



# 2. Элементы теории множеств

## ***Понятие множества***

- Основу теории математики составляют **понятия и отношения** между этими понятиями, которые устанавливаются при помощи соответствующих **аксиом и определений**.
- Дальнейшее построение математической теории осуществляется последовательной системой теорем и новых определений, устанавливающей свойства изучаемых математических объектов.

# Определение

- Одним из фундаментальных, неопределяемых математических понятий является понятие ***множества***.
- Множество можно представить себе как *соединение, совокупность, собрание* некоторых предметов, объединенных по какому-либо признаку:
  - множество учащихся класса,
  - множество букв алфавита,
  - множество натуральных чисел,
  - множество точек на прямой,
  - множество книг на полке и т.д..

# Определение

- Предметы, из которых состоит множество, называются его **элементами**
- например, буква К – элемент множества букв русского алфавита.
- Для названия множества иногда используют какое-либо одно слово, выступающее в роли синонима слова «множество» (зрители, стая, семья, фрукты).

- Обозначают множества заглавными буквами латинского алфавита или символически с помощью фигурных скобок, в которых указываются его элементы.
- Сами элементы некоторого множества будем обозначать малыми латинскими буквами, если они не имеют специальных обозначений:
- $A; \{a, b, c\}; \{*, s, h, g\}; N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$ .

- Принадлежность предмета некоторому множеству обозначают с помощью символа  $\in$  (в противном случае используется символ  $\notin$ ).
- Запись  $a \in A$  означает, что *a* есть элемент множества *A*.
- Аналогично имеем:  $\Delta \in \{\Delta, o\}$ .
- Запись  $4 \notin \{1, 2, 3\}$  означает, что *4* не принадлежит множеству  $\{1, 2, 3\}$ .

- Основными способами задания множества являются:
- 1) перечисление всех его элементов:  
 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\};$
- 2) описание (указание характеристического свойства его элементов).
- Этот способ требует указания такого признака, который имеется у всех элементов данного множества и не свойственен элементам, не входящим в данное множество.

- Например, характеристическим свойством **натуральных чисел** является возможность их использования при счете каких-либо предметов.
- Говоря о множестве **четных чисел**, мы указываем характеристическое свойство его элементов:
- $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \div 2\}$ , т.е. каждое число, принадлежащее этому множеству, делится на два.



### Определение 3

- Множества, состоящие из одних и тех же элементов (одинаковыми). Пишут  $A=B$ .

### Определение 4

- Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом  $\emptyset$ .

- Слово «много» и математический термин «множество» имеют различный смысл.
- Множество может состоять из небольшого количества элементов.
- Будем обозначать количество элементов в некотором множестве  $A$  через  $m(A)$ .
- Например, если  $A=\{a, b, c\}$ , то  $m(A)=3$ . Если  $N$  – множество всех натуральных чисел, то  $m(N) = \infty$ .

# Подмножество. Основные числовые множества

- **Определение 1.**
- Множество  $B$ , состоящее из некоторых элементов данного множества  $A$  (и только из них), называется *подмножеством* (частью) этого множества.
- Иначе, если любой элемент множества  $B$  принадлежит также множеству  $A$ , то множество  $B$  называется подмножеством множества  $A$ .
- Это записывается так:  $B \subset A$  или  $A \supset B$ . Говорят, что « $B$  – подмножество  $A$ » или « $B$  содержится в  $A$ » или « $A$  содержит  $B$ ».
- Заметим, что  $m(B) \leq m(A)$ .

- Если в множестве  $B$  найдется хотя бы один элемент, не принадлежащий множеству  $A$ , то  $B$  не является подмножеством множества  $A$ :  $B \not\subseteq A$ .
- Например, отрезок  $[a, b]$  не является подмножеством полуинтервала  $(a, b]$ , т. к.  $a \in [a, b]$ , но  $a \notin (a, b]$ .

