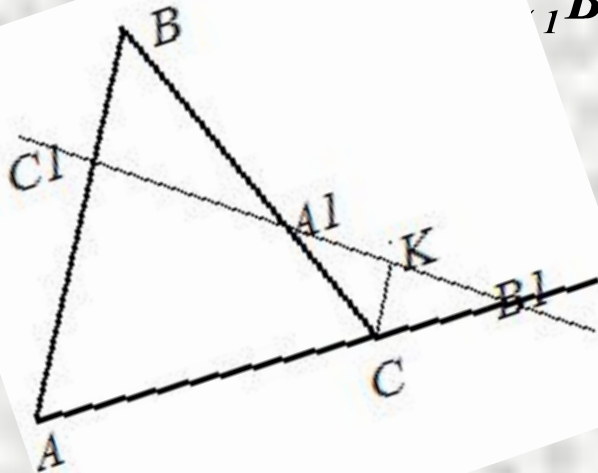
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$



Теорема Менелая

Пусть на сторонах AB , BC и на продолжении стороны AC (либо на продолжениях сторон AB, BC и AC) $\triangle ABC$ взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 , не совпадающие с вершинами $\triangle ABC$. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$



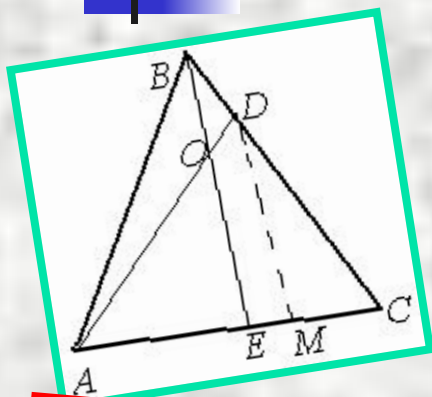


Методика обучения решению задач в период предпрофильной подготовки

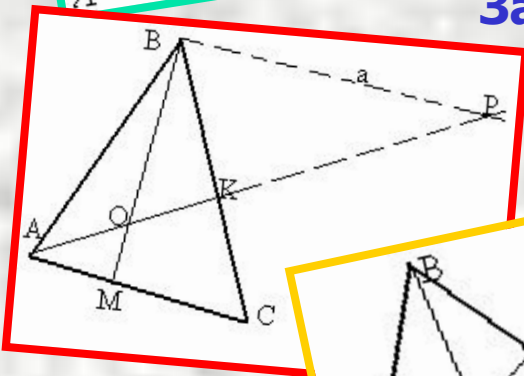
- 1. Теорема Менелая и пропорциональные отрезки в треугольнике.
- 2. Теорема Чебы и ее следствия.
Применение теорем Чебы и Менелая к задачам на доказательство.
- 3. Решение задач на пропорциональное деление отрезков в треугольнике.
- 4. Решение задач, связанных с нахождением площадей.
- 5. Комбинированные задачи.



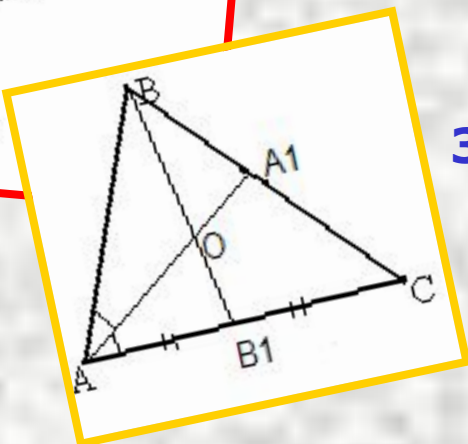
Теорема Менелая и пропорциональные отрезки в треугольнике



Задача 1. В треугольнике ABC точка D делит сторону BC в отношении $BD:DC=1:3$, а точка O делит AD в отношении $AO:OD=5:2$. В каком отношении прямая BO делит отрезок AC?



Задача 2. В $\triangle ABC$ на стороне AC взята точка M, а на стороне BC – точка K так, что $AM:MC=2:3$, $BK:KC=4:3$. В каком отношении AK делит отрезок BM?

