ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Случайные величины

Схема Бернулли

- Рассмотрим последовательность **n** независимых однородных испытаний (экспериментов).
  - Испытания считаем независимыми, если результат испытания не зависит от номера испытания и от того, что произошло до этого испытания.
  - Однородными испытаниями считаем такие, которые проводятся в одинаковых условиях.

Пусть в каждом испытании событие **A** может произойти с вероятностью **p**

$$\Longrightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - p = q$$

Формула Бернулли

- Вероятность того, что при **n** испытаниях
- событие **А** наступит **к**-раз:

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}}$$

где C_n^k – *число сочетаний*

$$C_n^k = \frac{n\,!}{k!(n-k)!}$$

Схема Бернулли

- **Пример.**
- Вероятность того, что образец бетона при испытании выдержит нормативную нагрузку, равна 0,9.
- Найти вероятность того, что из 7 образцов 5 выдержат испытания.
- **Решение.**
- По формуле Бернулли

$$P_7^5 = C_7^5 p^5 q^2 = \frac{7!}{5!\,2!} 0{,}9^5\, 0{,}1^2 = 0{,}124$$

Схема Бернулли

- **Асимптотические формулы.**

- **1. Формула Пуассона.**
- Пусть число испытаний **n** - *велико* (n→∞)
- Вероятность **p** события **A** – *мала* (p→0)
- Причем $\boxed{np \to a}$

- Тогда при любом фиксированном **к**

$$\boxed{P_n(k) \cong \frac{a^k}{k!} e^{-a}}$$

Закон редких событий

$$(\; n \; \square \; 100 \, , \;\; a = np \; \square \; 10 \;)$$

Схема Бернулли

- **Пример 1 .**
- Известно, что при транспортировке 2,5% декоративной плитки повреждается. Определить вероятность того, что в партии из 200 плиток оказалось поврежденными:
- **а) ровно 4 плитки; б) не более 6 плиток.**
- **Решение.**
- Вероятность того, что плитка окажется поврежденной,
- p=0.025 – *мала*, число испытаний n=200 –*велик*о, причем np=5<10.
- По формуле Пуассона:
- а) $P_{200}(4) \cong \frac{5^4}{4!} e^{-5} \approx 0{,}18$ б) $P_{200}(i \le 6) \cong e^{-5} \sum_{i=0}^{6} \frac{5^i}{i!} \approx 0{,}76$

Схема Бернулли

- **2. Локальная теорема Муавра-Лапласа.**
- Пусть число испытаний **n** – *велико* (n→∞)
- Вероятность **p** события **A** – *не очень мала* (0<<p<<1)
- (*p не близко к 0 и к 1*)
- Тогда при любом фиксированном к

$$\boxed{P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),}$$

$$\text{где } \varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

Схема Бернулли

- **3. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.**

Пусть число испытаний **n** – *велико* (n→∞)

Вероятность **p** события **A** – *не очень мала* (0<<p<<1)

(*p не близко к 0 и к 1*)

Тогда вероятность того, что событие А наступит

не менее к-раз и не более m-раз,

приближенно равна $\boxed{P_n(k \le i \le m) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1)}$

$$\text{где}\ \ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt \quad - \ \text{функция Лапласа}$$

$$x_1 = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

Схема Бернулли

- **Пример 2 .**
- Завод изготавливает 80% высоконапорных железобетонных труб первого сорта.
- Определить вероятность того, что из 100 труб 75 будет первого сорта.
- **Решение.**
- n =100 – велико, p=0,8 –не близко к 0 и к 1.
- По локальной теореме Муавра –Лапласа:

$$P_{100}(75) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\varphi\left(\frac{75-80}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) =$$

$$= 0{,}25\varphi(-1{,}25) \approx 0{,}046$$

Схема Бернулли

- **Пример 3 .**
- Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8.
- Производится 100 выстрелов.
- Норматив считается выполненным, если цель будет поражена не менее 75 раз.
- Определить вероятность выполнения норматива.
- **Решение.**
- По интегральной теореме Муавра-Лапласа:

$$P_{100}(75 \le i \le 100) \cong \Phi\left(\frac{100-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)-\Phi\left(\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=$$

$$=\Phi(5)-\Phi(-1{,}25)=0{,}5+0{,}3943\approx 0{,}89$$

Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности

- **Задача.**
- Производится **n** независимых однородных испытаний.
- В каждом испытании событие **А** может наступить
- с вероятностью **p, где 0 << p << 1.**
- Найти вероятность того, что **относительная частота** $\nu = \dfrac{k}{n}$
- **отклонится от вероятности p (**по абсолютной величине**)**
- **не более чем на ε>0 :**

$$\boxed{P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = ?}$$

Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности

- **Решение.** $\left|\dfrac{k}{n}-p\right| \le \varepsilon \;\Leftrightarrow\; np-n\varepsilon \le k \le np+n\varepsilon$
- По интегральной теореме Муавра-Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right| \le \varepsilon\right) = P(np-n\varepsilon \le k \le np+n\varepsilon) =$$

$$= \Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

$$где \quad x_1 = \frac{(np-n\varepsilon)-np}{\sqrt{npq}} = -\sqrt{\frac{n}{pq}}\cdot\varepsilon \;, \quad x_2 = \frac{(np+n\varepsilon)-np}{\sqrt{npq}} = \sqrt{\frac{n}{pq}}\cdot\varepsilon$$

Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности

- **Тогда**

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\cdot\varepsilon\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{n}{pq}}\cdot\varepsilon\right)=2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\cdot\varepsilon\right)$$

- **Анализ :**

$$\forall\varepsilon > 0 \quad при \quad n\to\infty \quad P(|\nu-p|\le\varepsilon)\to 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{P(|\nu-p| > \varepsilon)\to 0} \qquad \boxed{\nu=\frac{k}{n}}$$

Случайная величина

- **Определение.**
- Случайной величиной называется числовая величина (числовая функция), значение которой может меняться в зависимости от результата стохастического эксперимента.
  - Обозначения: $X, Y, Z\ldots \quad или \quad \xi, \eta, \mu\ldots$

Пример 1.

