

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Случайные величины

<http://prezentacija.biz/>

# Схема Бернулли

- Рассмотрим последовательность **n независимых однородных** испытаний (экспериментов).
  - Испытания считаем **независимыми**, если результат испытания не зависит от номера испытания и от того, что произошло до этого испытания.
  - **Однородными** испытаниями считаем такие, которые проводятся в одинаковых условиях.

Пусть в каждом испытании событие **A** может произойти с вероятностью **p**

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - p = q$$

# Формула Бернулли

- Вероятность того, что при  $n$  испытаниях
- событие  $A$  наступит  $k$ -раз:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

где  $C_n^k$  — число сочетаний

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

# Схема Бернулли

- **Пример.**
- Вероятность того, что образец бетона при испытании выдержит нормативную нагрузку, равна 0,9.
- Найти вероятность того, что из 7 образцов 5 выдержат испытания.
- **Решение.**
- По формуле Бернулли

$$P_7^5 = C_7^5 p^5 q^2 = \frac{7!}{5!2!} 0,9^5 0,1^2 = 0,124$$

# Схема Бернулли

- **Асимптотические формулы.**

- **1. Формула Пуассона.**

- Пусть число испытаний  $n$  - велико ( $n \rightarrow \infty$ )

- Вероятность  $p$  события  $A$  – мала ( $p \rightarrow 0$ )

- Причем  $np \rightarrow a$

- Тогда при любом фиксированном  $k$

$$P_n(k) \cong \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

**Закон редких событий**

(  $n \gg 100$  ,  $a = np \ll 10$  )

# Схема Бернулли

- **Пример 1 .**
- Известно, что при транспортировке 2,5% декоративной плитки повреждается. Определить вероятность того, что в партии из 200 плиток оказалось поврежденными:
- **а) ровно 4 плитки; б) не более 6 плиток.**
- **Решение.**
- Вероятность того, что плитка окажется поврежденной,
- $p=0.025$  – *мала*, число испытаний  $n=200$  – *велико*, причем  $np=5 < 10$ .
- **По формуле Пуассона:**
- **а)**  $P_{200}(4) \cong \frac{5^4}{4!} e^{-5} \approx 0,18$     **б)**  $P_{200}(i \leq 6) \cong e^{-5} \sum_{i=0}^6 \frac{5^i}{i!} \approx 0,76$

# Схема Бернулли

- **2. Локальная теорема Муавра-Лапласа.**
- Пусть число испытаний  $n$  – велико ( $n \rightarrow \infty$ )
- Вероятность  $p$  события  $A$  – не очень мала ( $0 \ll p \ll 1$ )
- *( $p$  не близко к 0 и к 1)*
- Тогда при любом фиксированном  $k$

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

$$\text{где } \varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

# Схема Бернулли

- **3. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.**

Пусть число испытаний  $n$  – велико ( $n \rightarrow \infty$ )

Вероятность  $p$  события  $A$  – не очень мала ( $0 \ll p \ll 1$ )

( $p$  не близко к 0 и к 1)

Тогда вероятность того, что событие  $A$  наступит

не менее  $k$ -раз и не более  $m$ -раз,

приблизительно равна

$$P_n(k \leq i \leq m) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$  – функция Лапласа

$$x_1 = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$



# Схема Бернулли

- **Пример 2 .**

- Завод изготавливает 80% высоконапорных железобетонных труб первого сорта.
- Определить вероятность того, что из 100 труб 75 будет первого сорта.

- **Решение.**

- $n = 100$  – велико,  $p = 0,8$  – не близко к 0 и к 1.

- По локальной теореме Муавра –Лапласа:

$$P_{100}(75) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \varphi\left(\frac{75 - 80}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) =$$
$$= 0,25\varphi(-1,25) \approx 0,046$$

# Схема Бернулли

- **Пример 3 .**
- Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8.
- Производится 100 выстрелов.
- Норматив считается выполненным, если цель будет поражена не менее 75 раз.
- Определить вероятность выполнения норматива.
- **Решение.**
- По интегральной теореме Муавра-Лапласа:

$$P_{100}(75 \leq i \leq 100) \cong \Phi\left(\frac{100 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) =$$
$$= \Phi(5) - \Phi(-1,25) = 0,5 + 0,3943 \approx 0,89$$

# Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности

- **Задача.**
- Производится  $n$  независимых однородных испытаний.
- В каждом испытании событие **A** может наступить
- с вероятностью  $p$ , где  $0 \ll p \ll 1$ .
- Найти вероятность того, что **относительная частота**  $\nu = \frac{k}{n}$
- **отклонится от вероятности  $p$**  (по абсолютной величине)
- **не более чем на  $\varepsilon > 0$**  :

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = ?$$

# Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности

- Решение.  $\left| \frac{k}{n} - p \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow np - n\varepsilon \leq k \leq np + n\varepsilon$

- По интегральной теореме Муавра-Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P(np - n\varepsilon \leq k \leq np + n\varepsilon) = \\ = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где  $x_1 = \frac{(np - n\varepsilon) - np}{\sqrt{npq}} = -\sqrt{\frac{n}{pq}} \cdot \varepsilon$ ,  $x_2 = \frac{(np + n\varepsilon) - np}{\sqrt{npq}} = \sqrt{\frac{n}{pq}} \cdot \varepsilon$

# Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности

- Тогда

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}} \cdot \varepsilon\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{n}{pq}} \cdot \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}} \cdot \varepsilon\right)$$

- Анализ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad P(|v - p| \leq \varepsilon) \rightarrow 1$$

$$\longrightarrow \boxed{P(|v - p| < \varepsilon) \rightarrow 0} \quad \boxed{v = \frac{k}{n}}$$

# Случайная величина

- **Определение.**
- Случайной величиной называется числовая величина (числовая функция), значение которой может меняться в зависимости от результата стохастического эксперимента.
  - Обозначения:  $X, Y, Z...$  или  $\xi, \eta, \mu...$

## Пример 1.

- 1. Число вызовов, поступивших от абонентов на телефонную станцию в течение определенного промежутка времени, является случайным и принимает те или иные значения в зависимости от случайных обстоятельств.

# Случайная величина

- **Пример 2.**

- Рассмотрим схему Бернулли:
- последовательность  $n$  независимых однородных испытаний,
- событие  $A$  – случайное событие, которое может наступить при каждом испытании.

$\Omega = \{\omega\}$  – пространство элементарных событий,

где  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$

- $\omega_i = 1$  , если при  $i$ -ом испытании событие  $A$  наступило, и
- $\omega_i = 0$  , если оно не наступило.
- Случайная величина  $X = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$
- - число наступлений события  $A$  в схеме Бернулли.

```
graph TD; A[Случайная величина] --- B[дискретная]; A --- C[непрерывная]
```

Случайная  
величина

дискретная

непрерывная



# Случайная величина

- **Дискретная случайная величина** – такая случайная величина, которая может принимать **конечное** или **счетное** множество значений.
- **Значения непрерывной случайной величины** – принадлежат **интервалу** (конечному или бесконечному).

# Случайная величина

- **Пример 3.** Рассмотрим схему Бернулли:
- последовательность  $n$  независимых однородных испытаний,
- $A$  – случайное событие, которое может наступить при каждом испытании.
- Пусть  $X$  – число наступлений события  $A$ .
- $X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  – **дискретная** случайная величина.
- **Пример 4.**
- Проводятся независимые однородные испытания **до первого появления** события  $A$ .
- Пусть  $\xi$  – функция, равная числу испытаний, проведенных до первого появления события  $A$ .
- $\xi = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  – **дискретная** случайная величина.

# Случайная величина

- **Пример 5.**
- Случайным образом бросают точку на отрезок  $[a, b]$ .
- $X$  – координата точки попадания.
- $X \in [a, b]$  – непрерывная случайная величина.
  
- **Пример 6.**
- Время работы прибора без поломки  $\mu$  – непрерывная случайная величина.
- $\mu \in (0, \infty)$

# Способы задания случайной величины

- **Функция распределения и ее свойства.**

- **Определение.**

- Функция  $F(x)$ , равная вероятности того, что случайная величина  $\xi$  примет значение меньше  $x$ , называется **функцией**

**распределения:** 
$$F(x) = P(\xi \leq x)$$

- **Свойства.**

- 1. Область определения  $F(x)$ :  $x \in (-\infty, \infty)$ .
- 2. Область значений :  $0 \leq F(x) \leq 1$ .
- 3. Функция  $F(x)$  – неубывающая:  $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
- 4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- 5. Вероятность попадания в интервал  $(a, b)$ :

$$P(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a)$$

# Закон распределения дискретной случайной величины

- **Определение.**

- **Закон распределения** дискретной случайной величины – это **соответствие** между возможными значениями и вероятностями, с которыми эти значения принимает случайная величина.

- **Способы задания:**

- Таблично

$\xi$	$x_1$	...	$x_n$
$P$	$p_1$	...	$p_n$

- Аналитически  $P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$

## Графически



# Закон распределения дискретной случайной величины

- **Примеры.**
- **1. Биномиальный закон** ( в схеме Бернулли):

$$P(\mu = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

- **2. Равномерное распределение** ( в классической схеме):

$$P(\xi = k) = \frac{1}{n}$$

- **3. Распределение Пуассона:**

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

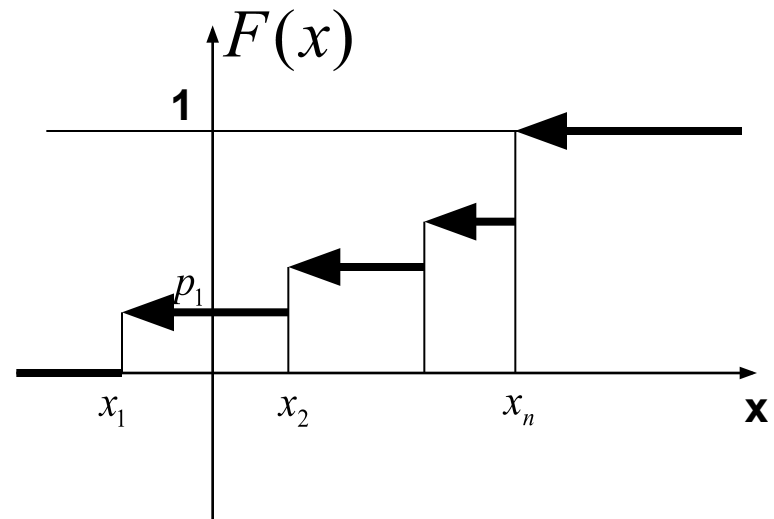
# Дискретная случайная величина

- **Основное свойство**
- закона распределения:

