


# Урок по теме: “Тригонометрические формулы.”

Ельцова Н.Г., учитель МОУ «Гимназия №11»,  
Г Норильск.

# Рассмотрим следующие вопросы:

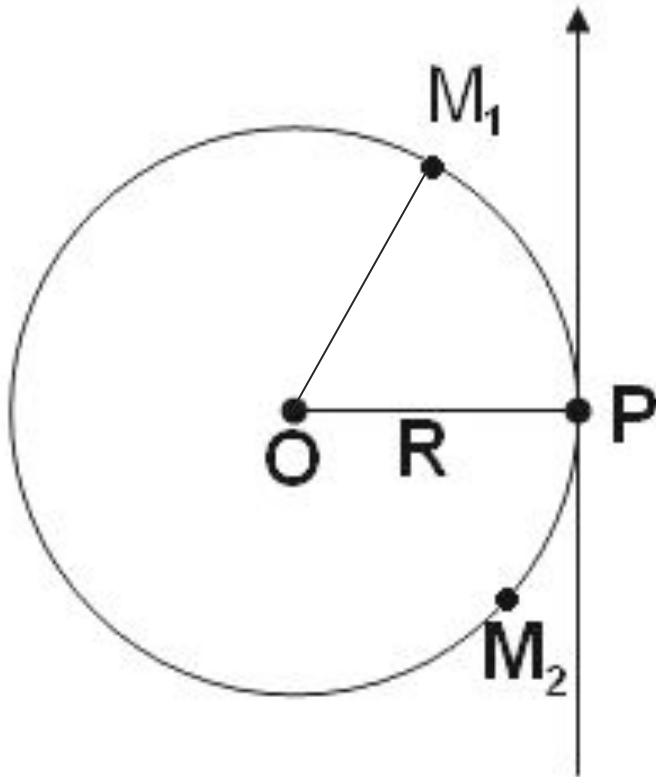
1. радианная мера угла;
  2. поворот точки вокруг начала координат;
  3. определение синуса, косинуса и тангенса произвольного угла;
  4. знаки синуса, косинуса и тангенса;
  5. зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла;
  6. синус, косинус и тангенс углов  $\alpha$  и  $-\alpha$ ;
- 

# Повторим основные понятия:

---

- координатная прямая;
  - координатная плоскость;
  - центральный угол;
  - $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ , где  $0 < \alpha < 180^\circ$ ;
  - Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом равным 1.
-

# Вопрос 1: Радианная мера угла.



- Каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.
- Кроме градусной меры угла существует еще и радианная.
- Рассмотрим окр( $O(0,0);R$ ) дугу  $PM_1$ , равную радиусу  $R$ .
- **Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в один радиан.**

$$1 \text{ рад} = \left( \frac{180}{\pi} \right)^{\circ} \quad \alpha \text{ рад} = \left( \frac{180}{\pi} \right) \cdot \alpha^{\circ}$$

# Задачи.

---

- Найти градусную меру угла, равного

$$\frac{3\pi}{4} \text{ рад}$$

решение:

$$\frac{3\pi}{4} \text{ рад} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4} = 135^{\circ}$$

- Найти радианную меру угла, равного

$$15^{\circ}$$

решение:

$$15^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot 15 \text{ рад} = \frac{\pi}{12} \text{ рад}$$

---

Задание: заполните таблицу наиболее встречающихся углов в градусной и радианной мере.

---

<b>Градусы</b>	<b>0</b>	<b>30</b>	<b>45</b>	<b>60</b>	<b>90</b>	<b>180</b>
<b>Радан</b>	<b>0</b>	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$

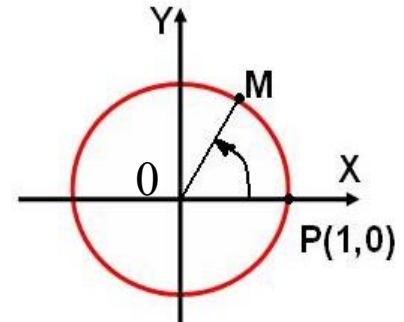
---

## Вопрос 2: Поворот точки вокруг начала координат.

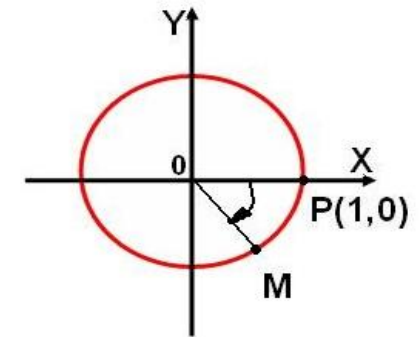
---

- Установим соответствие между действительными числами и точками окружности с помощью поворота точки окружности.
- Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Ее называют **единичной окружностью**.
- Введем понятие поворота окружности вокруг начала координат на угол в  $\alpha$  радиан,  $\alpha$  - любое действительное число.