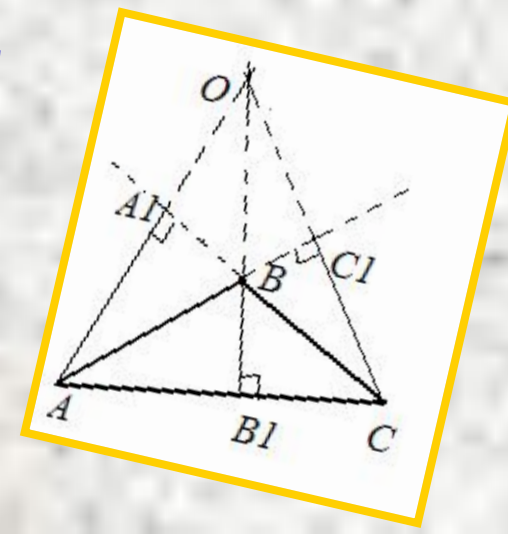
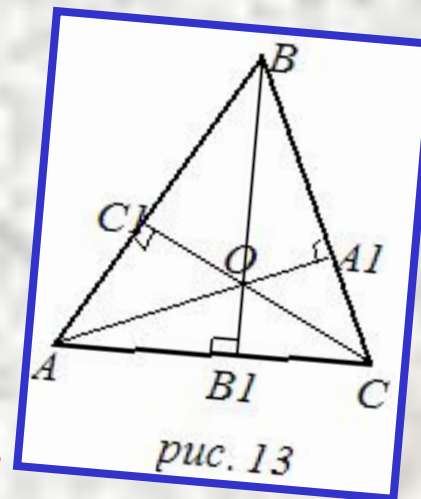
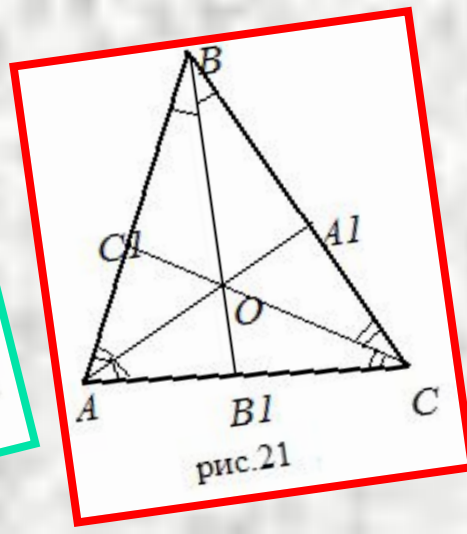
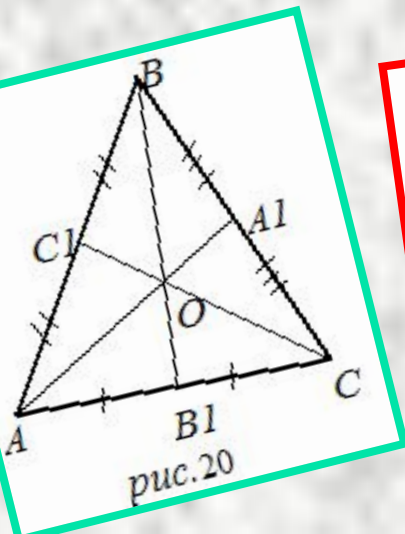


Задача 3. В $\triangle ABC$ AA_1 – биссектриса, BB_1 – медиана; $AB=2$, $AC=3$;
Найти $BO:OB_1$



