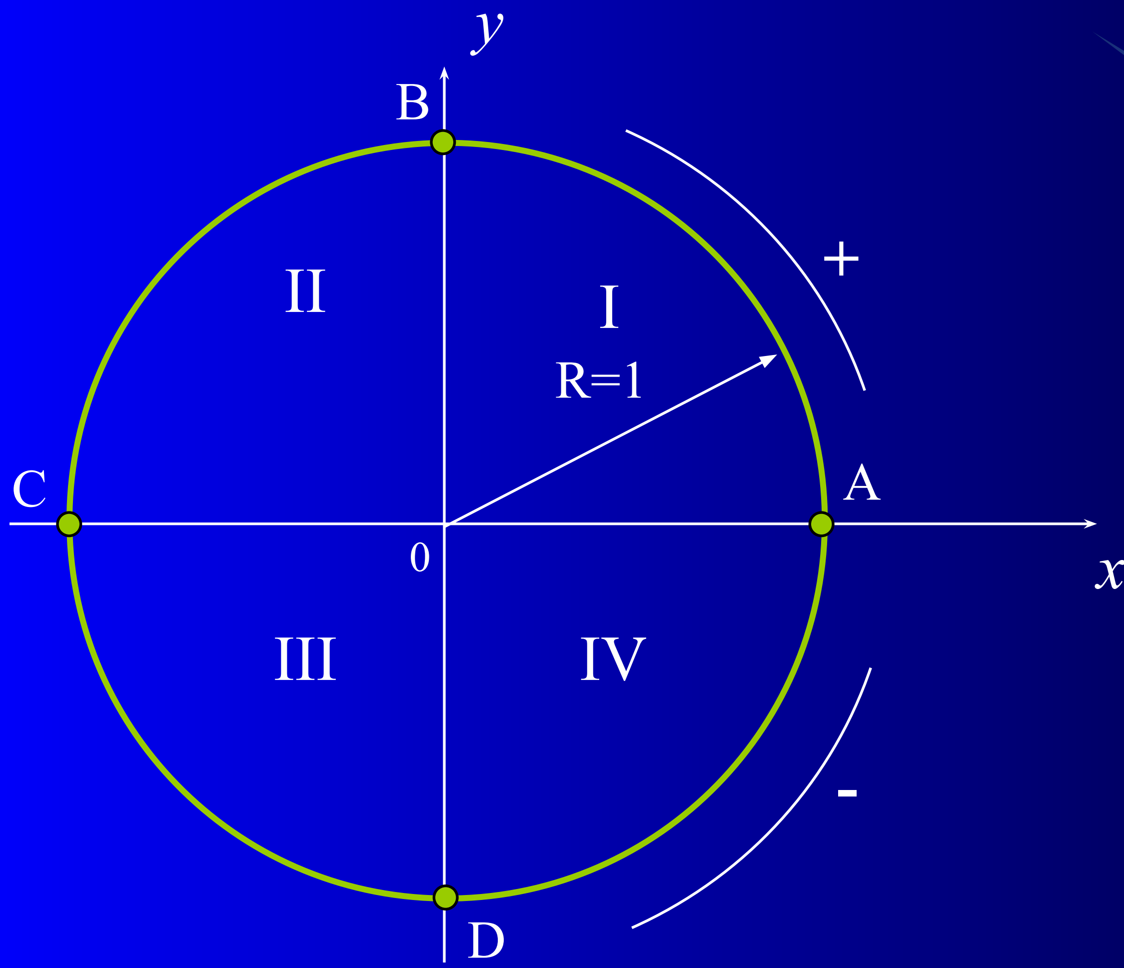
Тождественные преобразовании тригонометрических выражений