$$\sum_{(i)} p_i = 1$$

- Функция распределения –
- **кусочно-непрерывная** функция.
- График функции распределения –
- **ступенчатая фигура.**

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$



# Непрерывная случайная величина

- **Определение.**
- Случайная величина  $\xi$  называется **непрерывной**, если ее функция распределения  $F(x)$ - **непрерывная при всех  $x$**  и имеет почти всюду **производную  $F'(x)=f(x)$** .
- В этом случае **функция  $f(x)$  называется плотностью распределения вероятности.**
  - **Замечания.** В некоторых учебниках такие случайные величины называют **абсолютно непрерывными**.
  - Если  $F(x)$ - непрерывная и не дифференцируемая функция, то в этом случае случайную величину называют **сингулярной**.



# Свойства плотности распределения

- 1.  $f(x) \geq 0$
- 2.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- 3.  $P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
- 4.  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

# Непрерывная случайная величина

- **Пример.**

- Случайным образом бросают точку на отрезок  $[0, 1]$ .

- $\xi$  – координата точки попадания.

- Найти **функцию распределения  $F(x)$  и плотность  $f(x)$** .

- **Решение.**

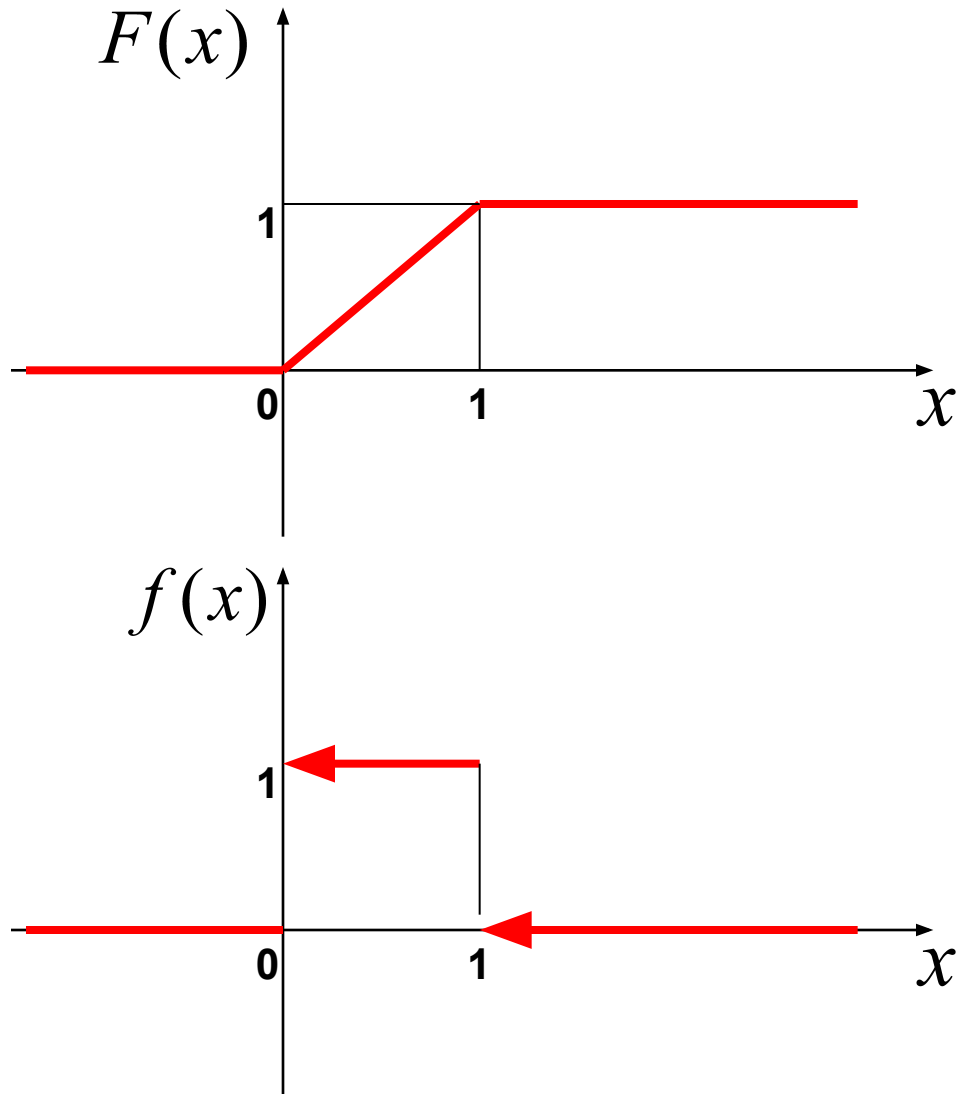
- Из определения:

$$F(x) = P(\xi \leq x) \implies F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ x, & \text{если } x \in (0, 1] \\ 1, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