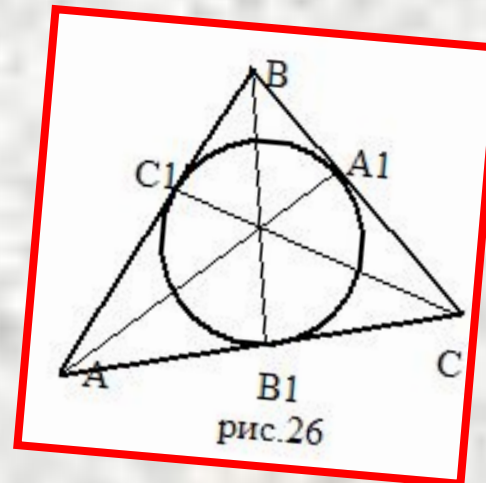
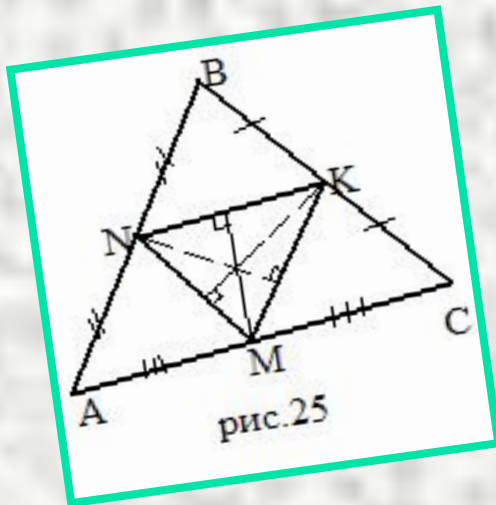
Теорема Чебы и ее следствия.

- **Следствие 1.** Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.
- **Следствие 2.** Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
- **Следствие 3.** Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

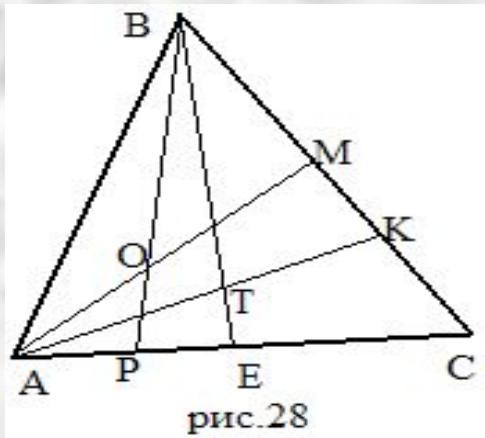
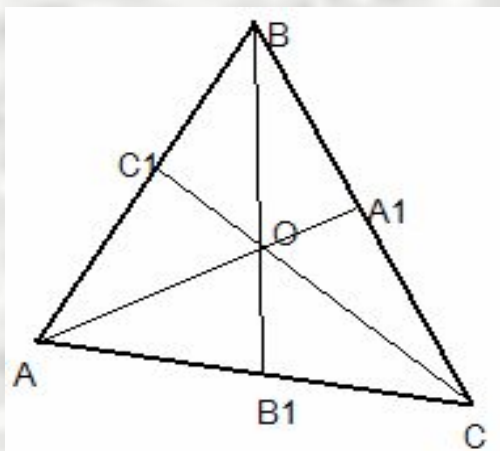


Теорема Чебы и ее следствия.

- **Следствие 4.** Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.
- **Следствие 5.** Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон, пересекаются в одной точке.



Применение теорем Чебы и Менелая к задачам на доказательство



- **Задача 1.** Используя теорему Чебы, доказать, что в произвольном треугольнике прямые, проходящие через вершины и делящие периметр треугольника пополам, пересекаются в одной точке.
- **Задача 2.** На стороне AC треугольника ABC взяты точки P и E, на стороне BC – точки M и K, причем $AP:PE:EC = CK:KM:MB$. Отрезки AM и BP пересекаются в точке O, отрезки AK и BE – в точке T. Докажите, что точки O, T и C лежат на одной прямой.



Задачи на пропорциональное деление отрезков в треугольнике.

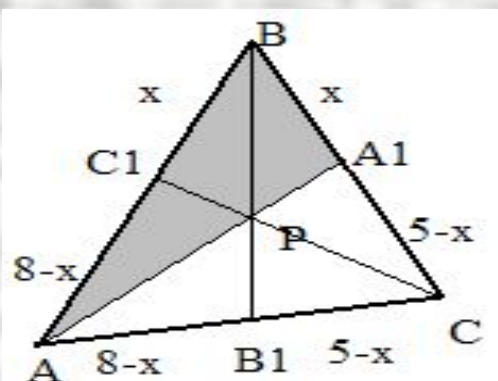
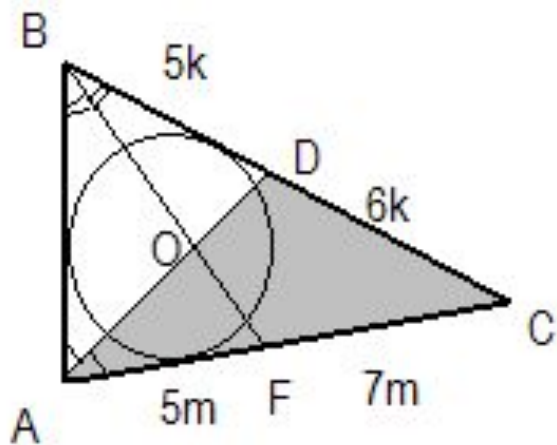