- Из опр. 1 следует, что любое множество является подмножеством самого себя, т.е. справедливо утверждение  $A \subset A$ .
- Полагают также, что пустое множество является подмножеством любого множества.
- Пустое множество не содержит ни одного элемента, а значит в нем нет элемента, не принадлежащего любому другому множеству.

- Знак  $\subset$  называется знаком включения.
- Отметим основные свойства отношения включения между множествами:
- 1)  $\emptyset \subset A$  для любого множества  $A$ ;
- 2)  $A \subset A$  для любого множества  $A$  (рефлексивность);
- 3) из того, что  $B \subset A$  не следует  $A \subset B$  (не симметричность);
- 4) если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ , то  $A=B$  (антисимметричность);
- 5) если  $A \subset B$  и  $B \subset C$ , то  $A \subset C$  (транзитивность).

# Основные числовые

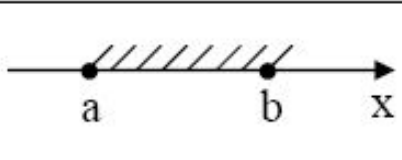

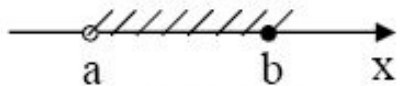
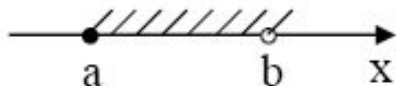
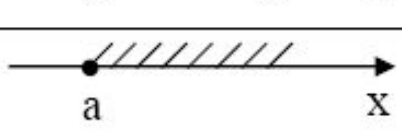
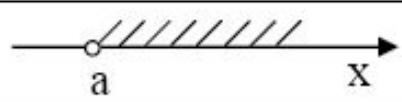
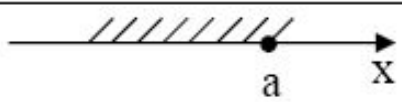
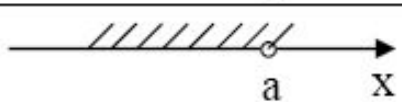
## множества:

- $\mathbf{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$  – множество натуральных чисел;
- $\mathbf{Z}=\{\dots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\}$  – множество целых чисел (содержит все натуральные числа и числа, им противоположные),  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ ;
- $\mathbf{Q}=\{x \mid x = p/q, \text{ где } p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}\}$  – множество рациональных чисел (состоит из чисел, допускающих представление в виде дроби),  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ ;
- $\mathbf{R}=(-\infty; +\infty)$  – множество действительных чисел,  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$  (кроме всех рациональных чисел, содержит иррациональные числа).

- Действительные числа изображаются точками координатной прямой (числовой оси).
- *Координатная прямая* – это всякая прямая (обычно горизонтальная), на которой указаны положительное направление, начало отсчета и единичный отрезок.



Таблица 1. Правила изображения числовых промежутков.

Название	Неравенство, определяющее множество	Обозначение	Изображение
Отрезок от $a$ до $b$ (замкнутый промежуток)	$a \leq x \leq b$	$[a; b]$	
Интервал от $a$ до $b$	$a < x < b$	$(a; b)$	
Полуинтервалы от $a$ до $b$	$a < x \leq b$	$(a; b]$	
	$a \leq x < b$	$[a; b)$	
Числовой луч от $a$ до $+\infty$	$a \leq x$	$[a; +\infty)$	
Открытый числовой луч от $a$ до $+\infty$	$a < x$	$(a; +\infty)$	
Числовой луч от $-\infty$ до $a$	$x \leq a$	$(-\infty; a]$	
Открытый числовой луч от $-\infty$ до $a$	$x < a$	$(-\infty; a)$	

# Операции над множествами

- Два множества могут иметь одинаковые элементы,
- из всех элементов двух множеств можно составить одно новое множество,
- также можно рассмотреть отдельно элементы одного множества, которых во втором множестве нет.