---

$$f(x) = F'(x) \implies f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ 1, & \text{если } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

# Непрерывная случайная величина



# Числовые характеристики случайных величин

- **Математическое ожидание.**
- **Определение.**
- **Математическим ожиданием**
- **дискретной случайной величины  $\xi$**
- **называется число, равное**

$$M\xi = \sum_{(i)} x_i p_i$$

*где  $x_i$  – значения случайной величины,  
 $p_i$  – их вероятности.*

# Числовые характеристики случайных величин

- **Математическим ожиданием** непрерывной случайной величины  $\xi$  называется число, равное

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

где  $f(x)$  – плотность распределения.

# Числовые характеристики случайных величин

- **Свойства математического ожидания.**
- **1.**  $M(C) = C$ , где  $C$  – постоянная.
- **2.**  $M(C\xi) = C \cdot M(\xi)$
- **3.**  $M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta)$ ,  
где  $\xi$  и  $\eta$  – случайные величины.
- **4.**  $M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta)$ ,  
если  $\xi$  и  $\eta$  – независимые случайные величины.

# Числовые характеристики случайных величин

- **Пример 1.**

- Случайным образом бросают точку на отрезок  $[0, 1]$ .
- $\xi$  – координата точки попадания.

- Найти **математическое ожидание**  $M(\xi)$

- **Решение.**

- Из определения:  $M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ 1, & \text{если } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{если } x \geq 1 \end{cases} \implies M(\xi) = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

# Числовые характеристики случайных величин

- **Дисперсия случайной величины.**
- **Определение.**
- Дисперсией случайной величины  $\xi$  называется
- **математическое ожидание** квадрата отклонения
- случайной величины от ее
- **математического ожидания:**

$$D(\xi) = M(\xi - a)^2,$$

$$\text{где } a = M(\xi)$$



# Числовые характеристики случайных величин

- **Свойства дисперсии.**

- **1.**  $D(C) = 0$

- **2.**  $D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D(\xi)$

- **3.**  $D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta),$

*если  $\xi$  и  $\eta$  – независимые случайные величины.*

- **4. Следствие.**

$$D(\xi - \eta) = D(\xi) + D(\eta),$$

*если  $\xi$  и  $\eta$  – независимые случайные величины.*

# Числовые характеристики случайных величин

$$D(\xi) = M(\xi^2) - a^2$$

- **Доказательство.**

$$\begin{aligned} D(\xi) &= M(\xi - a)^2 = M(\xi^2 - 2a\xi + a^2) = \\ &= M(\xi^2) - 2aM(\xi) + M(a^2) = \\ &= M(\xi^2) - a^2, \end{aligned}$$

*так как*  $a = M(\xi)$

# Числовые характеристики случайных величин

- **Среднеквадратическое отклонение случайной величины.**
- **Определение.**
- Среднеквадратическим отклонением
- случайной величины  $\xi$  называется число

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}$$

- **Свойства.**
- 1.  $\sigma(\xi) \geq 0$ ,  $\sigma(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = C$
- 2.  $\sigma(C\xi) = |C|\sigma(\xi)$

# Числовые характеристики случайных величин

- **Пример 2.**

- Случайным образом бросают точку на отрезок  $[0, 1]$ .
- $\xi$  – координата точки попадания.

- **Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение.**

- **Решение.**

- Из формулы:  $D(\xi) = M(\xi^2) - a^2$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ 1, & \text{если } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$

$$a = M(\xi) = \frac{1}{2}$$



$$M(\xi^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$D(\xi) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

# Обзор стандартных распределений

Дискретные случайные величины

```
graph TD; A[Дискретные случайные величины] --- B[Биномиальное распределение]; A --- C[Распределение Пуассона]; A --- D[Геометрическое распределение];
```

Биномиальное распределение

Распределение Пуассона

Геометрическое распределение

# Обзор стандартных распределений

Непрерывные случайные величины

Равномерное распределение

Показательное распределение

Нормальное распределение

# Биномиальное распределение

- $\xi$  = (число «успехов» при  $n$  испытаниях в схеме Бернулли).
- **Закон распределения:**

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$p$  – вероятность "успеха",

$q = 1 - p$ ;  $k = 0, 1, \dots, n$ .