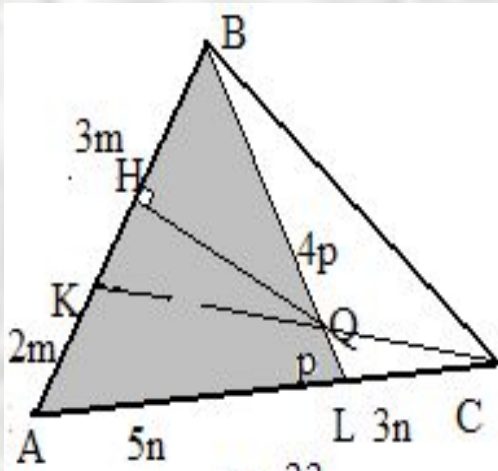
рис.30

- Задача 1.** В треугольнике ABC, описанном около окружности, $AB = 8$, $BC = 5$, $AC = 4$. Точки A_1, B_1 и C_1 - точки касания, принадлежащие соответственно сторонам BC, AC и BA . Точка P - точка пересечения отрезков AA_1 и CC_1 . Найдите $AP:PA_1$.

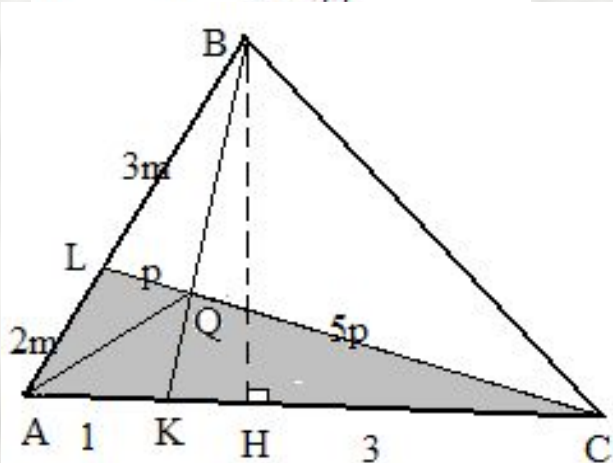


- Задача 2.** Стороны треугольника 5, 6 и 7. Найдите отношение отрезков, на которые биссектриса большего угла этого треугольника разделена центром окружности, вписанной в треугольник.

Задачи на пропорциональное деление отрезков в треугольнике.



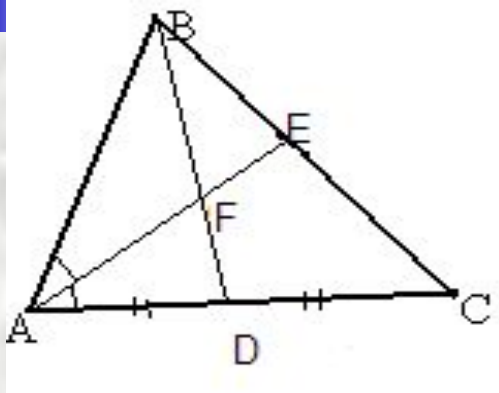
- Задача 3.** В треугольнике ABC , площадь которого равна 6, на стороне AB взята точка K , делящая эту сторону в отношении $AK:KB = 2:3$, а на стороне AC – точка L , делящая AC в отношении $AL:LC = 5:3$. Точка Q пересечения прямых CK и BL удалена от прямой AB на расстояние 1,5. Найдите длину стороны AB .