Лекция 4

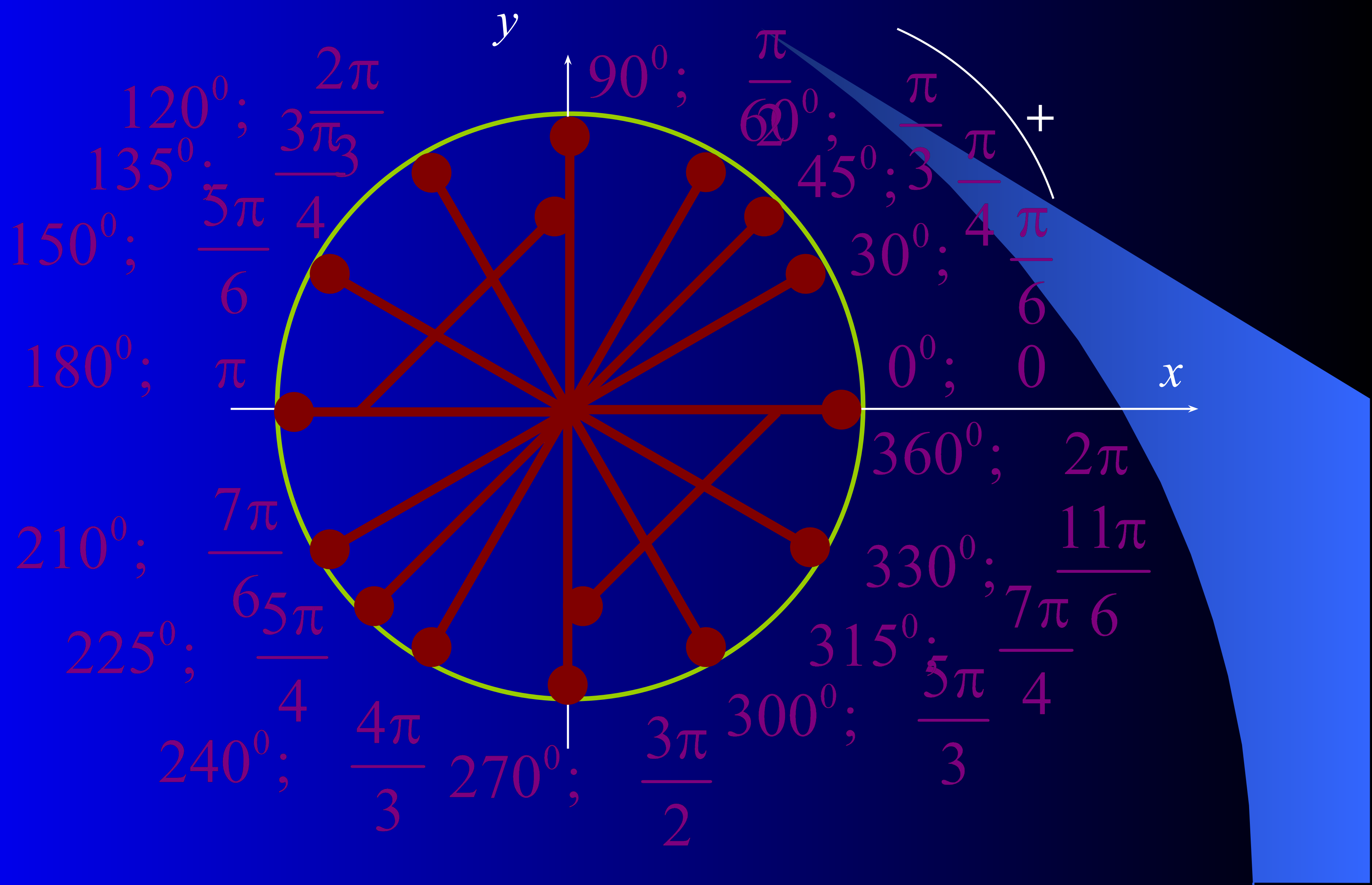
Основные понятия

- ✔ *тригонометрическая окружность*
- ✔ *градусы и радианы*
- ✔ *синус и косинус*
- ✔ *тангенс и котангенс*