- Например,  $A$  – множество наклеек (марок), которые есть у Пети,  $B$  – множество наклеек, которые собрал Вася.
- Можно выделить множество наклеек, которые есть у обоих ребят;
- коллекцию различных наклеек, собранных ими вместе;
- множество наклеек Пети, которых нет у Васи.
- Таким образом, мы проделали операции ***пересечения, объединения и разности*** двух множеств.

# Определение

- **Пересечением** множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $C$ , состоящее из **всех тех и только тех элементов**, которые принадлежат каждому из данных множеств:  $C = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$ . Обозначается  $A \cap B$ .

# Определение

- **Объединением** множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $C$ , которое состоит из всех элементов данных множеств  $A$  и  $B$  и только из них:  $C = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$ .
- Обозначается,  $A \cup B$ .

- Если множества  $A$  и  $B$  не содержат одинаковых элементов, т.е. не пересекаются ( $A \cap B = \emptyset$ ), то  $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$  (1).
- В противном случае, когда множества имеют  $m(A \cap B)$  одинаковых элементов, следует пользоваться более общей формулой:  
$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$
 (2).

# Определение

- **Разностью** множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $C$ , состоящее из всех элементов множества  $A$ , не принадлежащих множеству  $B$ :  
 $C = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$ .
- Обозначается,  $A \setminus B$ .
- В случае, когда  $B$  является подмножеством  $A$ , т.е.  $B \subset A$ , разность  $A \setminus B$  называется **дополнением** множества  $B$  до множества  $A$  (или относительно множества  $A$ ).

# Определение

- **Универсальным** *множеством* называется множество, подмножества которого (и только они) в данный момент рассматриваются.
- Обозначают  **$U$** .
- При работе с числовыми множествами в качестве основного (универсального) множества будем считать множество  $\mathbb{R}$  действительных чисел.



# Определение

- *Дополнением* множества  $A$  называется разность  $U \setminus A$ .
- Обозначается,  $A'$  или  $\bar{A}$  и читается «не  $A$ » .
- Иначе, дополнением множества  $A$  называется множество  $A'$ , состоящее из всех элементов, не принадлежащих множеству  $A$ .

Свойства операции пересечения:

- 1)  $A \cap A = A$ ;
- 2)  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;
- 3)  $A \cap A' = \emptyset$ ;
- 4)  $A \cap U = A$ ;
- 5)  $A \cap B = B \cap A$ .

Свойства операции объединения:

- 1)  $A \cup A = A$ ;
- 2)  $A \cup \emptyset = A$ ;
- 3)  $A \cup A' = U$ ;
- 4)  $A \cup U = U$ ;
- 5)  $A \cup B = B \cup A$ .

Свойства операции разности:

- 1)  $A \setminus A = \emptyset$ ;
- 2)  $A \setminus \emptyset = A$ ;
- 3)  $A \setminus A' = A$ ;
- 4)  $A \setminus U = \emptyset$ ;
- 5)  $U \setminus A = A'$ ;
- 6)  $\emptyset \setminus A = \emptyset$ ;
- 7)  $A \setminus B \neq B \setminus A$ .

Справедливы равенства  $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ;  $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$  (3).

# Диаграммы Эйлера-Венна

- Для наглядного представления множеств и результатов операций над ними удобно пользоваться диаграммами Эйлера-Венна (кругами Эйлера).
- При этом множества изображаются на плоскости в виде замкнутых кругов, а универсальное множество в виде прямоугольника.
- Элементы множества – точки внутри соответствующего круга.