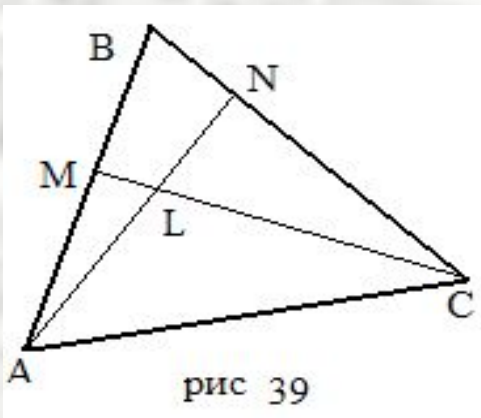
- Задача 4.** На стороне AC в треугольнике ABC взята точка K . $AK=1$, $KC = 3$. На стороне AB взята точка L . $AL:LB=2:3$. Q – точка пересечения прямых BK и CL . $S = 1$. Найдите длину высоты треугольника ABC , опущенной из вершины B .



Задачи, связанные с нахождением площадей



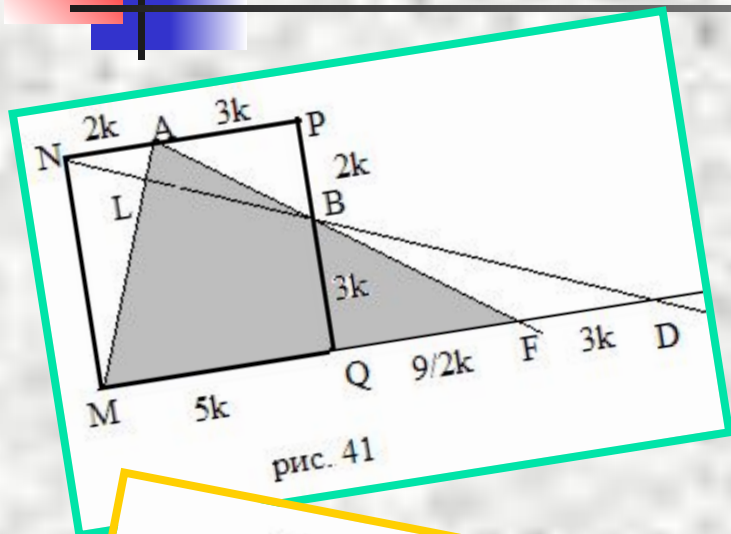
- **Задача 1.** Медиана BD и биссектриса AE треугольника ABC пересекаются в точке F . Найти площадь треугольника ABC , если $AF=3FE$, $BD=4$, $AE=6$.



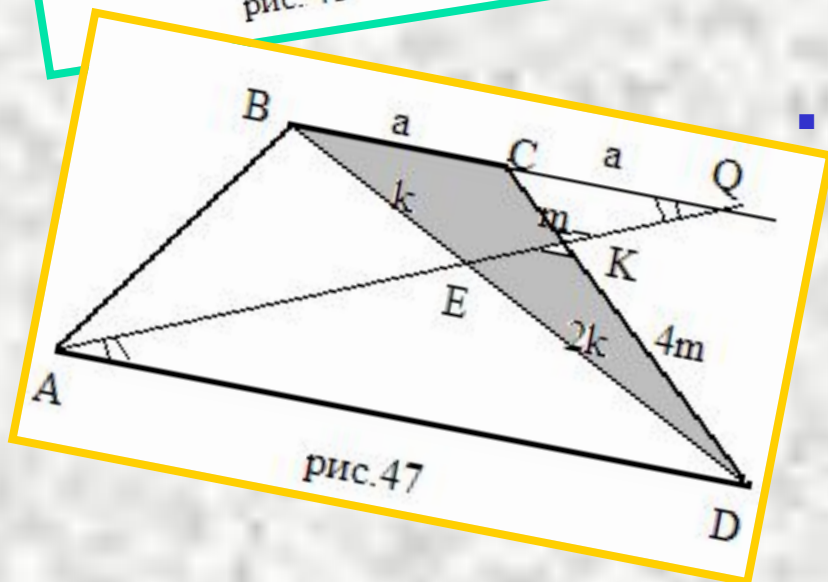
- **Задача 2.** На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке L . Площади треугольников AML , CNL и ALC равны соответственно 15 , 48 и 40 . Найти площадь треугольника ABC .