$n$ ,  $p$  – параметры распределения.

$$M(\xi) = a = np$$

$$D(\xi) = \sigma^2 = npq$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

**Приме  
р**



# Распределение Пуассона

- $\xi = (0, 1, 2, \dots, n, \dots)$
- **Закон распределения:**

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

$a$  – параметр распределения.

$$M(\xi) = a$$

$$D(\xi) = a$$

$$\sigma = \sqrt{a}$$





# Геометрическое распределение

- $\xi=(0,1,2,\dots,n,\dots)$
- **Закон распределения:**

$$P(\xi = k) = p \cdot q^k$$

$p$  – параметр распределения –  
– вероятность "успеха"

$$M(\xi) = \frac{q}{p}$$

$$D(\xi) = \frac{q}{p^2}$$

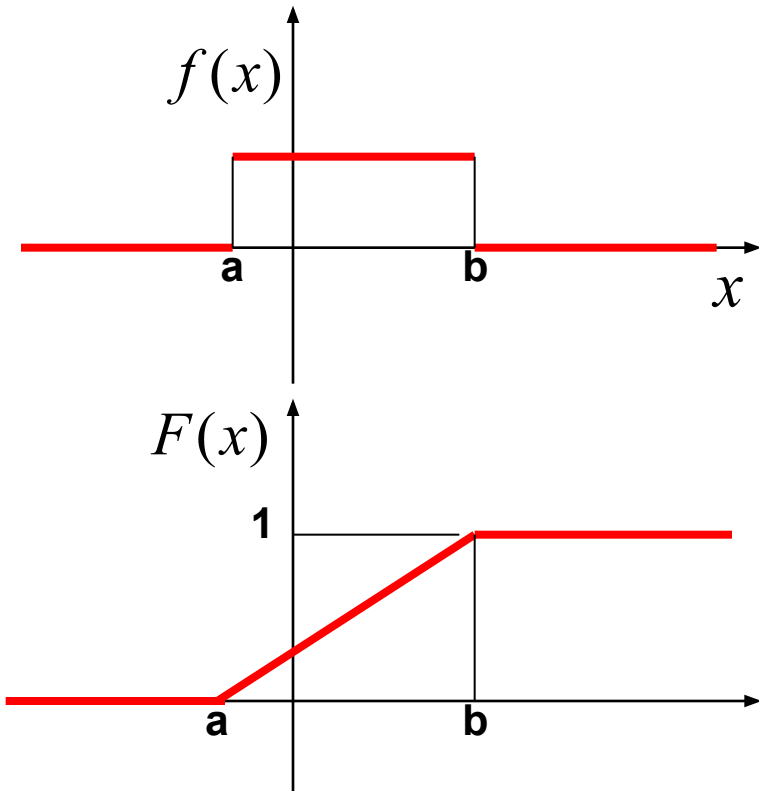
$$\sigma = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

**Приме  
р**



# Равномерное распределение

$$\xi \in (-\infty, \infty)$$



Пример

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2}$$

$$D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

- Плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b] \\ 0, & \text{если } x \notin [a, b] \end{cases}$$

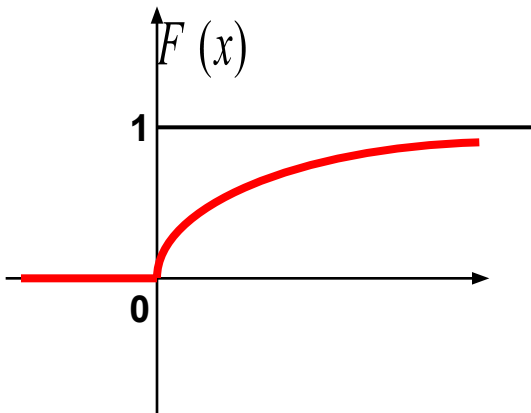
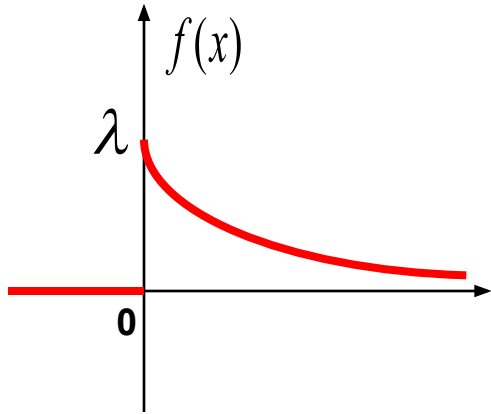
- Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b] \\ 1, & \text{если } x \geq b \end{cases}$$



# Показательное распределение

$$\xi \in (-\infty, \infty)$$



- **Плотность распределения:**

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

- **Функция распределения:**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda} \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \sigma = \frac{1}{\lambda}$$



# Нормальное распределение

- **Определение.**
- Непрерывная случайная величина  $\xi$
- имеет **нормальное распределение**
- **с параметрами  $a$  и  $\sigma$ ,**
- если плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\xi \sim N(a, \sigma)$$