- 1. Число вызовов, поступивших от абонентов на телефонную станцию в течение определенного промежутка времени, является случайным и принимает те или иные значения в зависимости от случайных обстоятельств.

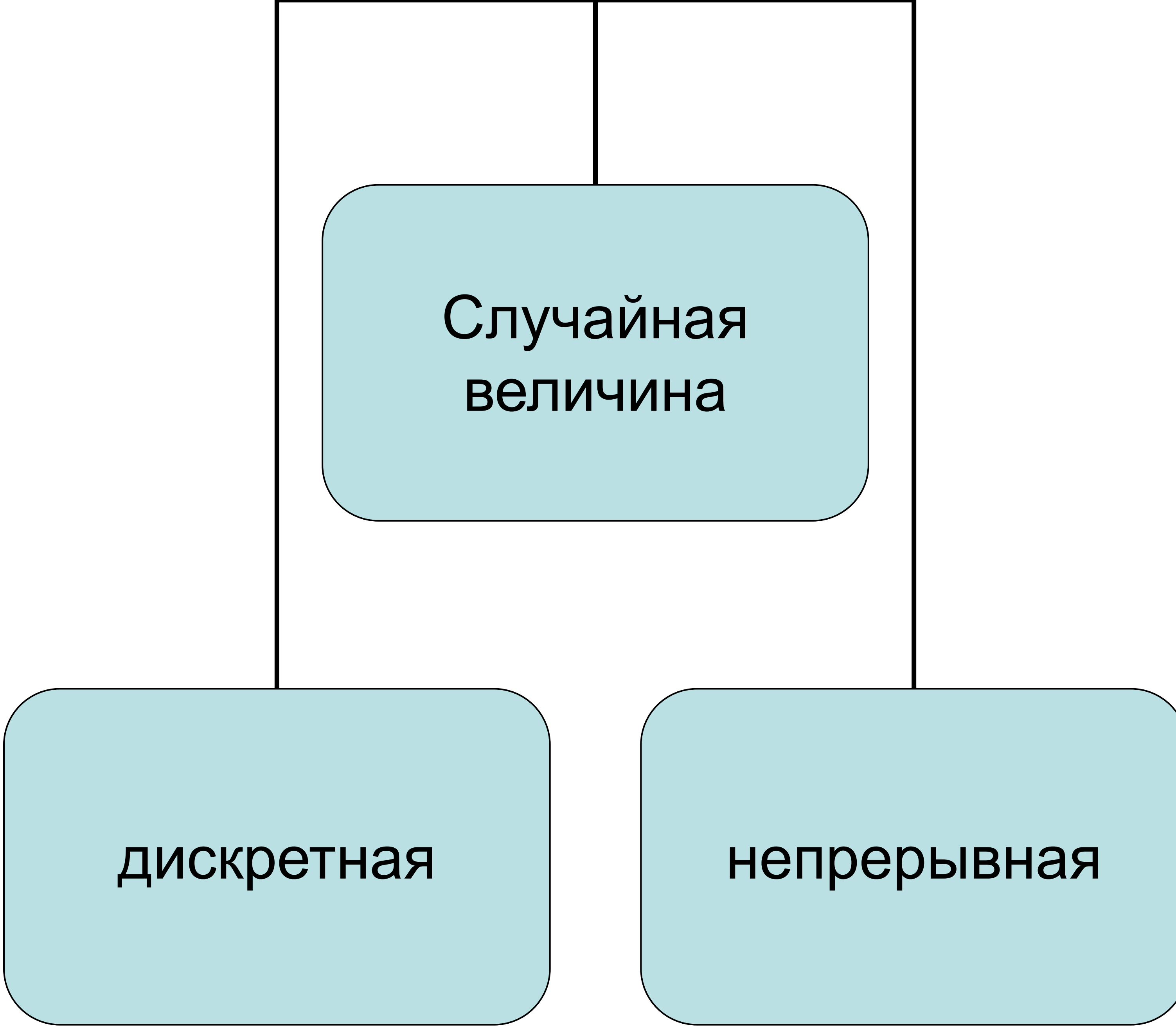
Случайная величина

- **Пример 2.**
- Рассмотрим схему Бернулли:
- последовательность **n** независимых однородных испытаний,
- событие **A –** случайное событие, которое может наступить при каждом испытании.

$$\Omega = \{\omega\} - \text{пространство элементарных событий},$$

$$\text{где} \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$$

- $\omega_i = 1$, если при i-ом испытании событие А наступило, и
- $\omega_i = 0$, если оно не наступило.
- Случайная величина $X = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$
- - число наступлений события А в схеме Бернулли.


Случайная величина
дискретная
непрерывная

Случайная величина

- **Дискретная случайная величина –** такая случайная величина, которая может принимать конечное или счетное множество значений.
- **Значения непрерывной случайной величины** – принадлежат интервалу (конечному или бесконечному).

Случайная величина

- **Пример 3.** Рассмотрим схему Бернулли:
- последовательность **n** независимых однородных испытаний,
- **А –** случайное событие, которое может наступить при каждом испытании.
- Пусть **X** – число наступлений события **А.**
- **X={ 0,1,2,…,n } – дискретная** случайная величина**.**
- **Пример 4.**
- Проводятся независимые однородные испытания до первого появления события А.
- Пусть **ξ** – функция, равная числу испытаний, проведенных до первого появления события А.
- **ξ={0,1,2,3,…} –**дискретная случайная величина.

Обзор

Случайная величина

- **Пример 5.**
- Случайным образом бросают точку на отрезок [а,в].
- **X** – координата точки попадания.
- **X є [а,в]** – непрерывная случайная величина.