Комбинированные задачи.



- Задача 1.** На стороне NP квадрата $MNPQ$ взята точка A , а на стороне PQ – точка B так, что $NA:AP = PB:BQ = 2:3$. Точка L является точкой пересечения отрезков MA и NB . В каком отношении точка L делит отрезок MA ?



- Задача 2.** В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через точку A проведена прямая, которая пересекает диагональ BD в точке E и боковую сторону CD в точке K , причем $BE:ED = 1:2$, $CK:KD = 1:4$. Найдите отношение длин оснований трапеции.



Изучение темы «Теорема Менелая и теорема Чевы» в курсе геометрии 10 класса

Урок 1. Теорема Менелая и теорема Чевы.

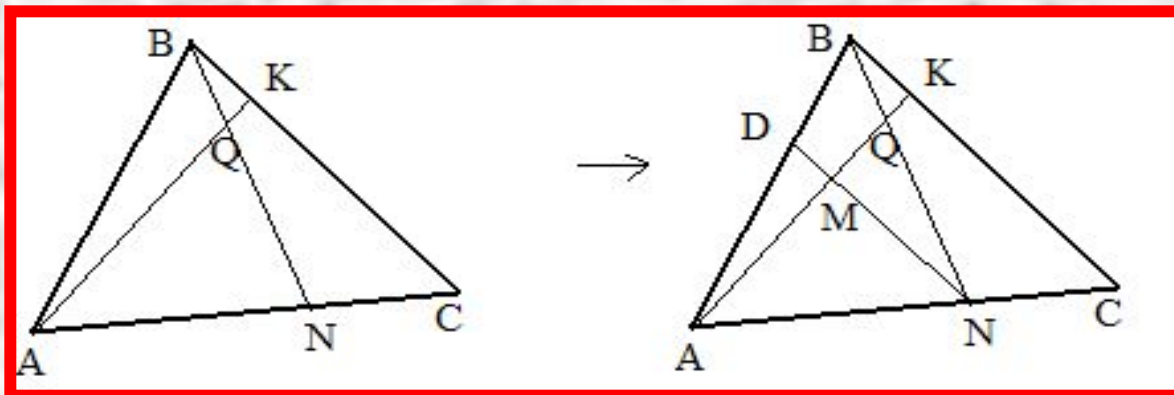
Задача. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка N так, что $AN:NC=m:n$, на стороне BC- точка K. BN пересекает AK в точке Q, $BQ : QN= r:q$. Найти отношение площадей треугольников AKC и ABK.

$$S_{AKC} : S_{ABK} = KC : BK$$

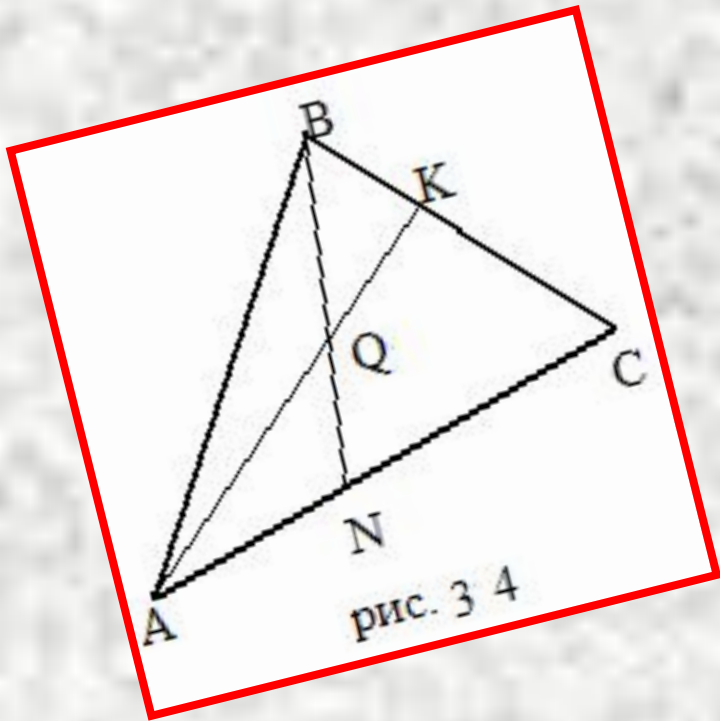
(т.к. высоты
равны)

I способ.
ND // BC.