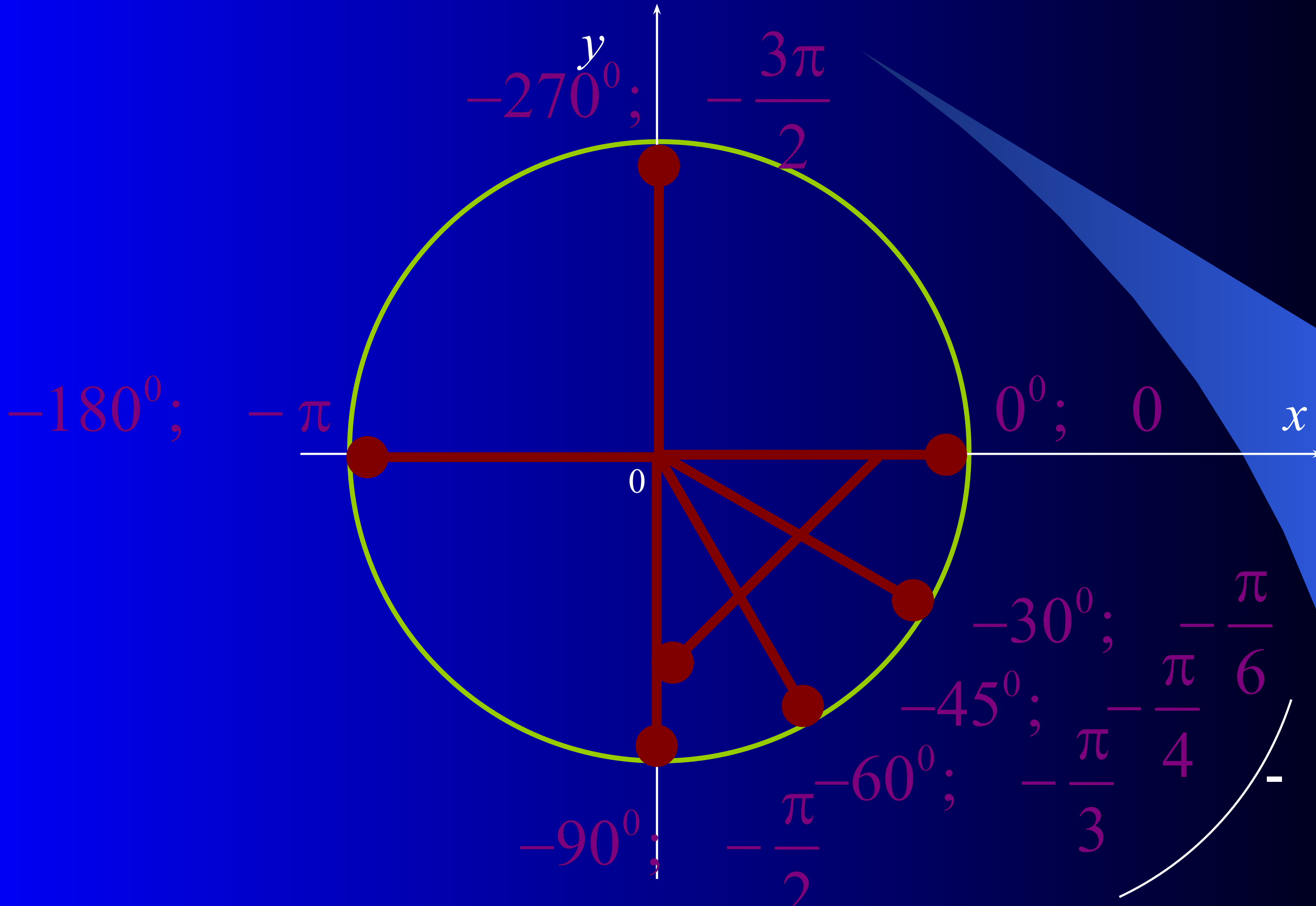
Тригонометрическая окружность



Градусы и радианы



Градусы и радианы



Градусы и радианы

Углы в градусах	360°	180°	90°	60°	45°	30°
Углы в радианах	2π	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$

Перевод из радиан в градусы

Чтобы найти радианную меру любого угла по его данной градусной мере, надо умножить число градусов на / 180 0.017453, *число минут – на* / (180 · 60) 0.000291, *число секунд – на* / (180 · 60 · 60) 0.000005 *и сложить найденные произведения.*

Пример 1.

Найти радианную меру угла 12°30’ с точностью до четвёртого десятичного знака.

Р е ш е н и е . Умножим 12 на / 180 : 12 · 0.017453 0.2094.

Умножим 30 на / (180 · 60) : 30 ·

· 0.000291 0.0087.

Теперь находим:

12°30’ 0.2094 + 0.0087 = 0.2181 рад.

Из градусов в радианы

Чтобы найти градусную меру любого угла по его данной радианной мере, надо умножить число радиан на 180° / 57°.296 = 57°17’45” (относительная погрешность результата составит ~ 0.0004%, что соответствует абсолютной погрешности ~ 5” для полного оборота 360°).

Пример 2.

Найти градусную меру угла 1.4 рад с точностью до 1’.

