2. Элементы теории множеств

Понятие множества

- Основу теории математики составляют **понятия** и **отношения** между этими понятиями, которые устанавливаются при помощи соответствующих **аксиом и определений.**
- Дальнейшее построение математической теории осуществляется последовательной системой теорем и новых определений, устанавливающей свойства изучаемых математических объектов.

Определение

- Одним из фундаментальных, неопределяемых математических понятий является понятие ***множества.***
- Множество можно представить себе как *соединение, совокупность, собрание* некоторых предметов, объединенных по какому-либо признаку:
  - множество учащихся класса,
  - множество букв алфавита,
  - множество натуральных чисел,
  - множество точек на прямой,
  - множество книг на полке и т.д..

Определение

- Предметы, из которых состоит множество, называются его ***элементами***
- например, буква К – элемент множества букв русского алфавита.
- Для названия множества иногда используют какое-либо одно слово, выступающее в роли синонима слова «множество» (зрители, стая, семья, фрукты).

- Обозначают множества заглавными буквами латинского алфавита или символически с помощью фигурных скобок, в которых указываются его элементы.
- Сами элементы некоторого множества будем обозначать малыми латинскими буквами, если они не имеют специальных обозначений:
- A; {a, b, c}; {∗,s,h,g}; N={1,2,3,4,5,6,7,8, …}.

- Принадлежность предмета некоторому множеству обозначают с помощью символа $\in$ (в противном случае используется символ $\notin$).
- Запись *a* $\in$*A* означает, что *a есть элемент множества A*.
- Аналогично имеем: $\Delta \in \{\Delta, o\}$.
- Запись $4 \notin \{1,2,3\}$ означает, что 4 *не принадлежит множеству* $\{1,2,3\}$.

- Основными способами задания множества являются:
- 1) перечисление всех его элементов: $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$;
- 2) описание (указание характеристического свойства его элементов).
- Этот способ требует указания такого признака, который имеется у всех элементов данного множества и не свойственен элементам, не входящим в данное множество.

- Например, характеристическим свойством **натуральных чисел** является возможность их использования при счете каких-либо предметов.
- Говоря о множестве **четных чисел**, мы указываем характеристическое свойство его элементов:
- M={x∈∈ N | x2:}, т.е. каждое число, принадлежащее этому множеству, делится на два.

Определение 3

- Множества, состоящие из одних и тех же элементов (одинаковыми). Пишут $A=B$.

Определение 4

- Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$.

- Слово «много» и математический термин «множество» имеют различный смысл.
- Множество может состоять из небольшого количества элементов.
- Будем обозначать количество элементов в некотором множестве A через m(A).
- Например, если A={a, b, c}, то m(A)=3. Если N – множество всех натуральных чисел, то $m(N) = \infty$.

Подмножество. Основные числовые множества

- **Определение 1**.
- Множество B, состоящее из некоторых элементов данного множества A (и только из них), называется *подмножеством* (частью) этого множества.
- Иначе, если любой элемент множества B принадлежит также множеству A, то множество B называется подмножеством множества A.
- Это записывается так: $B \subset A$ или $A \supset B$. Говорят, что «B – подмножество A» или «B содержится в A» или «A содержит B».
- Заметим, что $m(B) \leq m(A)$.

- Если в множестве В найдется хотя бы один элемент, не принадлежащий множеству А, то В не является подмножеством множества А: $B \not\subset A$.
- Например, отрезок [a, b] не является подмножеством полуинтервала (a, b], т. к. $a \in [a, b]$, но $a \notin (a, b]$.

- Из опр. 1 следует, что любое множество является подмножеством самого себя, т.е. справедливо утверждение $A \subseteq A$.
- Полагают также, что пустое множество является подмножеством любого множества.
- Пустое множество не содержит ни одного элемента, а значит в нем нет элемента, не принадлежащего любому другому множеству.