Дополнительное построение:



II способ. Рассмотрим треугольник BСN и секущую АК. По теореме Менелая



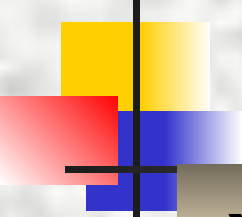
$$\frac{CK}{KB} \cdot \frac{BQ}{QN} \cdot \frac{NA}{AC} = 1; \frac{CK}{KB} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{m+n} = 1$$



$$\frac{CK}{KB} = \frac{(m+n)q}{mp}$$



$$S_{AKC} : S_{ABK} = \frac{CK}{KB} = \frac{(m+n)q}{mp}.$$

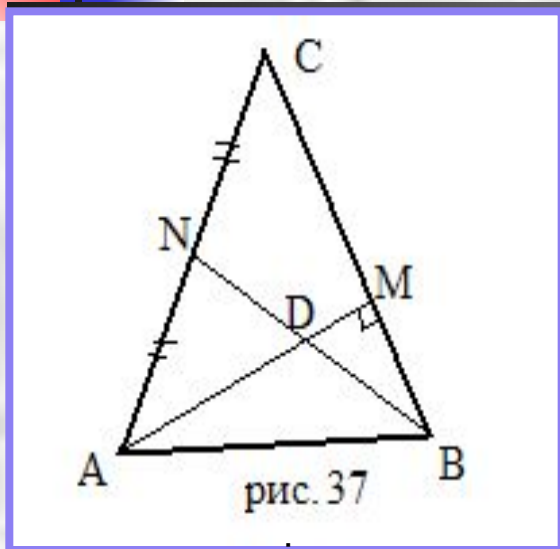


Изучение темы «Теорема Менелая и теорема Чебы» в курсе геометрии 10 класса

Урок 2. Применение теорем Менелая и Чебы в решении ключевых задач

- Цели урока:**
- 1) формировать умения:
 - видеть конфигурации, удовлетворяющие заданным условиям;
 - решать задачи нестандартными способами;
 - использовать теоремы в задачах на доказательство;
 - 2) развивать самостоятельность.

Задача. В равнобедренном треугольнике ABC (AC=BC) проведены медиана BN и высота AM, которые пересекаются в точке D. AD=5, DM=2. Найти S_{ABC}



Решение: AN=NC, AM=5+2=7.
Рассмотрим $\triangle AMC$ и секущую NB. По теореме Менелая

$$\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CB}{BM} \cdot \frac{MD}{DA} = 1 \Rightarrow 1 \cdot \frac{CB}{BM} \cdot \frac{2}{5} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{CB}{BM} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{CM}{BM} = \frac{3}{2}$$

Пусть коэффициент пропорциональности равен k, тогда CM=3k, BM=2k. Из $\triangle ACM$ -прямоугольного:

$$AC^2 = CM^2 + AM^2 \Rightarrow AC^2 = 9k^2 + 49 \quad AC = CB \Rightarrow AC = 5k \Rightarrow 25k^2 = 9k^2 + 49$$

$$k = \frac{7}{4} \Rightarrow CB = 5k = \frac{35}{4} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{4} \cdot 7 = \frac{245}{8}$$

Ответ: $\frac{245}{8}$



Применение теорем Менелая и Чебы в решении стереометрических задач.

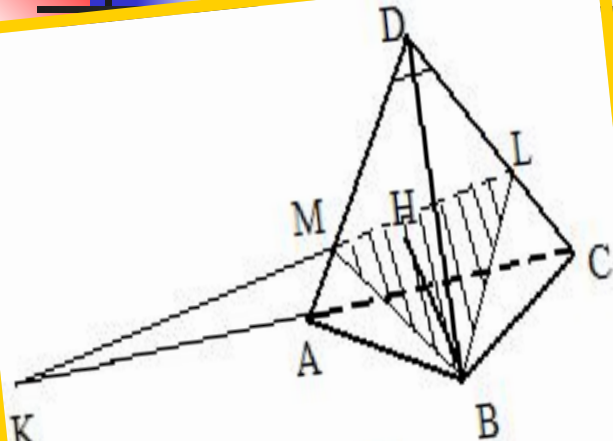


рис.48

- **Задача 1.** На продолжении ребра AC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ с вершиной D взята точка K так, что $KA:KC=3:4$, а на ребре DC взята точка L так, что $DL:LC=2:1$. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проходящая через точки B , L и K ?