Р е ш е н и е . Последовательно найдём:

1 рад $57^\circ 17' 45''$;

0.4 рад $0.4 \cdot 57^\circ.296 = 22^\circ.9184$;

$0^\circ.9184 \cdot 60$ $55'.104$; $0'.104 \cdot 60$ $6''$.

…

Пример 2 (продолжение)

Таким образом, 0.4 рад 22°55’6” и тогда:

1 рад 57°17’45”

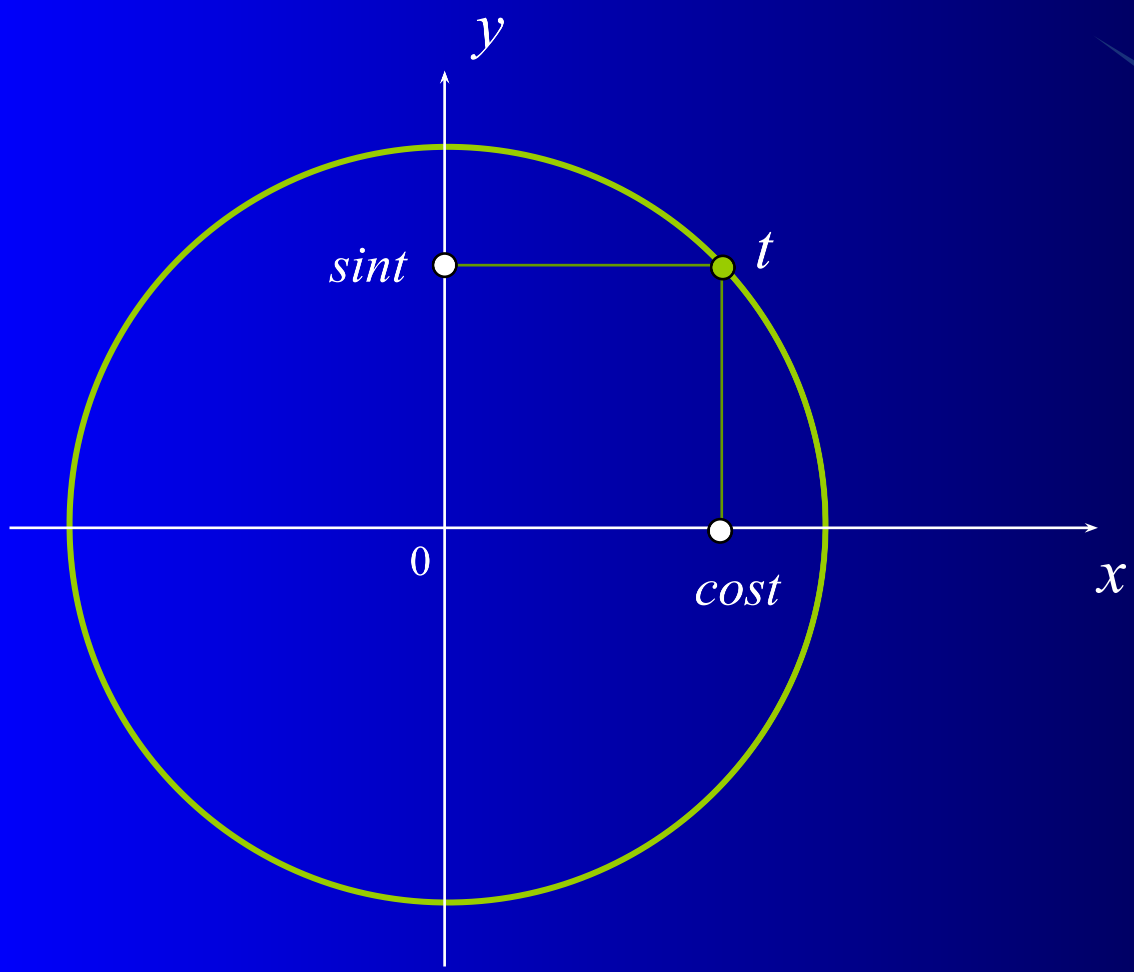
\+

0.4 рад 22°55’6”