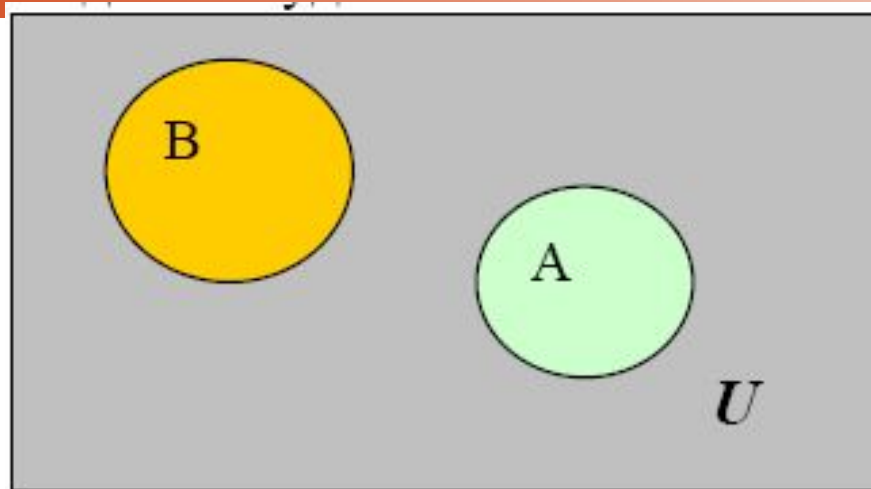


Рис. 1

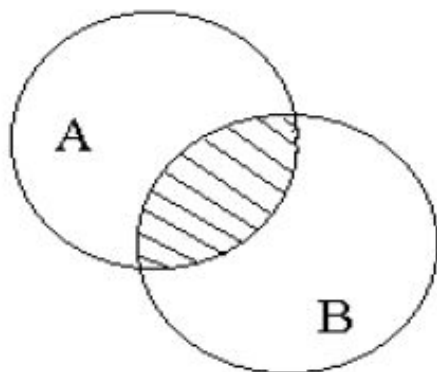


Рис.2 Пересечение множеств

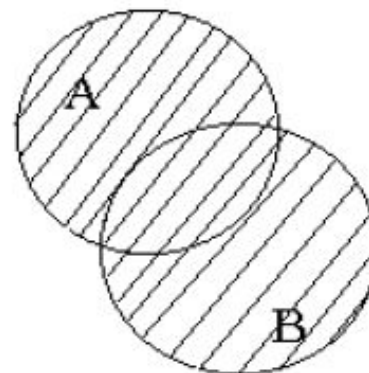


Рис.3 Объединение множеств

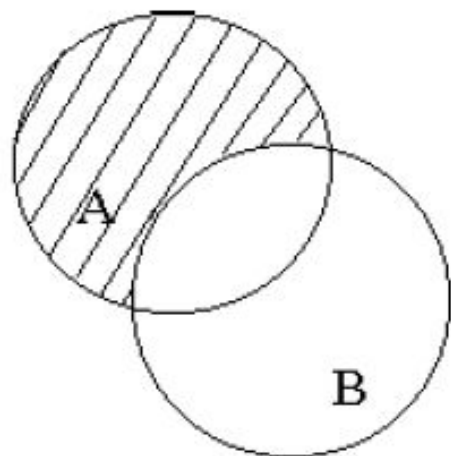


Рис.4 Разность множеств  $A \setminus B$

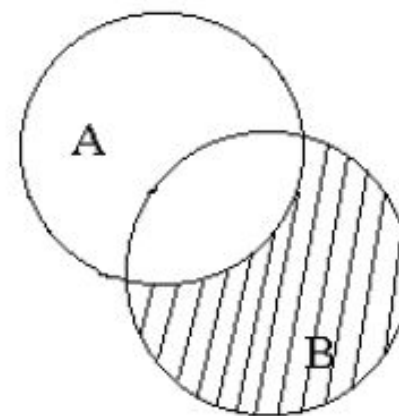


Рис.5 Разность множеств  $B \setminus A$

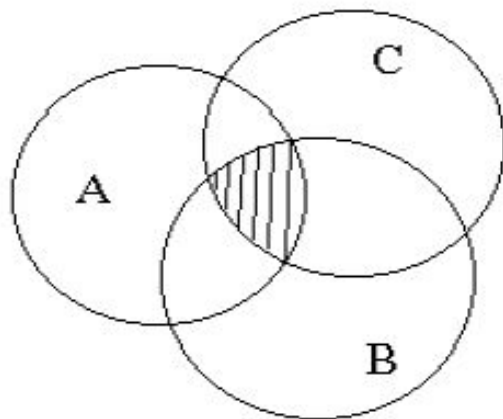


Рис.6 Пересечение трех множеств

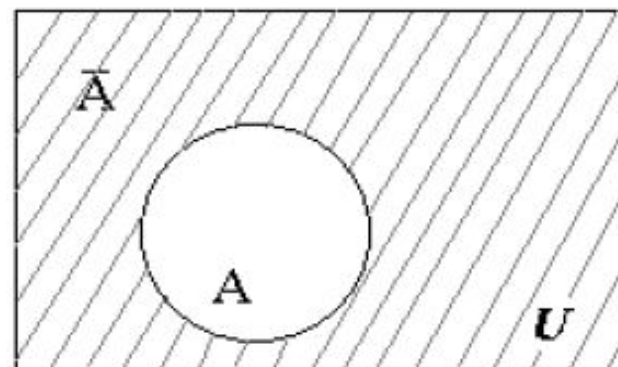


Рис.7 Дополнение множества  
(множество *не-А*)

- Формула для подсчета числа элементов в объединении трех множеств:
- $m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C)$

# Примеры

- **Пример 1.** Записать множество всех натуральных делителей числа 15 и найти число его элементов.
- Решение:  $A = \{1, 3, 5\}$ ,  $m(A) = 3$ .



# Пример 2

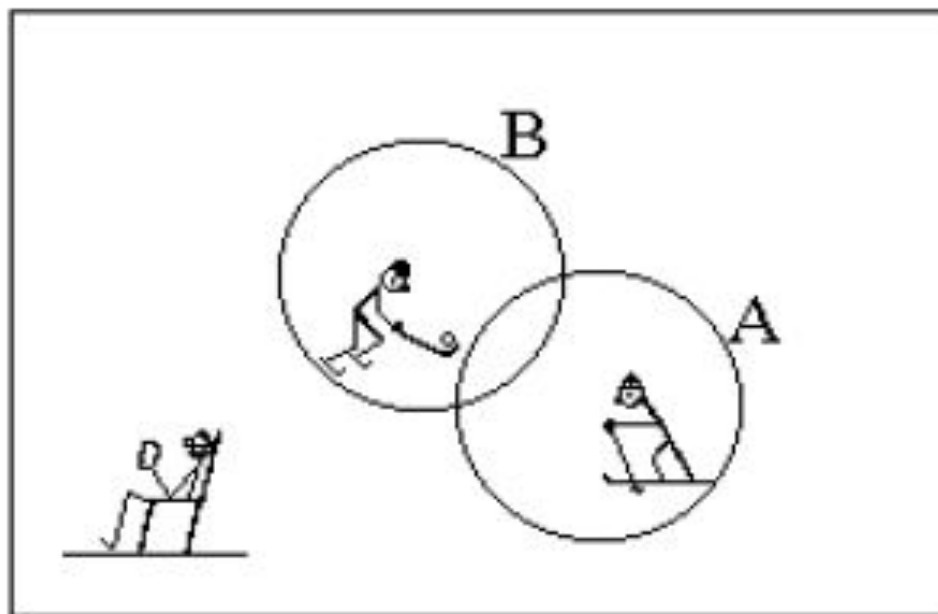