- **Пример 6.**
- Время работы прибора без поломки **μ –** непрерывная случайная величина.
- **μ є (0, ∞)**

Способы задания случайной величины

- **Функция распределения и ее свойства.**
- **Определение.**
- Функция $F(x)$, равная вероятности того, что случайная величина ξ примет значение меньше x, называется функцией распределения: $F(x) = P(\xi < x)$
- **Свойства.**
- **1.** Область определения F(x): x є (-∞, ∞).
- **2**. Область значений : 0 ≤ F(x) ≤ 1.
- **3.** Функция F(x) – неубывающая: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
- 4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$
- 5. Вероятность попадания в интервал (a,в):

$$P\,(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a)$$

Закон распределения дискретной случайной величины

- **Определение.**
- Закон распределения дискретной случайной величины – это соответствие между возможными значениями и вероятностями, с которыми эти значения принимает случайная величина.
- **Способы задания:**
- Таблично

ξ	x_1	…	x_n
P	p_1	…	p_n

- Аналитически $P(\xi = k) = \dfrac{a^k}{k!} e^{-a}$

Графически

Закон распределения дискретной случайной величины

- **Примеры.**
- **1. Биномиальный закон (** в схеме Бернулли**):**

$$P(\mu = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

- **2. Равномерное распределение (** в классической схеме**):**

$$P(\xi = k) = \frac{1}{n}$$

- **3. Распределение Пуассона:**

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

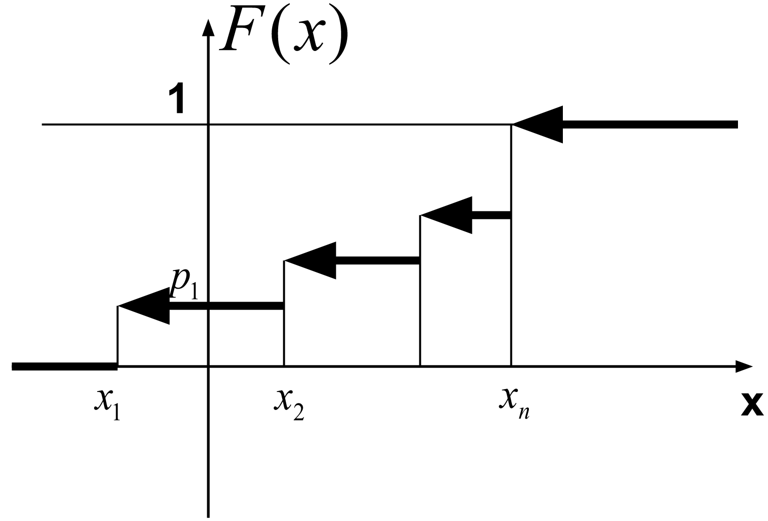
Дискретная случайная величина

- **Основное свойство**
- закона распределения:

$$\boxed{\sum_{(i)} p_i = 1}$$

- Функция распределения –
- **кусочно- непрерывная** функция**.**
- График функции распределения –
- **ступенчатая фигура.**

$$\boxed{F(x) = \sum_{x_i < x} p_i}$$



Непрерывная случайная величина

- **Определение.**
- Случайная величина ξ называется непрерывной, если ее функция распределения F(x)- непрерывная при всех x и имеет почти всюду производную $F'(x)=f(x)$.
- В этом случае **функция f(x) называется плотностью распределения вероятности.**

  - **Замечания. В некоторых учебниках такие случайные величины называют абсолютно непрерывными.**
  - **Если F(x)- непрерывная и не дифференцируемая функция, то в этом случае случайную величину называют сингулярной.**

Свойства плотности распределения

- **1.** $f(x) \geq 0$
- **2.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- **3.** $P(a \leq \xi \leq b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$
- **4.** $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Непрерывная случайная величина

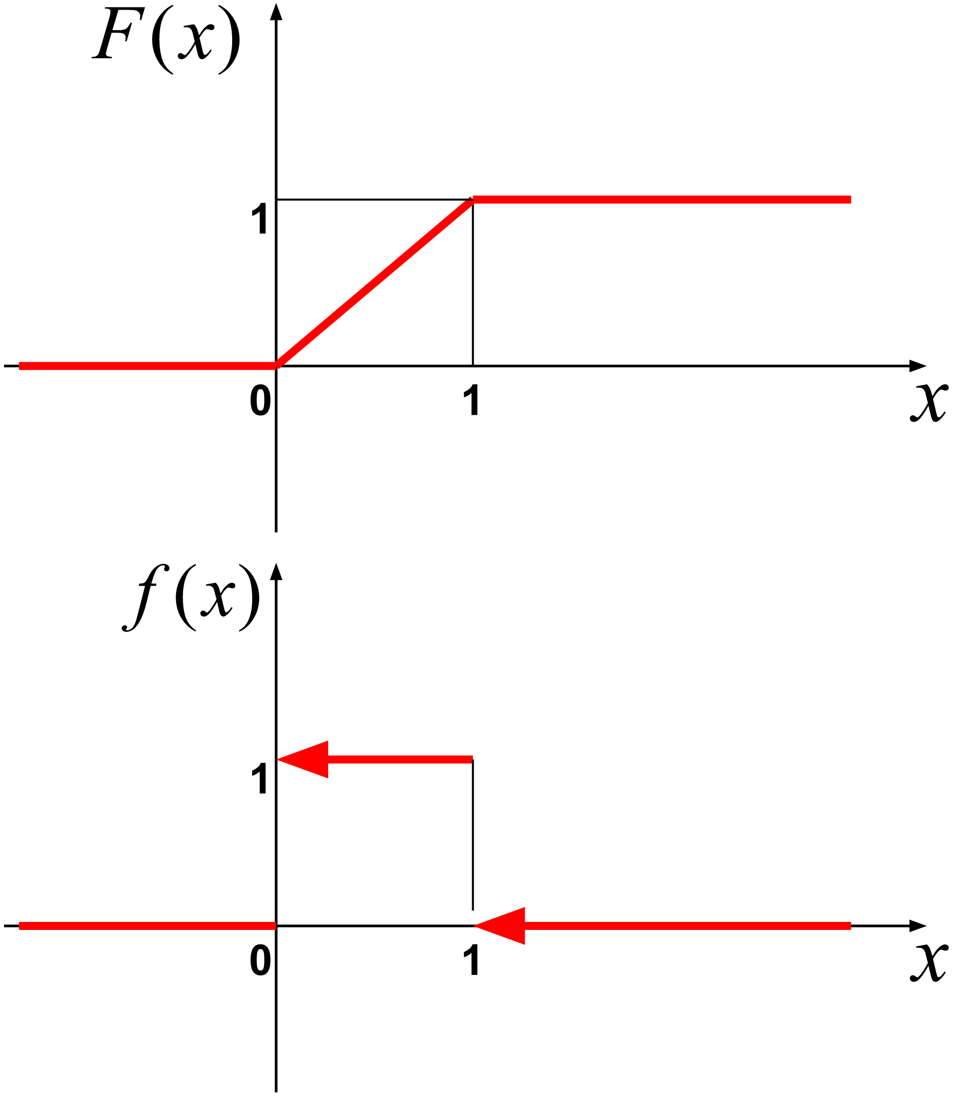
- **Пример.**
- Случайным образом бросают точку на отрезок [0,1].
- ξ– координата точки попадания.
- **Найти функцию распределения F(x) и плотность f(x).**
- **Решение.**
- Из определения:

$$F(x) = P(\xi < x) \Longrightarrow F(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{если} \quad x \le 0 \\ x\,, & \text{если} \quad x \in (0,1] \\ 1\,, & \text{если} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = F'(x) \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{если} \quad x \le 0 \\ 1\,, & \text{если} \quad x \in (0,1] \\ 0\,, & \text{если} \quad x > 1 \end{cases}$$

Обзор

Непрерывная случайная величина



Числовые характеристики случайных величин

- **Математическое ожидание.**
- **Определение.**
- **Математическим ожиданием**
- дискретной случайной величины ξ
- называется число, равное

$$M\xi = \sum_{(i)} x_i p_i$$

$$\text{где} \quad x_i - \text{значения случайной величины},$$

$$p_i - \text{их вероятности.}$$

Числовые характеристики случайных величин

- **Математическим ожиданием** непрерывной случайной величины ξ называется число, равное

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)dx$$

$$\text{где} \quad f(x) - \text{плотность} \;\; \text{распределения.}$$

Числовые характеристики случайных величин

- **Свойства математического ожидания.**
- **1.** $M(C) = C, \ \text{где} \ \ C - \text{постоянная}.$
- **2.** $M(C\xi) = C \cdot M(\xi)$
- **3.** $M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta),$

  $\text{где} \quad \xi \ \ \text{и} \ \ \eta - \ \text{случайные величины}.$
- **4.** $M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta)\,,$

  $\text{если} \quad \xi \ \ \text{и} \ \ \eta - \text{независимые случайные величины}.$

Числовые характеристики случайных величин

- **Пример 1.**
- Случайным образом бросают точку на отрезок [0,1].
- ξ– координата точки попадания.
- **Найти** **математическое ожидание** $M(\xi)$
- **Решение.**
- Из определения: $M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & если \quad x \le 0 \\ 1\,, & если \quad x \in (0,1] \\ 0\,, & если \quad x \,\Box\, 1 \end{cases} \Longrightarrow \quad M(\xi) = \int\limits_{0}^{1} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Числовые характеристики случайных величин

- **Дисперсия случайной величины.**
- **Определение.**
- **Дисперсией** случайной величины ξ называется
- **математическое ожидание** квадрата отклонения
- случайной величины от ее
- математического ожидания:

$$D(\xi) = M(\xi - a)^2,$$

$$где \quad a = M(\xi)$$

Числовые характеристики случайных величин

- **Свойства дисперсии.**

- **1.** $D(C) = 0$
- **2.** $D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D(\xi)$
- **3.** $D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta)$,

  если ξ *и* η *– независимые случайные величины.*

- **4. Следствие.**

$$D(\xi - \eta) = D(\xi) + D(\eta) ,$$

если ξ *и* η *– независимые случайные величины.*

Числовые характеристики случайных величин

$$\boxed{D(\xi) = M(\xi^2) - a^2}$$

- **Доказательство.**

$$D(\xi) = M(\xi - a)^2 = M(\xi^2 - 2a\xi + a^2) =$$

$$= M(\xi^2) - 2aM(\xi) + M(a^2) =$$

$$= M(\xi^2) - a^2,$$

$$\textit{так как} \quad a = M(\xi)$$

Числовые характеристики случайных величин

- **Среднеквадратическое отклонение случайной величины.**
- **Определение.**
- **Среднеквадратическим отклонением**
- случайной величины ξ называется число

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}$$

- **Свойства.**
- **1.** $\sigma(\xi) \geq 0\,, \quad \sigma(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = C$
- **2.** $\sigma(C\xi) = |C|\sigma(\xi)$

Числовые характеристики случайных величин

- **Пример 2.**
- Случайным образом бросают точку на отрезок [0,1].
- ξ– координата точки попадания.
- **Найти дисперсию и**
- **среднеквадратическое отклонение.**
- **Решение.**
- Из формулы: $D(\xi) = M(\xi^2) - a^2$

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{если} \quad x \le 0 \\ 1\,, & \text{если} \quad x \in (0,1] \\ 0\,, & \text{если} \quad x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a = M(\xi) = \frac{1}{2}$$

$$M(\xi^2) = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$D(\xi) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Обзор стандартных распределений

- Дискретные случайные величины
  - Биномиальное распределение
  - Распределение Пуассона
  - Геометрическое распределение

Обзор стандартных распределений

- Непрерывные случайные величины
  - Равномерное распределение
  - Показательное распределение
  - Нормальное распределение

Биномиальное распределение

- ξ=(число «успехов» при n испытаниях в схеме Бернулли).
- **Закон распределения:**

$$\boxed{P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}}$$

$$p - \textit{вероятность "успеха"},$$

$$q = 1 - p\ ;\ \ k = 0\,,1\,,...,\,n.$$

$$n,\ p - \textit{параметры распределения}\ .$$

$$\boxed{M(\xi) = a = np} \quad \boxed{D(\xi) = \sigma^2 = npq} \quad \boxed{\sigma = \sqrt{npq}}$$