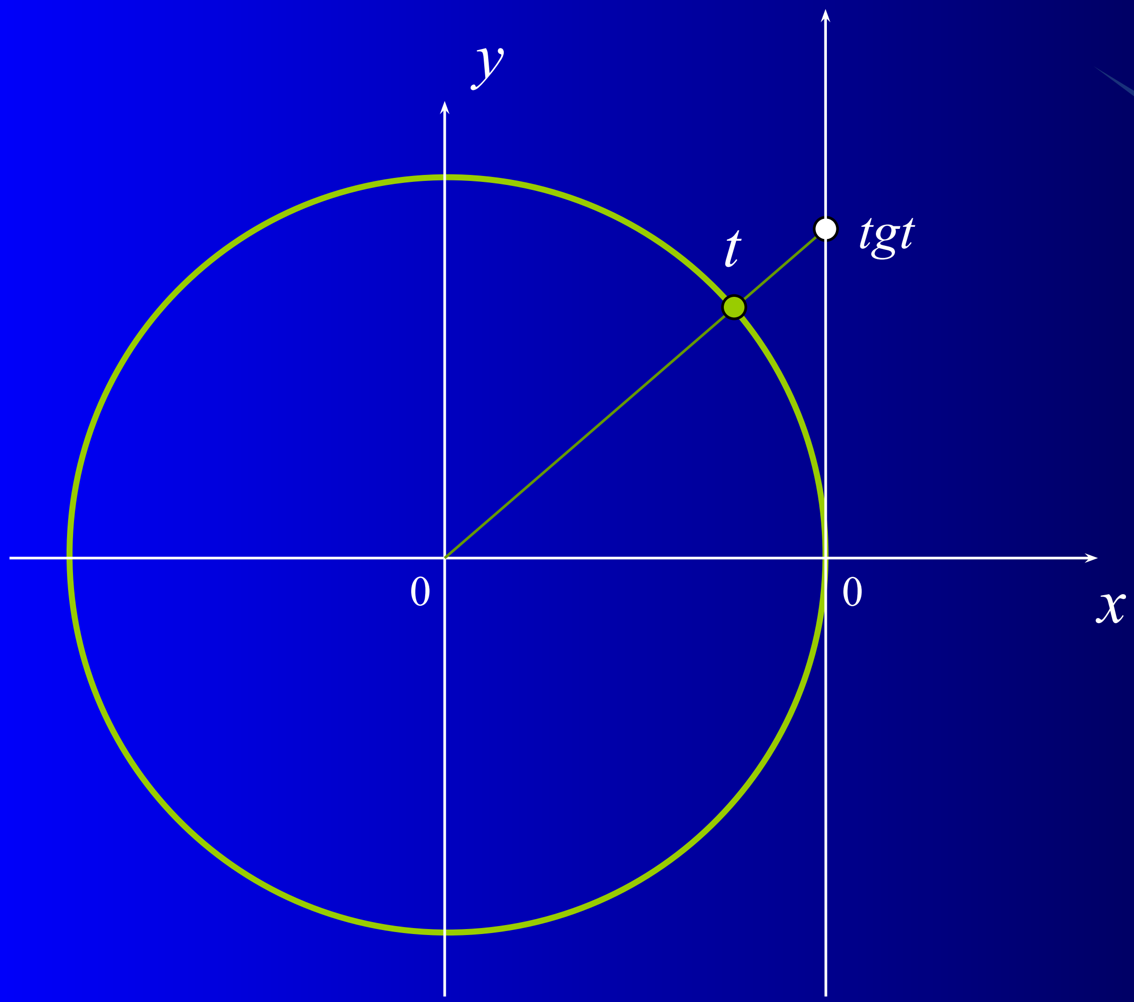
1.4 рад 80°12’51”

После округления этого результата до требуемой точности в 1’ окончательно получим: 1.4 рад » 80°13’.