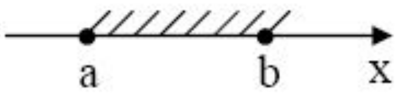
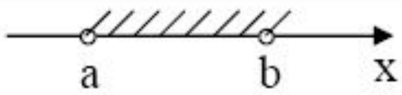
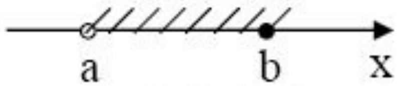
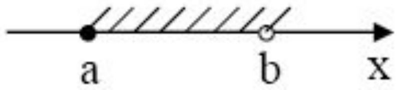
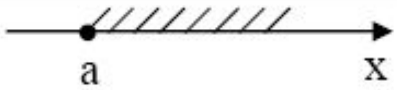
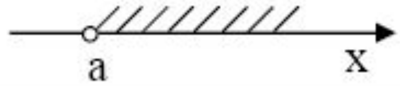
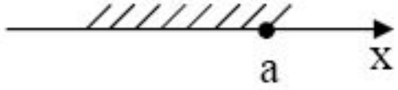
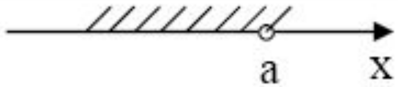
- Знак $\subset$ называется знаком включения.
- Отметим основные свойства отношения включения между множествами:
- 1) $\varnothing \subset A$ для любого множества A;
- 2) $A \subset A$ для любого множества A (рефлексивность);
- 3) из того, что $B \subset A$ не следует $A \subset B$ (не симметричность);
- 4) если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$ (антисимметричность);
- 5) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность).

Основные числовые множества:

- **N**={1,2,3,4,…} – множество натуральных чисел;
- **Z**={…,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,…} – множество целых чисел (содержит все натуральные числа и числа, им противоположные), $N \subset Z$;
- **Q**={x |$x = p/q$, где $p \in Z$, $q \in N$} – множество рациональных чисел (состоит из чисел, допускающих представление в виде дроби), $N \subset Z \subset Q$;
- **R**=(-∞;+∞) – множество действительных чисел, $Q \subset R$ (кроме всех рациональных чисел, содержит иррациональные числа.

- Действительные числа изображаются точками координатной прямой (числовой оси).
- *Координатная прямая* – это всякая прямая (обычно горизонтальная), на которой указаны положительное направление, начало отсчета и единичный отрезок.

Таблица 1. Правила изображения числовых промежутков.

Название	Неравенство, определяющее множество	Обозначение	Изображение
Отрезок от a до b (замкнутый промежуток)	$a \le x \le b$	$[a;b]$	
Интервал от a до b	$a < x < b$	$(a;b)$	
Полуинтервалы от a до b	$a < x \le b$ $a \le x < b$	$(a;b]$ $[a;b)$	 
Числовой луч от a до $+\infty$	$a \le x$	$[a;+\infty)$	
Открытый числовой луч от a до $+\infty$	$a < x$	$(a;+\infty)$	
Числовой луч от $-\infty$ до a	$x \le a$	$(-\infty; a]$	
Открытый числовой луч от $-\infty$ до a	$x < a$	$(-\infty; a)$	

Операции над множествами

- Два множества могут иметь одинаковые элементы,
- из всех элементов двух множеств можно составить одно новое множество,
- также можно рассмотреть отдельно элементы одного множества, которых во втором множестве нет.

- Например, A – множество наклеек (марок), которые есть у Пети, B – множество наклеек, которые собрал Вася.
- Можно выделить множество наклеек, которые есть у обоих ребят;
- коллекцию различных наклеек, собранных ими вместе;
- множество наклеек Пети, которых нет у Васи.
- Таким образом, мы проделали операции ***пересечения, объединения и разности*** двух множеств.

Определение

- ***Пересечением*** множеств А и В называется множество С, состоящее из всех **тех и только тех элементов**, которые принадлежат каждому из данных множеств: $C=\{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$. Обозначается $A \cap B$.

Определение

- ***Объединением*** множеств A и B называется множество C, которое состоит из всех элементов данных множеств A и B и только из них: $C=\{x|\ x\in A \text{ или } x\in B\}$.
- Обозначается, $A\cup B$.

- Если множества A и B не содержат одинаковых элементов, т.е. не пересекаются ($A \cap B = \varnothing$), то $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ **(1)**.
- В противном случае, когда множества имеют $m(A \cap B)$ одинаковых элементов, следует пользоваться более общей формулой:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B) \quad \textbf{(2)}.$$

Определение

- ***Разностью*** множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B: $C=\{x \mid x\in A \text{ и } x\notin B\}$.
- Обозначается, $A\backslash B$.
- В случае, когда B является подмножеством A, т.е. $B\subset A$, разность $A\backslash B$ называется ***дополнением* множества** B до множества A (или относительно множества A).

Определение

- ***Универсальным*** *множеством* называется множество, подмножества которого (и только они) в данный момент рассматриваются.
- Обозначают $\boldsymbol{U}$.
- При работе с числовыми множествами в качестве основного (универсального) множества будем считать множество R действительных чисел.