Пример

Распределение Пуассона

- **ξ=(0,1,2,…,n,…)**
- **Закон распределения:**

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

$a - \textit{параметр распределения}.$

$$M(\xi) = a$$

$$D(\xi) = a$$

$$\sigma = \sqrt{a}$$

Геометрическое распределение

- ξ=(0,1,2,…,n,…)
- **Закон распределения:**

$$P(\xi = k) = p \cdot q^k$$

p – *параметр распределения –*

– вероятность "успеха"

$$M(\xi) = \frac{q}{p}$$

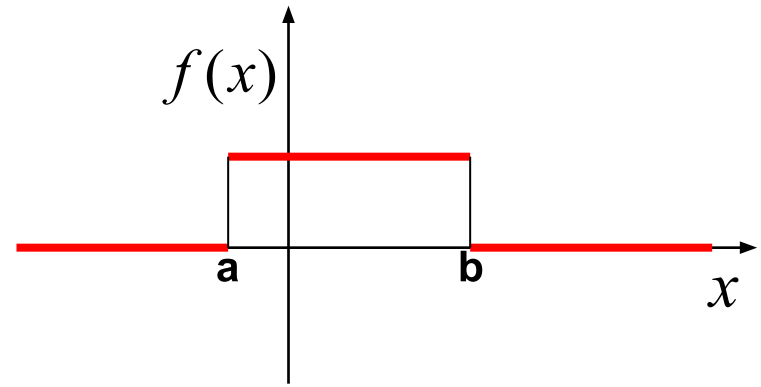
$$D(\xi) = \frac{q}{p^2}$$

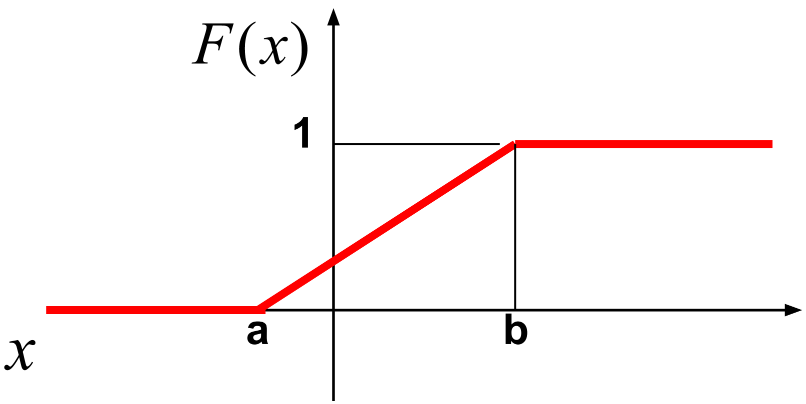
$$\sigma = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

Пример

Равномерное распределение

$$\xi \in (-\infty, \infty)$$





- **Плотность распределения:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & если \quad x\in[a,b]\\ 0, & если \quad x\notin[a,b]\end{cases}$$

- **Функция распределения:**

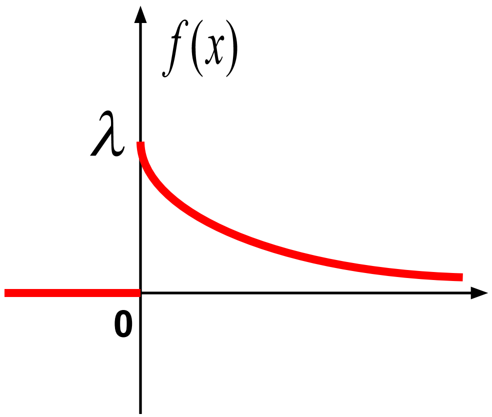
$$F(x)=\begin{cases}0, & если \quad x \square a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & если \quad x\in[a,b]\\ 1, & если \quad x \square b\end{cases}$$

Пример

$$M(\xi)=\frac{a+b}{2} \qquad D(\xi)=\frac{(b-a)^2}{12} \qquad \sigma=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Показательное распределение

$$\xi \in (-\infty, \infty)$$

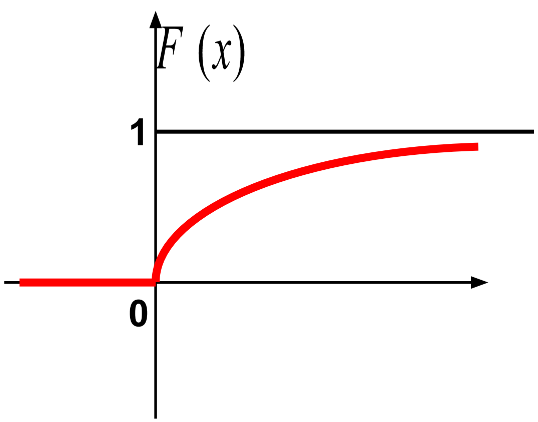


- **Плотность распределения:**

$$f(x) - \begin{cases} 0\ , & если\ \ x \square 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & если\ \ x \square 0 \end{cases}$$

- **Функция распределения:**

$$F(x) = \begin{cases} 0\ , & если\ \ x \square 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & если\ \ x \geq 0 \end{cases}$$



$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda} \qquad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2} \qquad \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

Нормальное распределение

- **Определение.**
- Непрерывная случайная величина ξ
- имеет нормальное распределение
- с параметрами *a и σ*,
- если плотность распределения