Косинус и синус

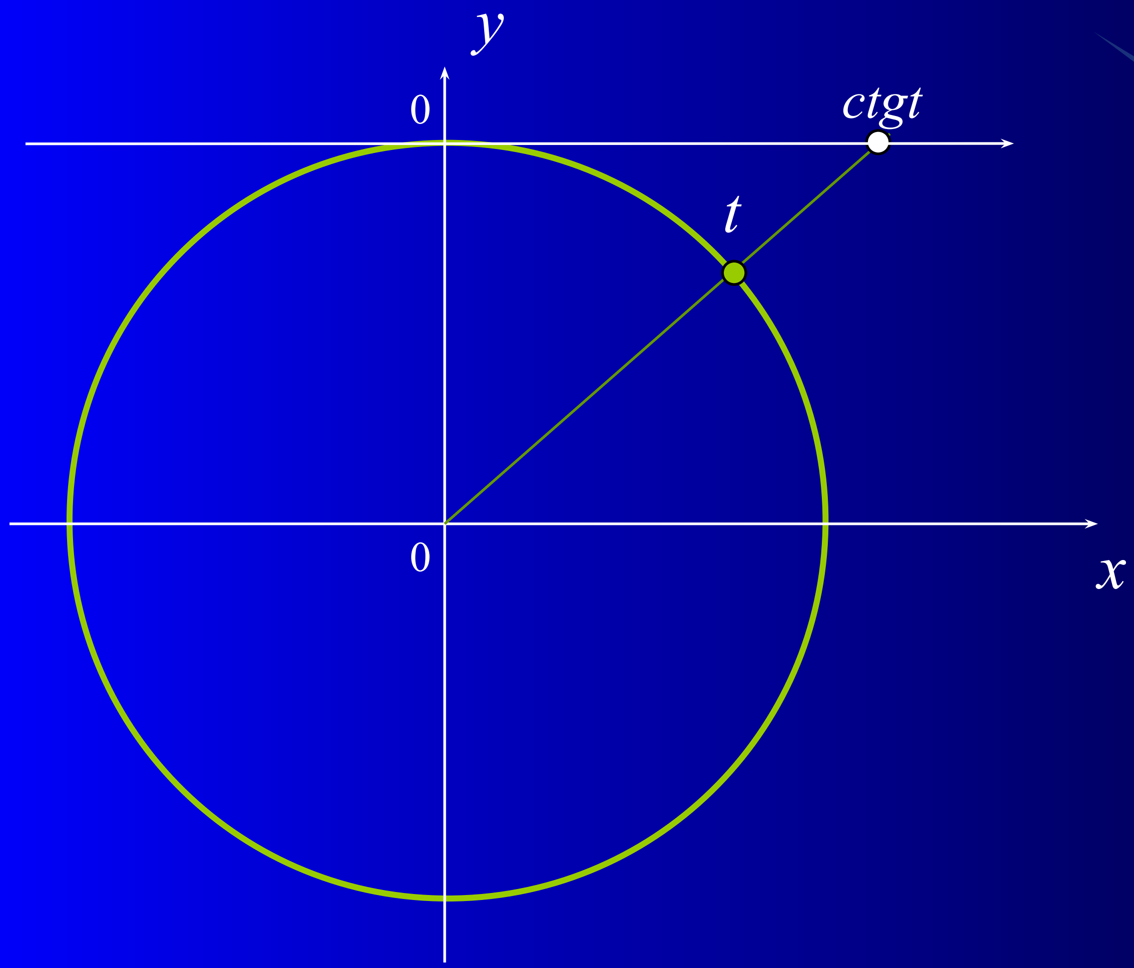


Тангенс



$$tgt = \frac{\sin t}{\cos t}$$

Котангенс



$$ctgt = \frac{\cos t}{\sin t}$$

Формулы приведения

Эти формулы позволяют:

- 1) найти численные значения тригонометрических функций углов, больших 90°;
- 2) выполнить преобразования, приводящие к более простым выражениям;
- 3) избавиться от отрицательных углов и углов, больших 360°.

Формулы приведения

	sin	cos	tan	cot
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$90° - \alpha$	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\cot\alpha$	$+\tan\alpha$
$90° + \alpha$	$+\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$180° - \alpha$	$+\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$180° + \alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\tan\alpha$	$+\cot\alpha$
$270° - \alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cot\alpha$	$+\tan\alpha$
$270° + \alpha$	$-\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$360° k - \alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$360° k + \alpha$	$+\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\tan\alpha$	$+\cot\alpha$

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \qquad \tan\alpha\cdot\cot\alpha = 1;$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\sin\alpha\cdot\mathrm{cosec}\,\alpha = 1; \qquad \cos\alpha\cdot\sec\alpha = 1;$$

$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha; \qquad \mathrm{cosec}^2\,\alpha = 1 + \cot^2\alpha;$$

$$\cos^2\alpha = 1/(1+\tan^2\alpha) = \cot^2\alpha/(1+\cot^2\alpha);$$

$$\sin^2\alpha = 1/(1+\cot^2\alpha) = \tan^2\alpha/(1+\tan^2\alpha).$$

Формулы сложения и вычитания

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta};$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta};$$

$$\cot(\alpha+\beta)=-\frac{1-\cot\alpha\ \cot\beta}{\cot\alpha+\cot\beta};$$

$$\cot(\alpha-\beta)=-\frac{1+\cot\alpha\ \cot\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}.$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