1.  $\alpha > 0$



2.  $\alpha < 0$



3. Поворот на 0 радиан, означает, что точка остается на месте.
-

## Вопрос 3: определение синуса, косинуса, тангенса угла.

---

**Синусом угла  $\alpha$**  называется ордината точки, полученной поворотом точки  $(1,0)$  вокруг начала координат на угол  $\alpha$ .

Обозначается  $\sin \alpha$

**Косинусом угла  $\alpha$**  называется абсцисса точки, полученной поворотом точки  $(1,0)$  вокруг начала координат на угол  $\alpha$ .

Обозначается  $\cos \alpha$

- При повороте т.Р(1,0) на угол  $\alpha$ , т.е на угол  $90^\circ$ , получается точка  $(0,1)$ .
  - Ордината точки равна 1, поэтому  $\sin 90^\circ = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ .
  - Абсцисса точки равна 0,  $\cos 90^\circ = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ .
-



# Задание:

---

Найти  $\cos 270^\circ =$

$\sin 270^\circ =$

$\sin \pi + \sin 1,5\pi =$

$\sin 3\pi - \cos 1,5\pi =$

---

## Определение тангенса и котангенса угла

---

- **Тангенсом** угла  $\alpha$  называется отношение синуса угла  $\alpha$  к его косинусу.

- $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

- **Котангенсом** угла  $\alpha$  называется отношение косинуса угла  $\alpha$  к его синусу.