- Даны множества  $A=\{2, 3, 5, 8, 13, 15\}$ ,  $B=\{1, 3, 4, 8, 16\}$ ,  $C=\{12, 13, 15, 16\}$ ,  $D=\{0, 1, 20\}$ .
- Найти  $A \cup B$ ,  $C \cup D$ ,  $B \cap C$ ,  $A \cap D$ ,  $A \setminus C$ ,  $D \setminus B$ ,  $A \cup B \cup C$ ,  $A \cap B \cap C$ ,  $B \cup D \cap C$ ,  $A \cap C \setminus D$ .
- **Решение:**
- Учтем, что сначала должна выполняться операция пересечения множеств, а затем объединение или разность.
- Получим
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 15, 16\}$ ,
- $C \cup D = \{0, 1, 12, 13, 15, 16, 20\}$ ,
- $B \cap C = \{16\}$ ,  $A \cap D = \emptyset$ ,  $A \setminus C = \{2, 3, 5, 8\}$ ,  $D \setminus B = \{0, 20\}$ ,
- $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 12, 13, 15, 16\}$ ,
- $A \cap B \cap C = \emptyset$ ,  $B \cup D \cap C = \{1, 3, 4, 8, 16\}$ ,  $A \cap C \setminus D = \{13, 15\}$