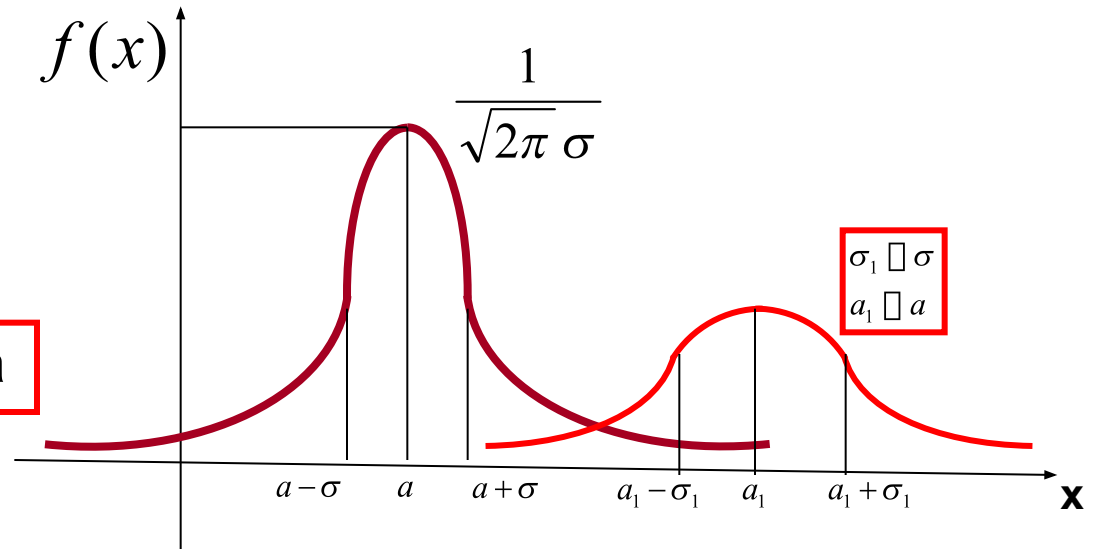
- **Вероятностный смысл параметров:**

$$a = M(\xi), \quad \sigma = \sqrt{D(\xi)}$$

# Нормальное распределение

- График плотности распределения.

Кривая Гаусса



- Нормированное распределение.

$$a = 0, \sigma = 1 \quad \longrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x)$$

# Нормальное распределение

- Функция распределения.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_a^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

||

$$\frac{1}{2}$$

?

||

$$\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) - \text{функция Лапласа}$$



$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

# Нормальное распределение

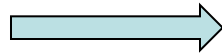
- Вероятность попадания в интервал.

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq \xi \leq x_2) &= F(x_2) - F(x_1) = \\ &= \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

- Следствие:

- (вероятность отклонения  $\xi$  от  $a$  не более чем на  $\varepsilon$ )

$$\begin{aligned} P(|\xi - a| \leq \varepsilon) &= P(a - \varepsilon \leq \xi \leq a + \varepsilon) = \\ &= \Phi\left(\frac{a + \varepsilon - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \varepsilon - a}{\sigma}\right) \end{aligned}$$



$$P(|\xi - a| \leq \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

# Нормальное распределение

- Правило «3σ».

$$P(|\xi - a| \leq 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 0,9973$$



**Практически достоверно, что**

$$\underline{N(a, \sigma) \in [a - 3\sigma, a + 3\sigma]}$$



# Нормальное распределение

- **Пример.**
- Отклонение длины изготавливаемой детали от стандарта
- - случайная величина, распределенная по нормальному закону.
- Если стандартная длина – 40 см, а среднеквадратическое отклонение – 0,4 см, то какое отклонение длины изделия от стандарта можно ожидать с вероятностью 0,8 ?
- **Решение.**

$$P(|\xi - a| \leq \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0,8 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0,4 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\sigma} = 1,285$$

$$a = 40, \sigma = 0,4 \implies \varepsilon = 0,514 \implies 39,486 \leq \xi \leq 40,514$$

# Функции случайного аргумента

- **Определение.**
- Если **любому значению** случайной величины  $X$
- соответствует **одно возможное значение**
- случайной величины  $Y$ , то говорят что
- $Y$  – **функция случайного аргумента**  $X$ :

$$Y = \varphi(X)$$

- **Пример.**
- $X$  – случайная величина.
- $Y=X^2$  или  $Y = (X-a)^2$  -функции от  $X$ .

# Функции случайного аргумента

*$X$  – дискретная случайная величина*

$$p_i = P(X = x_i)$$



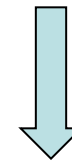
*$Y = \varphi(X)$  – дискретная случайная величина*



*$\varphi$  – монотонная функция*

$$y_i = \varphi(x_i)$$

$$P(Y = y_i) = P(X = x_i) = p_i$$



*$\varphi$  – не монотонная функция*

$$P(Y = y_i) = ?$$

# Функции случайного аргумента

- Пример 1.

X	0	1	2	3
p	0,3	0,2	0,1	0,4

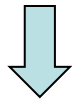


$Y=X^2$	0	1	4	9
p	0,3	0,2	0,1	0,4

# Функции случайного аргумента

- Пример 2.

X	-2	-1	0	1	2	3
p	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1



$Y=X^2$	0	1	4	9
p	0,3	<b>0,4</b>	<b>0,2</b>	0,1

# Системы случайных величин

- В случае, когда результат стохастического эксперимента определяется **несколькими случайными величинами**, то говорят, что имеется **система случайных величин**:

$$\bar{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} - \text{(случайный вектор)}, \quad \xi_i - \text{компоненты}$$

- **Примеры.** 1. Заготовка имеет 3 размера –
  - » **длину, ширину и высоту** – случайные величины:

$$\bar{\xi} = \{\xi_x, \xi_y, \xi_z\}$$

- » 2. при моделировании бюджета одной семьи
  - » **затраты – случайный вектор**: на питание, на одежду, обувь, на транспорт, духовные потребности.

