

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ



Верно ли, что:

$$а) \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}; \quad б) \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4};$$

$$в) \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}; \quad г) \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{11\pi}{6};$$

$$д) \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}. \quad е) \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Имеют ли смысл выражения:

a) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right);$

в) $\arcsin \sqrt{2};$

д) $\arccos(1 - \sqrt{2});$

б) $\arcsin \frac{5}{3};$

з) $\arccos(-\sqrt{3});$

е) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}).$

Решить уравнение:

$$a) \sin x = \frac{1}{2};$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$b) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$в) \sqrt{2} \cos x - 1 = 0;$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$г) \operatorname{tg} 2x = 1;$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi \cdot k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Решение.

Введём новую переменную $t = \sin x$. Тогда данное уравнение примет вид $2t^2 + t - 1 = 0$.

Решим его: $D = 1 + 8 = 9$,

$$t_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2},$$

$$t_2 = \frac{-1-3}{4} = -1.$$

Следовательно,

$$\sin x = 1/2$$

или

$$\sin x = -1.$$



$$1) \sin x = 1/2,$$

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi \cdot k, k \in Z,$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k, k \in Z.$$

$$2) \sin x = -1,$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k, k \in Z, \quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n, n \in Z.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\underline{6\sin^2x} + 5 \underline{\cos x} - 2 = 0.$$

Решение.

Заменяя \sin^2x на $1-\cos^2x$, получим квадратное уравнение относительно $\cos x$.

$$6(1-\cos^2x) + 5\cos x - 2 = 0,$$

$$-6\cos^2x + 5\cos x + 4 = 0,$$

$$6\cos^2x - 5\cos x - 4 = 0.$$

Пусть $\cos x = t$, тогда $6t^2 - 5t - 4 = 0$,

$$t_1 = -1/2, \quad t_2 = 4/3.$$



Следовательно, $\cos x = -1/2$ или $\cos x = 4/3$.

Решая уравнение $\cos x = -1/2$, находим:

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение $\cos x = 4/3$ не имеет решений, так как $4/3 > 1$.

$$\text{Ответ : } \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}x + 2\operatorname{ctg}x = 3.$$

Решение.

Поскольку $\operatorname{ctg}x = \frac{1}{\operatorname{tg}x}$,

то уравнение можно записать в виде:

$$\operatorname{tg}x + \frac{2}{\operatorname{tg}x} = 3.$$

Обозначим $\operatorname{tg}x$ через t . Получим

уравнение $t + \frac{2}{t} = 3,$

которое приводится к квадратному

$$-3t + 2 = 0, \quad (t \neq 0)$$



$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,

$$t_1 = 2, \quad t_2 = 1.$$

$$1) \operatorname{tg} x = 2,$$

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \operatorname{tg} x = 1,$$

$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} 2 + \pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{4} + \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}.$$



Пример 4. $\sin^2 4x = 1/4$

Решение.

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{4};$$

$$\cos 2x = 1/2$$

$$X = \pm\pi/6 + \pi n; \quad n \in \mathbb{Z}$$

Пример 5. $3 \sin x + 4 \cos x = 0$;

Решение.

Поделим обе части уравнения на $\cos x \neq 0$.

$$3 \operatorname{tg} x + 4 = 0 ;$$

$$\operatorname{tg} x = -4/3 ;$$

Ответ : $-\arctg(4/3) + \pi \cdot k, k \in Z$.