# Пример 3.

- Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали этот экзамен 210 абитуриентов. Сколько человек получили оценки 3 и 4?
- Решение: Пусть  $A$  – множество абитуриентов, выдержавших экзамен,  $B$  – множество абитуриентов, получивших оценку ниже 5, по условию  $m(A)=210$ ,  $m(B)=180$ ,  $m(A \cup B)=250$ . Абитуриенты, получившие оценки 3 и 4, образуют множество  $A \cap B$ .
- Из формулы (2) находим  $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 210 + 180 - 250 = 140$ .

# Пример 4.

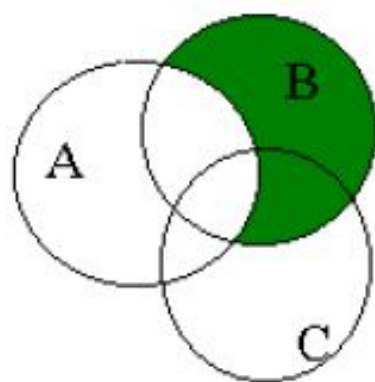
- В школе 1400 учеников.
- Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 – на коньках.
- Не умеют кататься 60 учащихся.
- Сколько учащихся умеют кататься и на коньках и на лыжах?
- Решение: Множество учеников школы будем считать основным множеством  $U$ ,  $A$  и  $B$  – соответственно множества учеников, умеющих кататься на лыжах и на коньках .



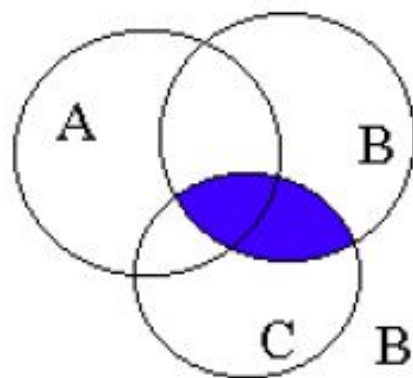
- Учащиеся, не умеющие кататься ни на лыжах, ни на коньках, составляют множество  $A' \cap B' = (A \cup B)'$
- $m(A \cup B) = m(U) - m(A \cup B)' = 1340.$
- $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 862$

**Пример 5.** Показать на кругах Эйлера множество  $(A \setminus B) \cup (B \cap C)$ .

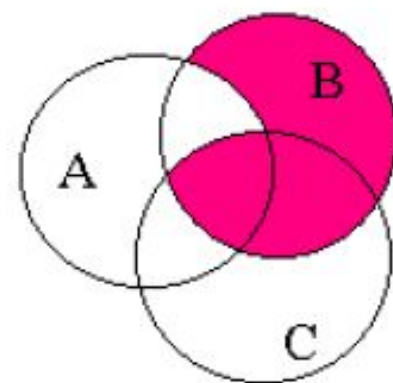
Решение:



$A \setminus B$



$B \cap C$



$(A \setminus B) \cup (B \cap C)$