# Системы случайных величин

- **Двумерные** случайные величины  $\bar{\omega} = \{X, Y\}$
- **Дискретные** - закон распределения  $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$

$X \backslash Y$	$y_1$	$y_2$	....	$y_m$
$x_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	....	$p_{1m}$
$x_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	....	$p_{2m}$
....	....	....	....	....
$x_n$	$p_{n1}$	$p_{n2}$	....	$p_{nm}$

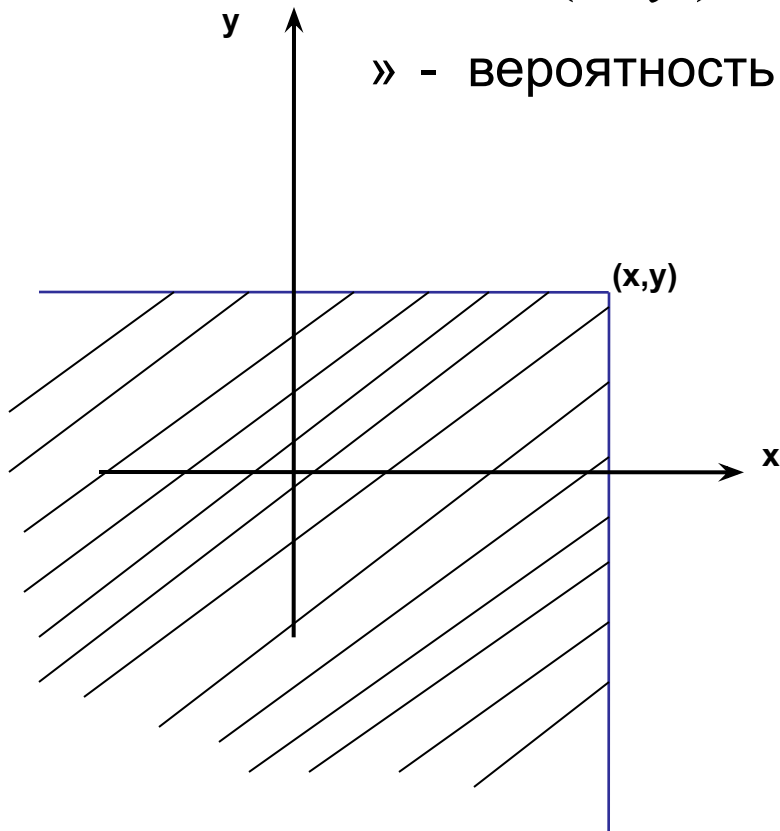
$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

# Системы случайных величин

- **Непрерывные** - функция распределения

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

» - вероятность попадания в бесконечный угол



**Свойства**  $F(x, y)$

1.  $0 \leq F(x, y) \leq 1$
2.  $F(x, y)$  не убывает по каждому аргументу
3.  $\lim_{x, y \rightarrow \infty} F(x, y) = 1,$   
 $\lim_{x, y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$



# Системы случайных величин

- Плотность распределения вероятностей случайного вектора.
- **Определение.**
- **Плотностью** распределения случайного вектора

- называют  $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$

- **Свойства плотности**

- 1.  $f(x, y) \geq 0$

- 2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$

- 3.  $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$

- 4.  $P(x_1 \leq X \leq x_2; y_1 \leq Y \leq y_2) =$   
 $= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(u, v) du dv$

# Системы случайных величин

- **Зависимость** случайных величин.
- Случайный вектор  $\bar{\omega} = \{X, Y\}$  ;
- $f(x, y)$  - плотность,  $F(x, y)$  - функция распределения.
- **Определение.**
- Случайные величины **X** и **Y** (компоненты случайного вектора)
- называются **независимыми**, если

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)$$

- **Следствия.** 1.  $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$
  - 2.  $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$
- для независимых случайных величин

# Системы случайных величин

- Ковариация. Коэффициент корреляции.
- **Определение 1.**
- **Ковариацией** случайных величин  $X$  и  $Y$  называют число

$$\text{cov}(X, Y) = M[(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))]$$

- **Определение 2.**
- **Коэффициентом корреляции** случайных величин  $X$  и  $Y$  называют число

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

# Системы случайных величин

- **Свойства.**

- 1. Если  $X$  и  $Y$  – **независимые** случайные величины, то

$$\text{cov}(X, Y) = 0 \implies \rho(X, Y) = 0 \quad [\text{обратное неверно}]$$

- 2.  $|\rho(X, Y)| \leq 1$

- 3. Если  $X$  и  $Y$  – **линейно зависимые**, то есть

- $Y = A \cdot X + B$  , то  $\rho(X, Y) = \begin{cases} 1, & \text{если } A > 0, \\ -1, & \text{если } A < 0 \end{cases}$