Определение

- *Дополнением* множества A называется разность ***U***\A..
- Обозначается, A’ или A и читается «не A» .
- Иначе, дополнением множества A называется множество A’, состоящее из всех элементов, не принадлежащих множеству A.

Свойства операции пересечения:	Свойства операции объединения:
1) $A\cap A=A$;	1) $A\cup A=A$;
2) $A\cap\varnothing=\varnothing$;	2) $A\cup\varnothing=A$;
3) $A\cap A'=\varnothing$;	3) $A\cup A'=\boldsymbol{U}$;
4) $A\cap\boldsymbol{U}=A$;	4) $A\cup\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}$;
5) $A\cap B=B\cap A$.	5) $A\cup B=B\cup A$.
Свойства операции разности:	
1) $A\backslash A=\varnothing$;	4) $A\backslash\boldsymbol{U}=\varnothing$;
2) $A\backslash\varnothing=A$;	5) $\boldsymbol{U}\backslash A=A'$;
3) $A\backslash A'=A$;	6) $\varnothing\backslash A=\varnothing$;
7) $A\backslash B\neq B\backslash A$.	

Справедливы равенства $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$ **(3).**

Диаграммы Эйлера-Венна

- Для наглядного представления множеств и результатов операций над ними удобно пользоваться диаграммами Эйлера-Венна (кругами Эйлера).
- При этом множества изображаются на плоскости в виде замкнутых кругов, а универсальное множество в виде прямоугольника.
- Элементы множества – точки внутри соответствующего круга.

