Урок по теме: “Тригонометрические формулы.”

Ельцова Н.Г.,учитель МОУ «Гимназия №11»,
Г Норильск.

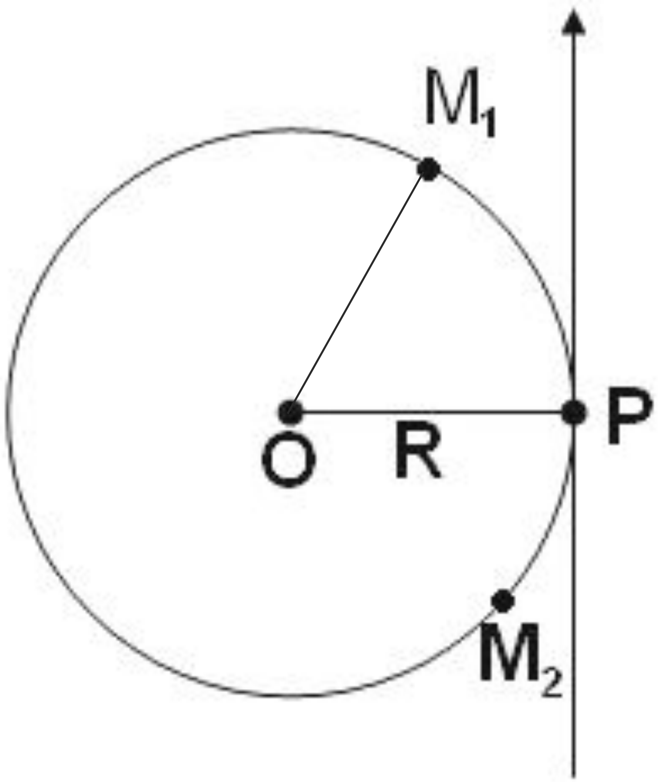
Рассмотрим следующие вопросы:

1. радианная мера угла;
2. поворот точки вокруг начала координат;
3. определение синуса, косинуса и тангенса произвольного угла;
4. знаки синуса, косинуса и тангенса;
5. зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла;
6. синус, косинус и тангенс углов **α** и - **α**;

Повторим основные понятия:

- координатная прямая;
- координатная плоскость;
- центральный угол;
- sin α, cos α, где $0<\alpha<180°$;
- Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом равным 1.

Вопрос 1: Радианная мера угла.



- Каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.
- Кроме градусной меры угла существует еще и радианная.
- Рассмотрим окр(O(0,0);R) дугу PM_1, равную радиусу R.
- Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в один радиан.

$$1\, рад = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 \qquad \alpha \;\; рад = \left(\frac{180}{\pi}\right)\cdot\alpha^0$$

Задачи.

- **Найти градусную меру угла,равного**

$$\frac{3\pi}{4}\text{ рад}$$

решение:

$$\frac{3\pi}{4}\text{ рад} = \frac{180}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{4} = 135^0$$

- **Найти радианную меру угла, равного**

15^o

решение:

$$15^0 = \frac{\pi}{180}\cdot 15\text{ рад} = \frac{\pi}{12}\text{ рад}$$

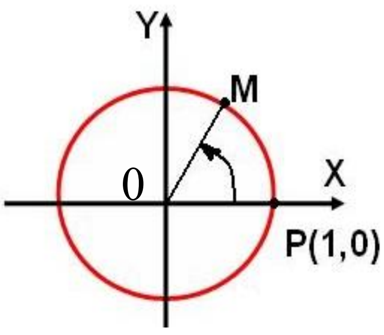
Задание: заполните таблицу наиболее встречающихся углов в градусной и радианной мере.

Градусы	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**180**
Радиан	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\boldsymbol{\pi}$

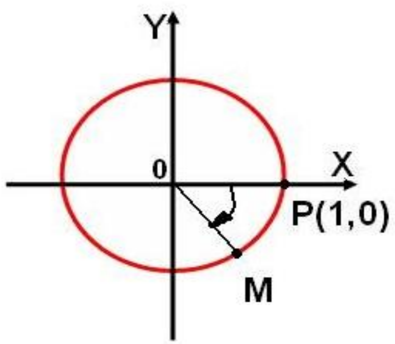
Вопрос 2: Поворот точки вокруг начала координат.