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}$$

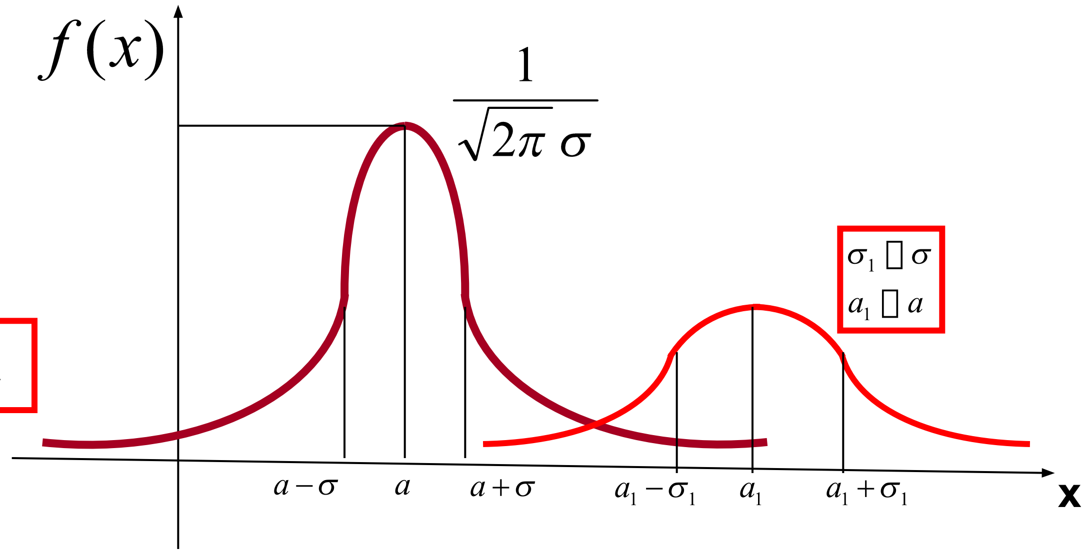
$$\xi \sim N(a,\sigma)$$

- **Вероятностный смысл параметров:**

$$\boxed{a=M(\xi)\,,\ \ \sigma=\sqrt{D(\xi)}}$$

Нормальное распределение

- **График плотности распределения.**



Кривая Гаусса

- **Нормированное распределение.**

$$a = 0\,,\ \ \sigma = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \boxed{\varphi(x)}$$

Нормальное распределение

- **Функция распределения.**

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt =$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt} + \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{a}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}} \quad ? \qquad \boxed{\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) - \textit{функция Лапласа}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)}$$

Нормальное распределение

- **Вероятность попадания в интервал.**

$$P\,(x_1 \le \xi \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) =$$

$$= \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)$$

- **Следствие:**
- **(вероятность отклонения *ξ* от *a* *не более чем на* *ε*)**

$$P(|\xi - a| \le \varepsilon) = P(a - \varepsilon \le \xi \le a + \varepsilon) =$$

$$= \Phi\left(\frac{a + \varepsilon - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \varepsilon - a}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(|\xi - a| \le \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)}$$

Нормальное распределение

- **Правило «3σ».**

$$P(|\xi - a| \le 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 0{,}9973$$

$\Rightarrow$ **Практически достоверно,** что

$$\underline{N(a,\sigma) \in [a - 3\sigma, a + 3\sigma]}$$

Нормальное распределение

- **Пример.**
- Отклонение длины изготавливаемой детали от стандарта
- - случайная величина, распределенная по нормальному закону.
- Если стандартная длина – 40 см, а среднеквадратическое отклонение – 0,4 см, то какое отклонение длины изделия от стандарта можно ожидать с вероятностью 0,8 ?
- **Решение.**

$$P(|\xi - a| \le \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{\sigma} = 1{,}285$$

$$a = 40\,, \quad \sigma = 0{,}4 \Longrightarrow \varepsilon = 0{,}514 \Longrightarrow 39{,}486 \le \xi \le 40{,}514$$

Функции случайного аргумента

- **Определение.**
- Если любому значению случайной величины X
- соответствует одно возможное значение
- случайной величины Y, то говорят что
- Y – функция случайного аргумента X:

$$Y = \varphi(X)$$

- **Пример.**
- **X –** случайная величина.
- $Y=X^2$ или $Y = (X-a)^2$ -функции от X.

Функции случайного аргумента

$X -$ *дискретная случайная величина*

$p_i = P(X = x_i)$

$Y = \varphi(X) -$ *дискретная случайная величина*

$\varphi -$ *монотонная функция*

$$y_i = \varphi(x_i)$$

$P(Y = y_i) = P(X = x_i) = p_i$

$\varphi -$ *не монотонная функция*

$P(Y = y_i) = ?$

Функции случайного аргумента

- **Пример 1.**

X	0	1	2	3
p	0,3	0,2	0,1	0,4

⇩

$Y=X^2$	0	1	4	9
p	0,3	0,2	0,1	0,4

Функции случайного аргумента

- **Пример 2.**

X	-2	-1	0	1	2	3
p	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

$\Downarrow$

$Y=X^2$	0	1	4	9
p	0,3	**0,4**	**0,2**	0,1

Системы случайных величин

- В случае, когда результат стохастического эксперимента определяется несколькими случайными величинами, то говорят, что имеется **система случайных величин**:

$$\overline{\xi} = \left\{ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \right\}$$ **- (случайный вектор),** ξ_i - компоненты

- **Примеры.** **1.** Заготовка имеет 3 размера –
  - » **длину, ширину и высоту –** случайные величины:

$$\overline{\xi} = \left\{ \xi_x, \xi_y, \xi_z \right\}$$

  - » **2.** при моделировании бюджета одной семьи
  - » затраты – случайный вектор: на питание, на одежду,
  - » обувь, на транспорт, духовные потребности.

Системы случайных величин

- **Двумерные** случайные величины $\overline{\omega} = \{X, Y\}$
- Дискретные - закон распределения $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$

X\Y	y_1	y_2	….	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	….	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	….	p_{2m}
….	….	….	….	….
x_n	p_{n1}	p_{n2}	….	p_{nm}