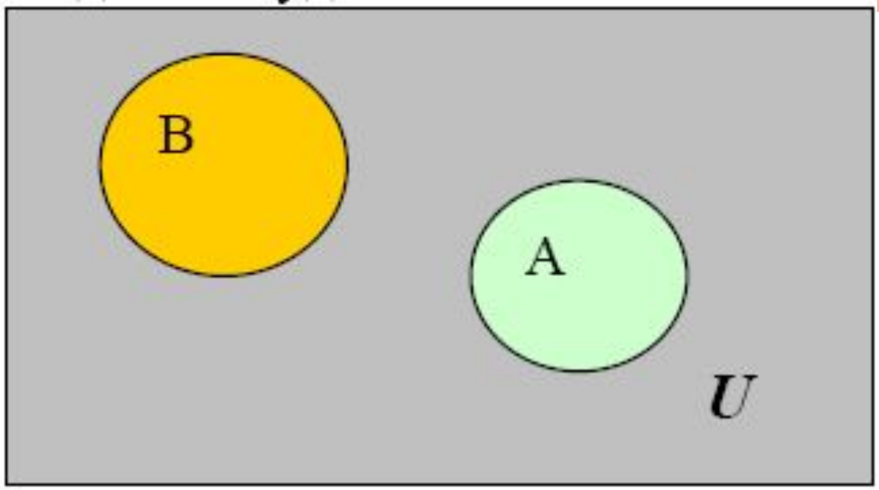


Рис. 1

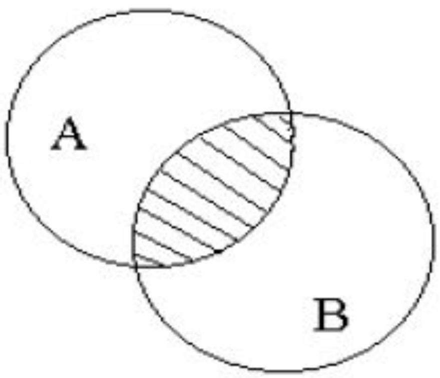


Рис.2 Пересечение множеств

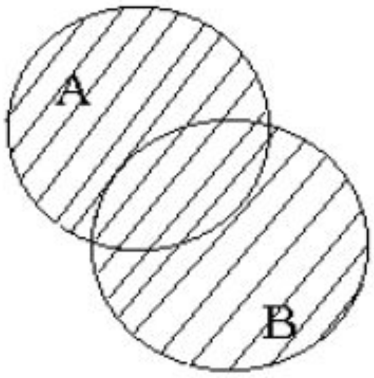


Рис.3 Объединение множеств

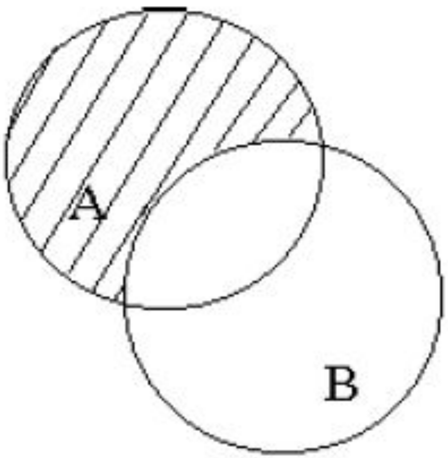


Рис.4 Разность множеств A\B

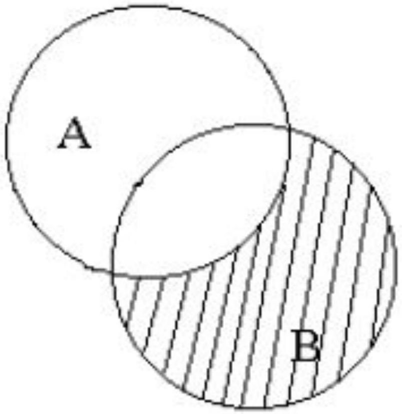


Рис.5 Разность множеств B\A

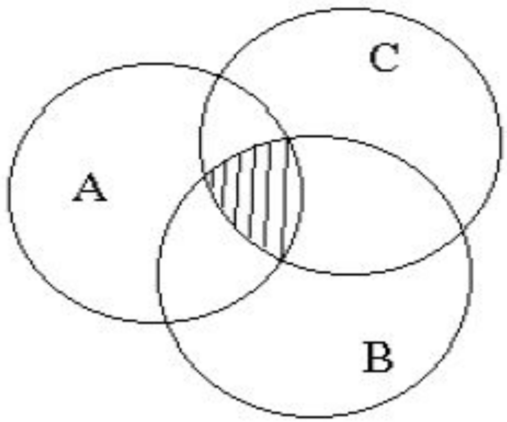


Рис.6 Пересечение трех множеств

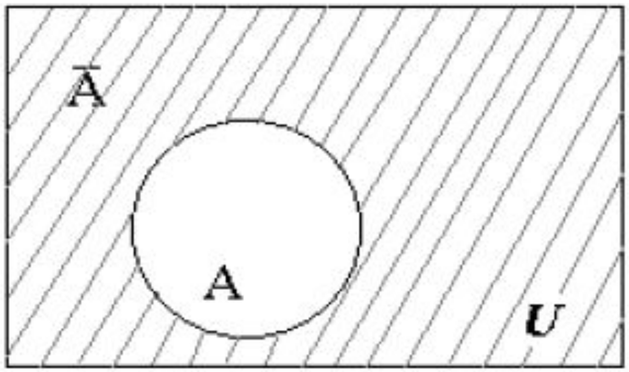


Рис.7 Дополнение множества
(множество ***не-А***)

- Формула для подсчета числа элементов в объединении трех множеств:
- $m\,(A \cup B \cup C) = m\,(A) + m\,(B) + m\,(C) - m\,(A \cap B) - m\,(A \cap C) - m\,(B \cap C) + m\,(A \cap B \cap C)$

Примеры

- **Пример 1.** Записать множество всех натуральных делителей числа 15 и найти число его элементов.
- Решение: A={1, 3, 5}, *m* (A)=3.

Пример 2

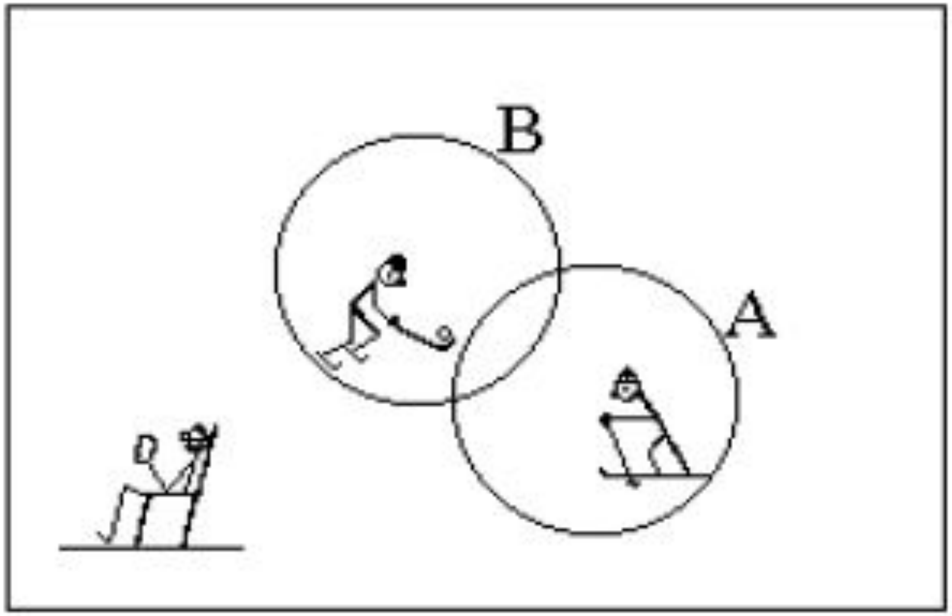
- Даны множества $A=\{2, 3, 5, 8, 13, 15\}$, $B=\{1, 3, 4, 8, 16\}$, $C=\{12, 13, 15, 16\}$, $D=\{0, 1, 20\}$.
- Найти $A \cup B$, $C \cup D$, $B \cap C$, $A \cap D$, $A \setminus C$, $D \setminus B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $B \cup D \cap C$, $A \cap C \setminus D$.
- **Решение:**
- Учтем, что сначала должна выполняться операция пересечения множеств, а затем объединение или разность.
- Получим
- $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 15, 16\}$,
- $C \cup D=\{0, 1, 12, 13, 15, 16, 20\}$,
- $B \cap C=\{16\}$, $A \cap D=\varnothing$, $A \setminus C=\{2, 3, 5, 8\}$, $D \setminus B=\{0, 20\}$,
- $A \cup B \cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 12, 13, 15, 16\}$,
- $A \cap B \cap C=\varnothing$, $B \cup D \cap C=\{1, 3, 4, 8, 16\}$, $A \cap C \setminus D=\{13, 15\}$