- $$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

- Найдите

$$\operatorname{tg} 0^\circ =$$

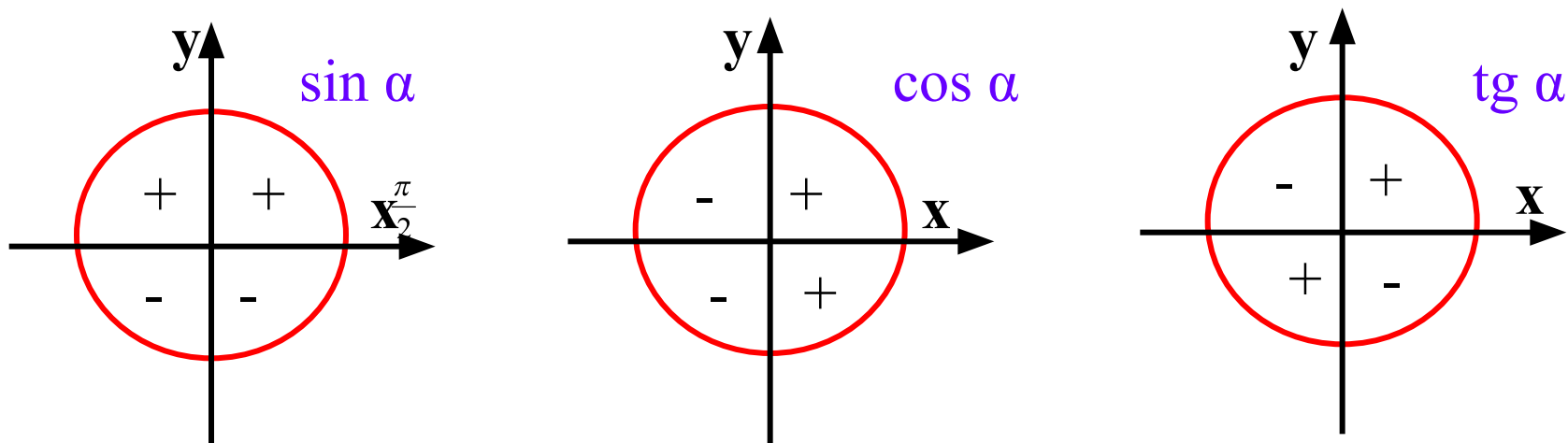
$$\operatorname{ctg} 270^\circ =$$

$$\operatorname{tg} 0^\circ - \operatorname{tg} 180^\circ =$$

---

## Вопрос 4: знаки синуса косинуса и тангенса. Синус косинус и тангенс углов $\alpha$ и $-\alpha$ .

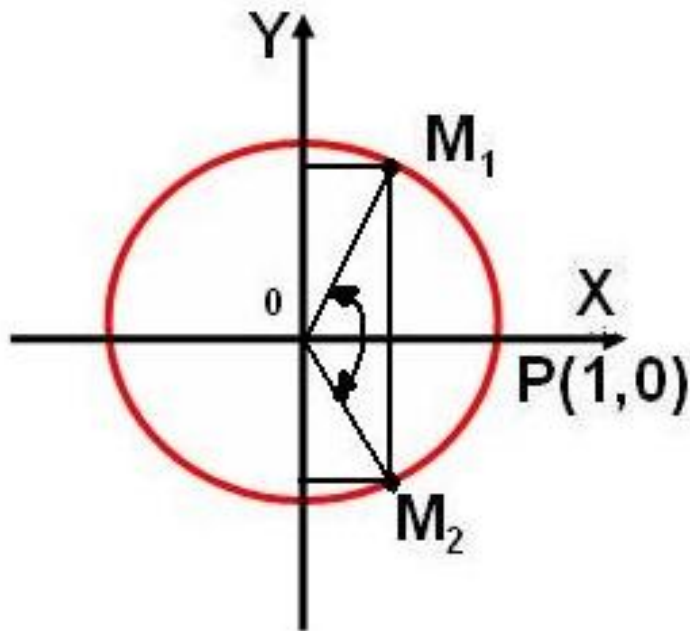
---



Пусть  $t P(1,0)$  движется по единичной окружности против часовой стрелки.

- $\alpha \in 1\text{четв}$ ,  $\sin \alpha > 0$ ,  $\cos \alpha > 0$ .
  - $\alpha \in 2\text{четв}$ ,  $\sin \alpha > 0$ ,  $\cos \alpha < 0$ .
  - $\alpha \in 3\text{четв}$ ,  $\sin \alpha < 0$ ,  $\cos \alpha < 0$ .
  - $\alpha \in 4\text{четв}$ ,  $\sin \alpha < 0$ ,  $\cos \alpha > 0$ .
-

## Вопрос 5: Синус косинус и тангенс углов $\alpha$ и $-\alpha$ .



□ Пусть  $t M_1$  и  $t M_2$  единичной окружности получены поворотом  $t P(1,0)$  на углы  $\alpha$  и  $-\alpha$ .

Тогда ось  $Ox$  делит угол  $M_1 O M_2$  пополам, поэтому  $t M_1$  и  $M_2$  симметричны относительно оси  $Ox$

$M_1(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $M_2(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$ .

Значит **(1)  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$**

**(2)  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$**

Используя определения тангенса и котангенса

**(3)  $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$**

**(4)  $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$**

Формулы 1-2 справедливы при любых  $\alpha$ .

Формула 3, при

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Задание:

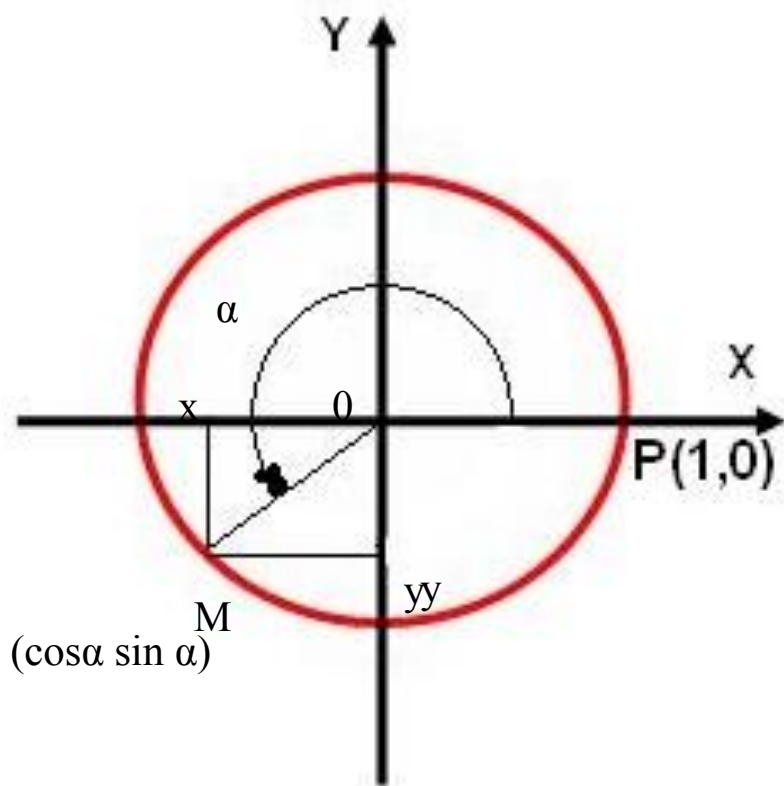
---

1) докажите формулу (3) самостоятельно.

2) выясните знаки синуса, косинуса и тангенса углов: а)  $\frac{3\pi}{4}$ ,  
б)  $745^\circ$ , в)  $-\frac{5\pi}{4}$

---

## Вопрос 5 зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла.



- Пусть  $M(x;y)$  единичной окружности получена поворотом точки  $(1;0)$  на угол  $\alpha$ . Тогда по определению синуса и косинуса  $x = \cos \alpha$ ,  $y = \sin \alpha$ . Точка  $M$  принадлежит единичной окружности, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению:  $x^2 + y^2 = 1$ , следовательно

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (1)$$

Равенство (1) выполняется при любых значениях  $\alpha$  и называется

**ОСНОВНЫМ**  
**ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ**  
**ТОЖДЕСТВОМ.**

- Зависимость между тангенсом и котангенсом определяется равенством: **(2)  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ ,**

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

## ЗАДАЧА

**Дано:**

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

**Найти:**  $\sin \alpha$

**Решение:**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha.$$

*т.к.  $\alpha \in 3$  четв*

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

**Дано:**  $\operatorname{tg} \alpha = 13$

**Решение:**

$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ , следовательно

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

**Найти:**  $\operatorname{ctg} \alpha$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{13}$$

# Итог урока:

---

- ✓ Чему равна радианная мера угла, градусная мера угла?
  - ✓ Какой угол называется углом в один радиан?
  - ✓ Что называют синусом, косинусом, тангенсом произвольного угла  $\alpha$ ?
  - ✓ Каким равенством определяется зависимость между синусом и косинусом одного и того же угла? Как называется это равенство?
  - ✓ Каким равенством определяется зависимость между тангенсом и котангенсом одного и того же угла?
-



# Математический диктант.

---

1 вариант

1. Найдите радианную меру угла.

2 вариант

ответ:  $40^\circ$   
 $\frac{2\pi}{9}$   
 $\frac{\pi}{6}$

ответ:  $150^\circ$   
 $\frac{5\pi}{6}$

2. Найдите градусную меру угла

$\frac{3\pi}{4}$

ответ:

3. найдите координаты точки, полученной поворотом  $\pi(1,0)$  единичной окружности на угол  $30^\circ$  и  $135^\circ$

ответ:

$\frac{\pi}{2}, -3\pi, 180^\circ, -360^\circ$

$-\pi, \frac{3\pi}{2}, -90^\circ, 270^\circ$

ответ:

$(0;1), (-1;0), (-1;0), (1,0)$

ответ:

$(-1;0), (0;-1), (0;-1), (0;-1)$

---

1 вариант.

4. вычислите:

2 вариант.

---

1)  $\cos 0^{\circ} + 3 \sin 90^{\circ} =$

$$= 1 + 3 \cdot 1 = 1$$

2)  $\sin 270^{\circ} - 2 \cos 180^{\circ} =$

$$= -1 + 2 = 1$$

3)  $1 + \operatorname{ctg} 270^{\circ} - 5 \operatorname{tg} 360^{\circ} =$

$$= 1 + 0 + 0 = 1$$

4)  $\sin 30^{\circ} + \cos 60^{\circ} =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

1)  $\cos 180^{\circ} + 5 \sin 90^{\circ} =$

$$= -1 + 5 \cdot 1 = 5$$

2)  $\sin 180^{\circ} - 3 \cos 0^{\circ} =$

$$= 0 - 3 = -3$$

3)  $\sin 60^{\circ} + \cos 30^{\circ} =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

4)  $\operatorname{tg} 360^{\circ} - 2 \operatorname{ctg} 270^{\circ} + 3 =$

$$= 0 - 0 + 3 = 3$$

---