# Моменты случайной величины

- **Определение 1.**

- **Начальным моментом** случайной
- величины  $X$  **порядка  $n$**
- называют **математическое ожидание**

$$: X^n$$

- **Определение 2.**

- **Центральным моментом** случайной
- величины  $X$  **порядка  $n$**
- называют **математическое ожидание**

$$(X - a)^n$$

$$\mu_n = M((X - a)^n), \text{ где } a = M(X)$$

# Моменты случайной величины

- **Определение 3.**
- **Абсолютным центральным моментом**
- случайной величины  $X$  порядка  $n$
- называют **математическое ожидание**  $|X - a|^n$  :

$$M(|X - a|^n)$$

– **Частные случаи:**

- 1)  $M(X)=a$  – начальный момент 1-го порядка ;
- 2)  $M((X-a))=0$  – центральный момент 1-го порядка;
- 3)  $M((X-a)^2)=D(X)$  – центральный момент 2-го порядка.

```
graph TD; A[Пределные теоремы] --- B[Закон больших чисел]; A --- C[Центральная предельная теорема];
```

**Пределные  
теоремы**

**Закон больших чисел**

**Центральная  
предельная теорема**

# Неравенство Чебышева

- Пусть  $X$  – случайная величина;  $M(X) = a$  ,  $D(X) = \sigma^2$

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|X - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

- **Следствие:** Чем меньше дисперсия случайной величины  $X$ , тем меньше вероятность отклонения  $X$  от  $a$  на большую величину.
- **Правило «3 $\sigma$ »** (для любой случайной величины):

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|X - a| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$\implies \varepsilon = 3\sigma , P(|X - a| < 3\sigma) \geq 1 - \frac{1}{9} \approx 0,8(8)$$

$$(X \sim N(a, \sigma) \implies P \approx 0,9973)$$



# Закон больших чисел

- **Определение.**
- Последовательность случайных величин
- $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  **сходится по вероятности**
- к случайной величине  **$X$** , если

$$\forall \varepsilon > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

---

$$(или \quad \forall \varepsilon > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \leq \varepsilon) = 1)$$

– Обозначение:  $X_n \xrightarrow{p} X$

# Закон больших чисел

- **Теорема Чебышева.**

- Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  - попарно независимые случайные величины;  $D(X_n) \leq C \quad \forall n$



$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{p} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

- Среднее арифметическое независимых случайных величин
- при  $n$  – больших - **неслучайная величина.**

# Закон больших чисел

- **Теорема Хинчина** (1929 г.).

- Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  - независимые случайные величины,  $M(\xi_i) = a$

- Тогда

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \xrightarrow{p} a$$

- При достаточно большом числе независимых опытов

- **среднее арифметическое** наблюдаемых значений случайной величины **сходится по вероятности** к ее **математическому ожиданию**.

- **Практический смысл**: при измерении физической величины в качестве **точного значения** берут **среднее арифметическое** нескольких измерений.

# Центральная предельная теорема

- **Теорема.**

- Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  - **независимые** случайные величины, имеющие **один и тот же закон распределения** с математическим ожиданием  **$a$**  и дисперсией  **$\sigma^2$** .

- Пусть  $Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - a)$  - нормированные случайные величины.

- Тогда  $Y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Y \sim N(0,1)$

- то есть

$$P(Y_n \in [a, b]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

# Центральная предельная теорема

- **Теорема Ляпунова (1901 г.).**
- Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  - **независимые** случайные величины, имеющие конечный **третий абсолютный центральный момент**  $c_n = M(|X_n - a_n|^3)$ .
- Пусть  $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$   
 $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  и  $B_n = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}$   
 $C_n = \sqrt[3]{c_1 + c_2 + \dots + c_n}$
- Тогда, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{B_n} = 0$ , то

$$\frac{Y_n - A_n}{B_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Y \sim N(0,1)$$

# Центральная предельная теорема


- Распределение  $Y_n$  - асимптотически нормально с параметрами

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \quad \text{и} \quad \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$$



Вклад каждой отдельной случайной величины в общую сумму – малый.

# Центральная предельная теорема

- **Следствие:** нормальный закон занимает особое место в теории ошибок измерений.
- Ошибку измерения можно рассматривать как сумму большого числа независимых слагаемых, каждое из которых дает малый вклад в общую сумму.
-  Распределение ошибки измерений близко к нормальному закону.
- **Замечание (Липман).**
  - Каждый уверен в справедливости закона ошибок:
    - *Экспериментаторы* – потому что они думают, что это математическая теорема,
    - *Математики* – потому что они думают, что это экспериментальный факт.

# Центральная предельная теорема

- **Пример.**
- В геодезии причинами возникновения ошибок являются
  - влияние внешних условий
  - неточности изготовления и юстировки приборов
  - неточности выполнения измерений наблюдателем
    - При измерении горизонтального направления
      - многократное преломление лучей
      - неравномерное освещение объекта
      - неустойчивость сигнала
      - вращение прибора вследствие нагревания солнцем («кручение»)
      - неустойчивость теодолита
      - температурные и другие изменения в приборе
      - ошибки юстировки
      - ошибки деления горизонтального круга
      - личные ошибки наблюдателя
      - и т.д.

**Опыт подтверждает - распределение ошибки измерений близко к нормальному закону.**