Формулы двойных, тройных и половинных углов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}; \qquad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 3\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha - \sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha;$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}; \qquad \cot 3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{(1-\cos\alpha)/2}; \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{(1+\cos\alpha)/2};$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{(1-\cos\alpha)/(1+\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{(1+\cos\alpha)/(1-\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Преобразование тригонометрических выражений в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};$$

$$\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta};$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cdot\cos(45^\circ-\alpha);$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cdot\sin(45^\circ+\alpha);$$

$$\tan\alpha + \cot\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta};$$

Преобразование тригоно-метрических выражений в произведение

$$\tan\alpha - \cot\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta};$$

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\alpha/2; \quad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\alpha/2;$$

$$1+\sin\alpha = 2\cos^2(45^\circ-\alpha/2); \quad 1-\sin\alpha = 2\sin^2(45^\circ-\alpha/2);$$

$$1+\tan\alpha\ \tan\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}; \quad 1-\tan\alpha\ \tan\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};$$

$$\cot\alpha\ \cot\beta + 1 = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}; \quad \cot\alpha\ \cot\beta - 1 = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Обратные тригонометрические функции

arcsin *x* – это угол, синус которого равен ***x***. Аналогично определяются функции **arccos *x***, **arctan *x***, **arccot *x***, **arcsec *x***, **arccosec *x***. Эти функции являются обратными по отношению к функциям sin *x*, cos *x*, tan *x*, cot *x*, sec *x*, cosec *x*, поэтому они называются *обратными тригонометрическими функциями.* Все обратные тригонометрические функции являются *многозначными функциями*, то есть каждому значению аргумента соответствует бесчисленное множество значений функции. Так, например, углы 30°, 150°, 390°, 510°, 750° имеют один и тот же синус.

Обратные тригонометрические функции

Если обозначить любое из значений обратных тригонометрических функций через Arcsin x, Arccos x, Arctan x, Arccot x и сохранить обозначения: arcsin x, arcos x, arctan x, arccot x для их главных значений, то связь между ними выражается следующими соотношениями:

$$\operatorname{Arcsin} x = (-1)^k \cdot \arcsin x + k\pi,$$

$$\operatorname{Arccos} x = \pm \arccos x + 2k\pi,$$

$$\operatorname{Arctan} x = \arctan x + k\pi,$$

$$\operatorname{Arccot} x = \operatorname{arccot} x + k\pi,$$

где k – любое целое число. При $k = 0$ мы имеем главные значения.

Основные соотношения для обратных тригонометрических функций

$$\sin \mathrm{Arcsin}\, a = a\,; \qquad \mathrm{Arcsin}\,(\sin \alpha) = k\pi + (-1)^k \cdot \alpha\,;$$

$$\cos \mathrm{Arccos}\, a = a\,; \qquad \mathrm{Arccos}\,(\cos \alpha) = 2k\pi \pm \alpha\,;$$

$$\tan \mathrm{Arctan}\, a = a\,; \qquad \mathrm{Arctan}\,(\tan \alpha) = k\pi + \alpha\,;$$

$$\cot \mathrm{Arccot}\, a = a\,; \qquad \mathrm{Arccot}\,(\cot \alpha) = k\pi + \alpha\,;$$

$$\left.\begin{array}{l}
\arcsin a = \arccos \sqrt{1 - a^2} = \arctan \dfrac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\,; \\[2ex]
\arccos a = \arcsin \sqrt{1 - a^2} = \mathrm{arccot} \dfrac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\,; \\[2ex]
\arctan a = \mathrm{arccot} \dfrac{1}{a} = \arcsin \dfrac{a}{\sqrt{1 + a^2}} = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1 + a^2}}\,;
\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{при} \\ a > 0\end{array}$$

$$\arcsin a + \arccos a = \pi / 2\,; \qquad \arctan a + \mathrm{arccot}\, a = \pi / 2\,;$$

$$\mathrm{arcsec}\, a + \mathrm{arccosec}\, a = \pi / 2\,.$$