- Установим соответствие между действительными числами и точками окружности с помощью поворота точки окружности.
- Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Ее называют ***единичной окружностью***.
- Введем понятие поворота окружности вокруг начала координат на угол в а радиан, **α**- любое действительное число.

1. $\alpha > 0$



2. $\alpha < 0$



3. **Поворот на 0 радиан, означает, что точка остается на месте.**

Вопрос 3: определение синуса, косинуса, тангенса угла.

Синусом угла **α** называется ордината точки, полученной поворотом точки (1,0) вокруг начала координат на угол α.

Обозначается sin α

Косинусом угла **α** называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1,0) вокруг начала координат на угол α.

Обозначается cos α

- При повороте т.P(1,0) на угол α, т.е на угол 90^0, **получается точка (0,1).**
- Ордината точки равна 1, поэтому $\sin 90^0 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.
- Абсцисса точки равна 0, $\cos 90^0 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

Задание:

- Найти cos 270° =
- sin 270° =
- sin п +sin1,5п =
- sin3п - cos1,5п =

Определение тангенса и котангенса угла

- Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к его косинусу.
- tg α= $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- Котангенсом угла α называется отношение косинуса угла α к его синусу.
- ctg α= $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

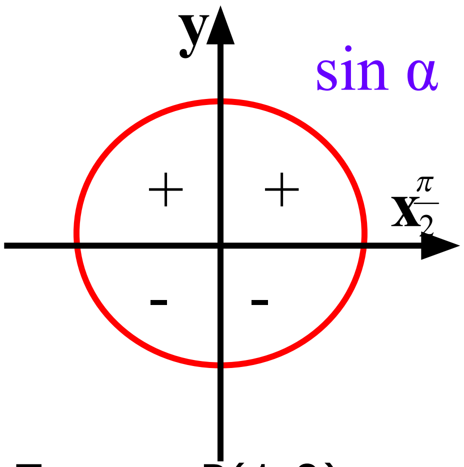
- Найдите

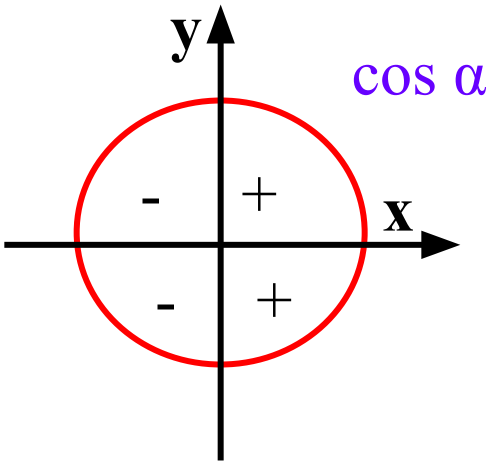
tg 0°=

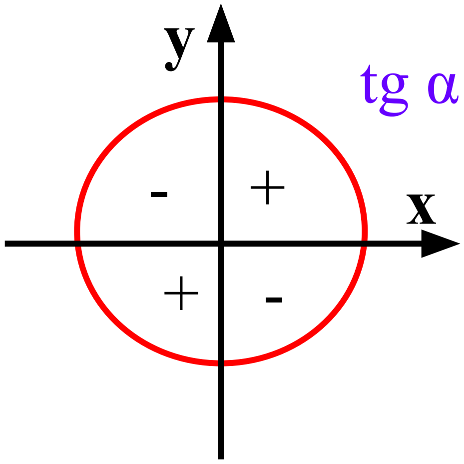
ctg 270° =

tg 0°-tq180°=

Вопрос 4: знаки синуса косинуса и тангенса. Синус косинус и тангенс углов **α** и **–α**.