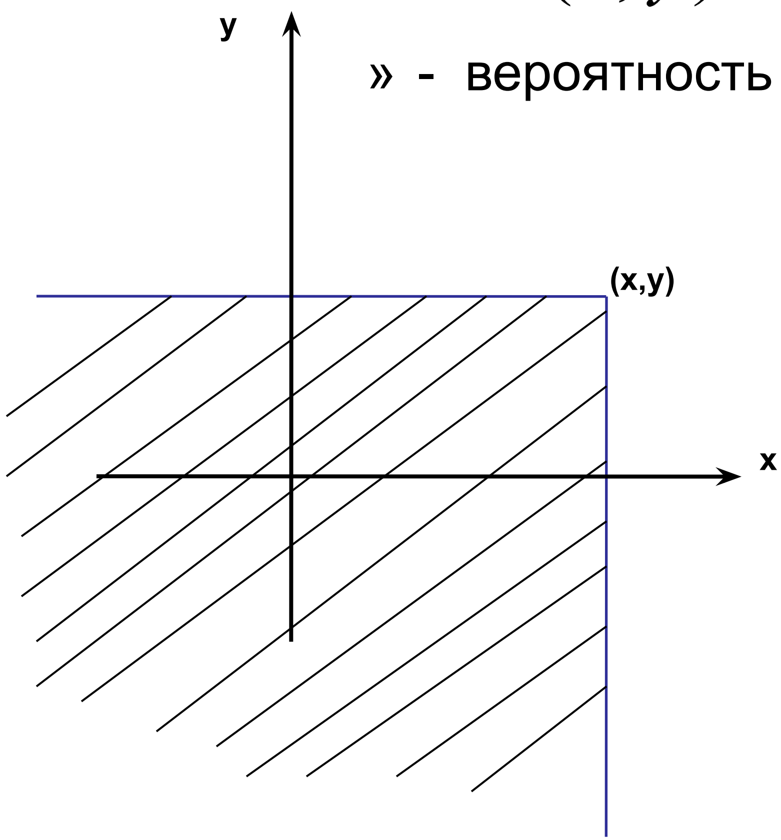
$$\boxed{\sum_{i,j} p_{ij} = 1}$$

Системы случайных величин

- Непрерывные - функция распределения

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

» - вероятность попадания в бесконечный угол



Свойства $F(x, y)$

1. $0 \le F(x, y) \le 1$
2. $F(x, y)$ не убывает по каждому аргументу
3. $\lim\limits_{x, y \to \infty} F(x, y) = 1,$

   $\lim\limits_{x, y \to -\infty} F(x, y) = 0$

Системы случайных величин

- **Плотность распределения** вероятностей случайного вектора.
- **Определение.**
- Плотностью распределения случайного вектора
- называют $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$
- **Свойства плотности**
- **1.** $f(x,y) \geq 0$
- **2.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$

3. $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv$

4. $P(x_1 \leq X \leq x_2; y_1 \leq Y \leq y_2) =$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2} f(u,v)\,dudv$$

Системы случайных величин

- **Зависимость** случайных величин**.**
- Случайный вектор $\overline{\omega} = \{X, Y\}$;
- $f(x, y)$ - плотность, $F(x, y)$ - функция распределения.
- **Определение.**
- Случайные величины **X** и **Y** (компоненты случайного вектора)
- называются **независимыми**, если

$$\boxed{P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y}$$

- **Следствия. 1.** $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

  2. $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

для независимых
случайных величин

Системы случайных величин

- **Ковариация. Коэффициент корреляции.**
- **Определение 1.**
- **Ковариацией** случайных величин **X** и **Y** называют число

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) = M[(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))]}$$

- **Определение 2.**
- **Коэффициентом корреляции** случайных величин **X** и **Y** называют число

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}}$$

Системы случайных величин

- **Свойства.**
- **1.** Если **X** и **Y –** независимые случайные величины, то

$$\operatorname{cov}(X,Y)=0 \longrightarrow \rho(X,Y)=0$$ [обратное неверно]

- **2.** $|\rho(X,Y)| \le 1$
- **3.** Если **X и Y –** линейно зависимые, то есть
- $Y = A\cdot X + B$, то $\rho(X,Y)=\begin{cases}1, & если\ A>0,\\ -1, & если\ A<0\end{cases}$

Моменты случайной величины

- **Определение 1.**
- **Начальным моментом** случайной
- величины X **порядка n**
- называют математическое ожидание $\boxed{d_n = M(X^n)}$: X^n
-

- **Определение 2.**
- **Центральным моментом** случайной
- величины X **порядка n**
- называют математическое ожидание $(X \div a)^n$

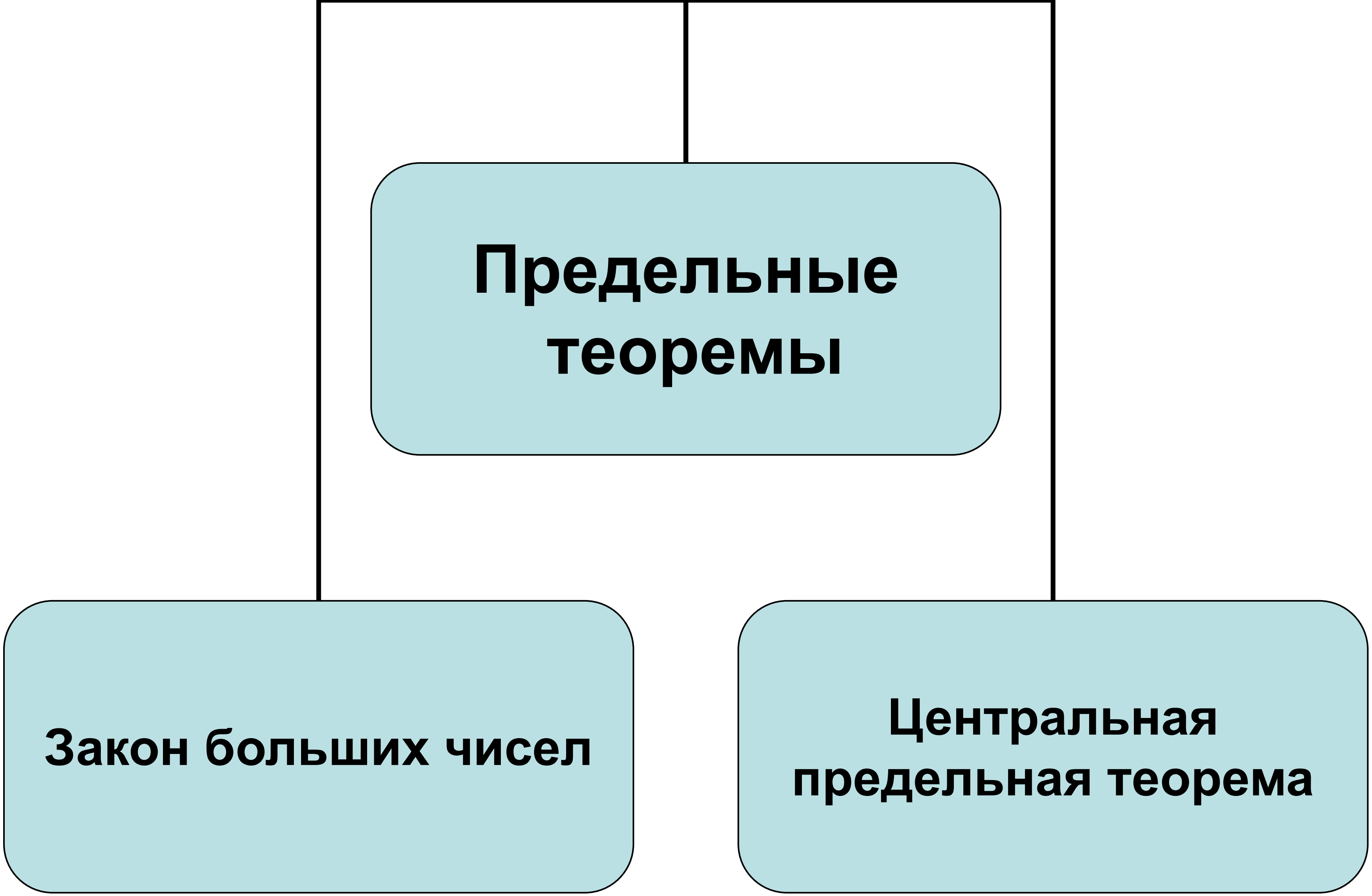
$$\boxed{\mu_n = M((X-a)^n)}, \ где \ \ a = M(X)$$