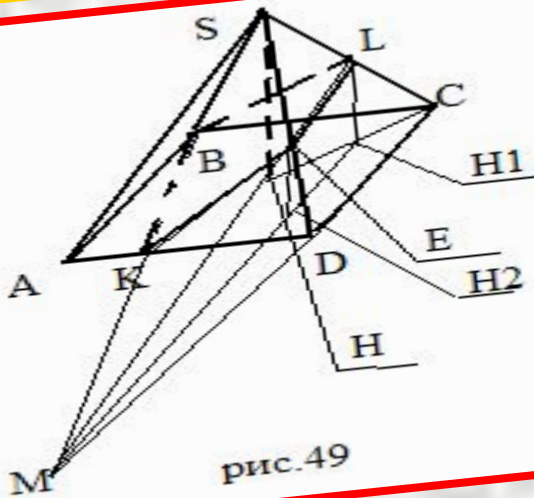
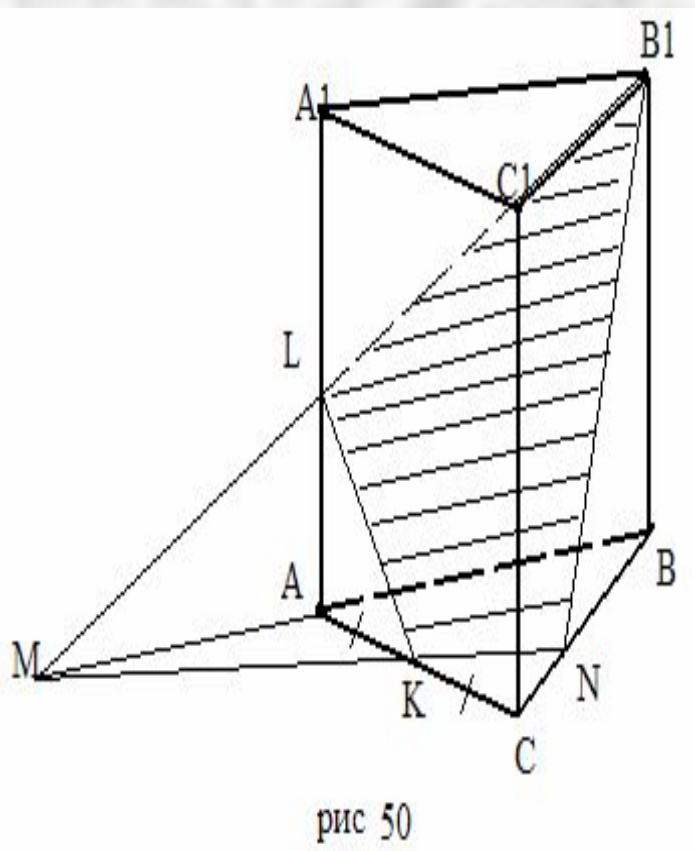


рис.49

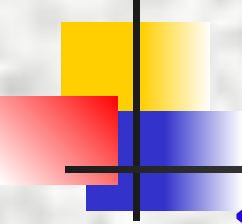
- **Задача 2.** Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . На продолжении ребра CD взята точка M так, что $DM=2CD$. Через точки M , B и середину ребра SC проведена плоскость. В каком отношении она делит объем пирамиды?

Применение теорем Менелая и Чебы в решении стереометрических задач.



- **Задача 3.** Дана правильная треугольная призма с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1 . Причем на продолжении ребра BA взята точка M так, что $MA=AB$. Через точки M, V_1 и середину ребра AC проведена плоскость. В каком отношении она делит объем призмы?





«Умение решать задачи- такое же практическое искусство, как умение плавать или бегать. Ему можно научиться только путем подражания или упражнения»

Д.Пойа