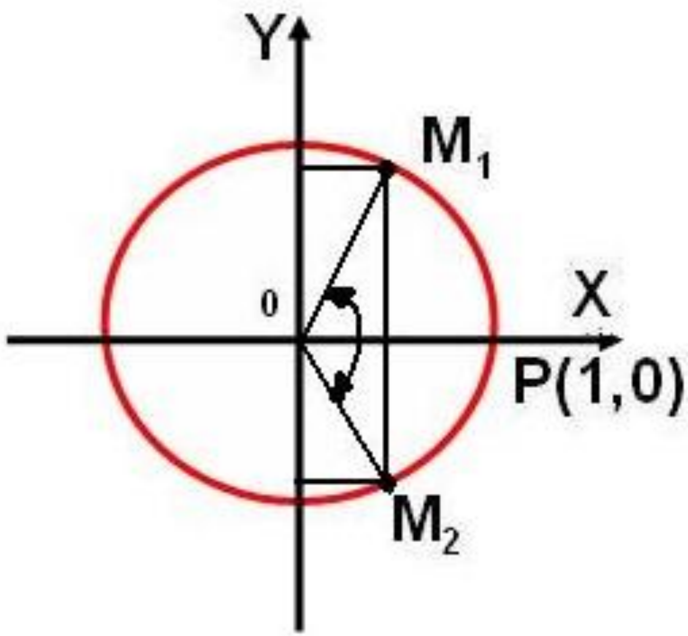




Пусть т P(1,0) движется по единичной окружности против часовой стрелки.

- $\alpha \in 1 четв$, sin α>0, cos α>0.
- $\alpha \in 2 четв$, sin α>0, cos α<0.
- $\alpha \in 3 четв$ sin α>0, cos α<0.
- $\alpha \in 4 четв$ sin α<0, cos α>0.

Вопрос 5: Синус косинус и тангенс углов α и –α.



- Пусть т M_1 и тM_2 единичной окружности получены поворотом т P (1,0) на углы **α** и **–α.**

Тогда ось Ох делит угол M_1OM_2пополам, поэтому тM_1 и M_2 симметричны относительно оси Ох

M_1 (cos α, sin α), M_2 (cos (- α), sin(α)).

Значит **(1) sin(-α)=-sin α**

(2) cos(-α)=cos α

Используя определения тангенса и котангенса

(3) tg (-α)=tg α

(4) ctg (-α)= -ctg α

<u>Формулы 1-2 справедливы при любых α.</u>

<u>Формула 3, при</u>

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi\kappa, \kappa \in Z$$

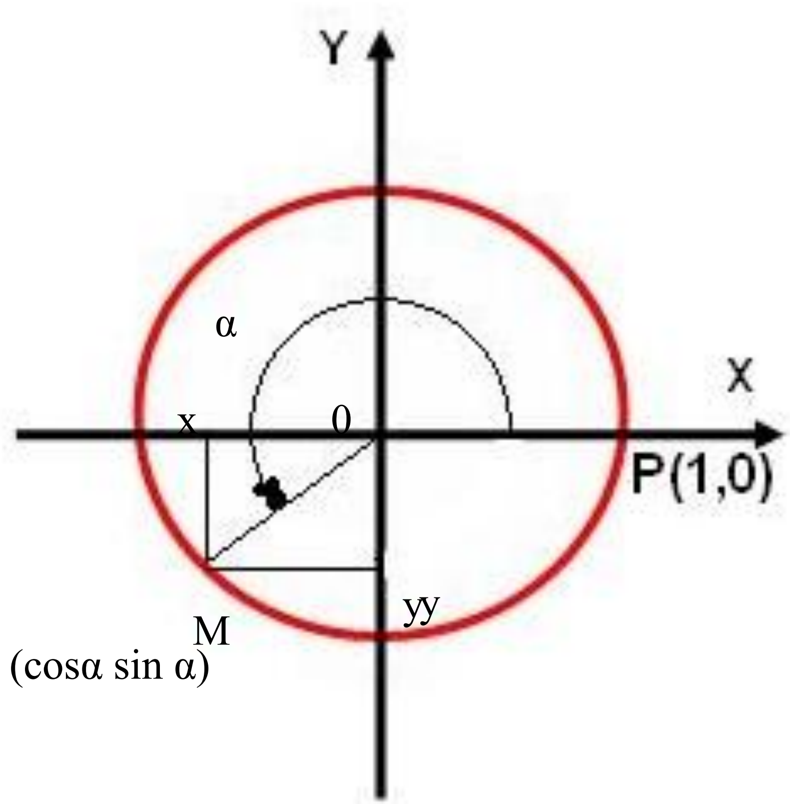
Задание:

1) докажите формулу (3) самостоятельно.

2) выясните знаки синуса, косинуса и тангенса углов:а) $\frac{3\pi}{4}$,

б) 745°, в)- $\frac{5\pi}{4}$

Вопрос 5 зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла.



- Пусть т М (x;y) единичной окружности получена поворотом точки(1;0) на угол α. Тогда по определению синуса и косинуса **x=cos α, y= sin α**. Точка М принадлежит единичной окружности, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению: $x^2+y^2=1$, следовательно

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. (1)

Равенство (1) выполняется при любых значениях α и называется **основным тригонометрическим тождеством.**

- Зависимость между тангенсом и котангенсом определяется равенством: **(2) $tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = 1$,**

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}\kappa, \kappa \in Z$$

ЗАДАЧА

Дано:

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

Найти: sin α

Решение:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$.

$$т.к. \alpha \in 3 четв$$

$$\sin\alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

Дано: tg α = 13

Найти: ctg α

Решение:

tg α ·ctgα=1, следовательно

$$\text{ctg } \alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

$$ctg\,\alpha = \frac{1}{13}$$

Итог урока:

- Чему равна радианная мера угла, градусная мера угла?
- Какой угол называется углом в один радиан?
- Что называют синусом, косинусом, тангенсом произвольного угла **α**?
- Каким равенством определяется зависимость между синусом и косинусом одного и того же угла? Как называется это равенство?
- Каким равенством определяется зависимость между тангенсом и котангенсом одного и того же угла?

Математический диктант.

1вариант

1. Найдите радианную меру угла.

2 вариант

40^{o}

150^{0}

ответ: $\frac{2\pi}{9}$

ответ: $\frac{5\pi}{6}$

2. Найдите градусную меру угла

$\frac{\pi}{6}$

$\frac{3\pi}{4}$

ответ: 30^{o}

ответ: 135^{o}

3.найдите координаты точки, полученной поворотом т(1,0) единичной окружности на угол

$$\frac{\pi}{2}, -3\pi, 180^{0}, -360^{0}$$

$$-\pi, \frac{3\pi}{2}, -90^{0}, 270^{0}$$

ответ:

(0;1), (-1;0),(-1;0), (1,0)

ответ:

(-1;0), (0;-1), (0;-1),(0;-1)

1вариант. 4.вычислите: 2 вариант.

1 вариант

1) $\cos 0^0 + 3\sin 90^0 =$

$= 1 + 3 \cdot 1 = 1$

2) $\sin 270^0 - 2\cos 180^0 =$

$= -1 + 2 = 1$

3) $1 + \mathrm{ctg}\, 270^0 - 5\mathrm{tg}\, 360^0 =$

$= 1 + 0 + 0 = 1$

4) $\sin 30^0 + \cos 60^0 =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

2 вариант

1) $\cos 180^0 + 5\sin 90^0 =$

$= -1 + 5 \cdot 1 = 5$

2) $\sin 180^0 - 3\cos 0^0 =$

$= 0 - 3 = -3$

3) $\sin 60^0 + \cos 30^0 =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

4) $\mathrm{tg}\, 360^0 - 2\mathrm{ctg}\, 270^0 + 3 =$

$= 0 - 0 + 3 = 3$