Моменты случайной величины

- **Определение 3.**
- **Абсолютным центральным моментом**
- случайной величины X порядка n
- называют математическое ожидание $|X-a|^n$:

$$\boxed{M(|X-a|^n)}$$

- Частные случаи:
  - 1) M(X)=a – начальный момент 1-го порядка ;
  - 2) M((X-a))=0 – центральный момент 1-го порядка;
  - 3) $M((X-a)^2)=D(X)$ – центральный момент 2-го порядка.


Предельные теоремы
Закон больших чисел
Центральная предельная теорема

Неравенство Чебышева

- **Пусть X –** случайная величина; $M(X) = a \;,\; D(X) = \sigma^2$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 : P(|X - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}$$

- **Следствие:** Чем меньше дисперсия случайной величины X, тем меньше вероятность отклонения X от a на большую величину.
- **Правило «3σ»** (для любой случайной величины):

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|X - a| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \varepsilon = 3\sigma \;,\; P(|X - a| < 3\sigma) \geq 1 - \frac{1}{9} \approx 0{,}8(8)$$

$$(X \sim N(a, \sigma) \Rightarrow P \approx 0{,}9973)$$

Закон больших чисел

- **Определение.**
- Последовательность случайных величин
- $X_1 , X_2 , \ldots , X_n , \ldots$ сходится по вероятности
- к случайной величине **X**, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

$$(или \quad \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| \le \varepsilon) = 1)$$

– Обозначение: $X_n \xrightarrow{p} X$

Закон больших чисел

- **Теорема Чебышева.**
- Пусть $X_1 , X_2 , \ \dots , X_n , \dots$ - попарно независимые случайные величины; $D(X_n) \le C \quad \forall n$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{p} \frac{a_1 + a_2 + .. + a_n}{n}}$$

- **Среднее арифметическое** независимых случайных величин
- при n – больших - **неслучайная величина.**

Закон больших чисел

- **Теорема Хинчина** (1929 г.).
- Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ - независимые случайные величины, $M(\xi_i) = a$
- Тогда

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \xrightarrow{p} a}$$

- При достаточно большом числе независимых опытов
- среднее арифметическое наблюденных значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию.
  - Практический смысл: при измерении физической величины в качестве точного значения берут среднее арифметическое нескольких измерений.

Центральная предельная теорема

- **Теорема.**
- Пусть $X_1 , X_2 , \ \ldots , X_n , \ldots$ - независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с математическим ожиданием а и дисперсией σ² .
- Пусть $Y_n = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - a)$ - нормированные случайные величины.
- Тогда $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Y \sim N(0,1)$
- то есть

$$P(Y_n \in [a,b]) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Центральная предельная теорема

- **Теорема Ляпунова** (1901 г.).
- Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ - независимые случайные величины, имеющие конечный третий абсолютный центральный момент $c_n = M(|X_n - a_n|^3)$.
- Пусть $Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \text{и} \quad B_n = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2}$$

$$C_n = \sqrt[3]{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}$$

- Тогда , если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{C_n}{B_n} = 0$, то

$$\boxed{\frac{Y_n - A_n}{B_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} Y \sim N(0,1)}$$

Центральная предельная теорема

- **Распределение** Y_n **- асимптотически нормально с параметрами**

  $$a = \lim_{n \to \infty} A_n \quad и \quad \sigma = \lim_{n \to \infty} B_n$$

$$\Downarrow$$

Вклад каждой отдельной случайной величины в общую сумму – малый.

Центральная предельная теорема

- **Следствие:** нормальный закон занимает особое место в теории ошибок измерений.
- Ошибку измерения можно рассматривать как сумму большого числа независимых слагаемых, каждое из которых дает малый вклад в общую сумму.
- $\Longrightarrow$ Распределение ошибки измерений близко к нормальному закону.

- ***Замечание*** ***(****Липман****).***
  - *Каждый уверен в справедливости закона ошибок:*
    - *Экспериментаторы – потому что они думают, что это математическая теорема,*
    - *Математики – потому что они думают, что это экспериментальный факт.*

Центральная предельная теорема

- **Пример.**
- В геодезии причинами возникновения ошибок являются
  - влияние внешних условий
  - неточности изготовления и юстировки приборов
  - неточности выполнения измерений наблюдателем
    - При измерении горизонтального направления
      - многократное преломление лучей
      - неравномерное освещение объекта
      - неустойчивость сигнала
      - вращение прибора вследствие нагревания солнцем («кручение»)
      - неустойчивость теодолита
      - температурные и другие изменения в приборе
      - ошибки юстировки
      - ошибки разделения горизонтального круга
      - личные ошибки наблюдателя
      - и т.д.

Опыт подтверждает - распределение ошибки измерений близко к нормальному закону.