Пример 3.

- Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали этот экзамен 210 абитуриентов. Сколько человек получили оценки 3 и 4?
- Решение: Пусть A – множество абитуриентов, выдержавших экзамен, B – множество абитуриентов, получивших оценку ниже 5, по условию m (A)=210, m (B)=180, m $(A \cup B)$=250. Абитуриенты, получившие оценки 3 и 4, образуют множество $A \cap B$.
- Из формулы (2) находим $m\ (A \cap B) = m\ (A) + m\ (B) - m\ (A \cup B) = 210 + 180 – 250 = 140$.

Пример 4.

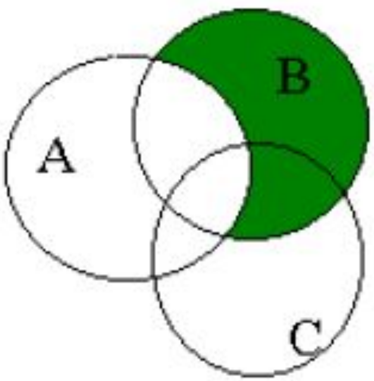
- В школе 1400 учеников.
- Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 – на коньках.
- Не умеют кататься 60 учащихся.
- Сколько учащихся умеют кататься и на коньках и на лыжах?
- Решение: Множество учеников школы будем считать основным множеством ***U***, A и B – соответственно множества учеников, умеющих кататься на лыжах и на коньках .


B
A

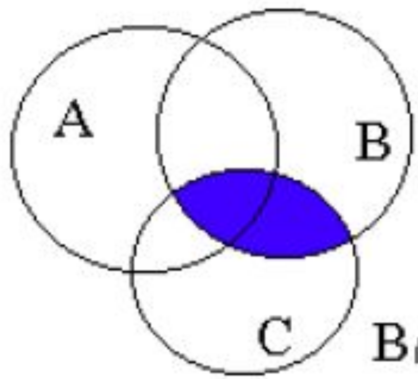
- Учащиеся, не умеющие кататься ни на лыжах, ни на коньках, составляют множество $A'\cap B' = (A\cup B)'$
- $m\,(A\cup B) = m(\boldsymbol{U}) - m\,(A\cup B)' = 1340.$
- $m\,(A\cap B) = m\,(A) + m\,(B) - m\,(A\cup B) = 862$

Пример 5. Показать на кругах Эйлера множество $(A'\setminus B')\cup(B\cap C)$.

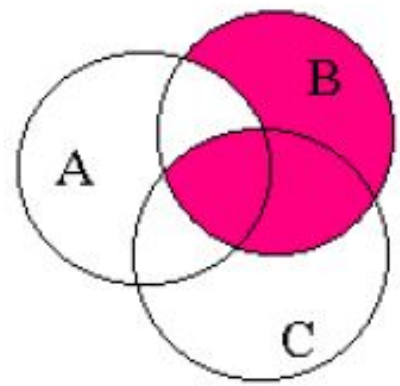
<u>Решение:</u>



$A'\setminus B'$



$B\cap C$



$(A'\setminus B')\cup(B\cap C)$