

# Определение центра тяжести математическими средствами

Секция математики

Выполнила: Шернина Оксана Игоревна  
ученица 10 класса МОУ «Лицей» г. Новотроицка

Руководитель: Поветкина Наталия Анатольевна

# Актуальность

Нахождение центра тяжести имеет большое значение не только при решении задач математического и физического содержания, но и при решении задач практической направленности.

Меня заинтересовало, к чему может привести неправильный расчёт центра тяжести в ряде морских трагедий.



# Центр тяжести линий

- Если линия имеет центр симметрии, то её центр тяжести совпадает с центром симметрии.
- Если линия имеет ось симметрии, то её центр тяжести лежит на оси симметрии.
- Если линия имеет плоскость симметрии, то её центр тяжести лежит на плоскости симметрии.

Из этих свойств следует, что центр тяжести отрезка лежит в его середине.

# Центр тяжести однородной пластинки

С точки зрения физики материальная точка - это точка, снабжённая массой. Математически: материальная точка – это пара, состоящая из точки и некоторого положительного числа, называемого массой.

Центр тяжести материальных точек – это точка, в которой расположено объединение этих материальных точек.

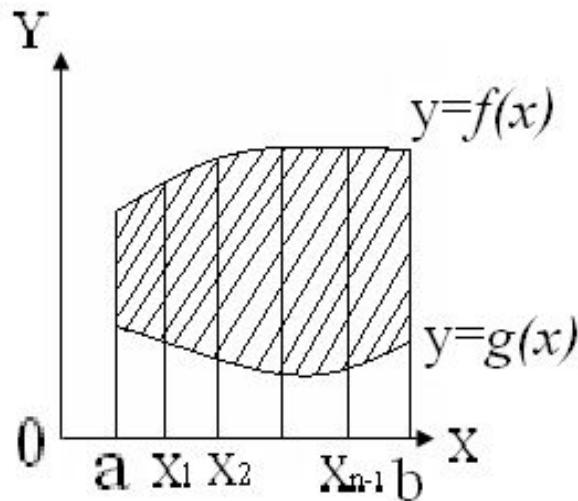
Теорема а): Центр тяжести и объединение системы материальных точек не зависит от порядка их последовательного объединения (группировки), т.е. от выбора объединяемых пар.

б): Центр тяжести и объединение системы материальных точек не изменяется, если заменить несколько материальных точек их объединением.

# Нахождение центра тяжести однородной пластинки

1) Найдем центр тяжести материальных точек:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = M \text{ или } M = \sum_{i=1}^n m_i$$
$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M} \quad \bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}$$

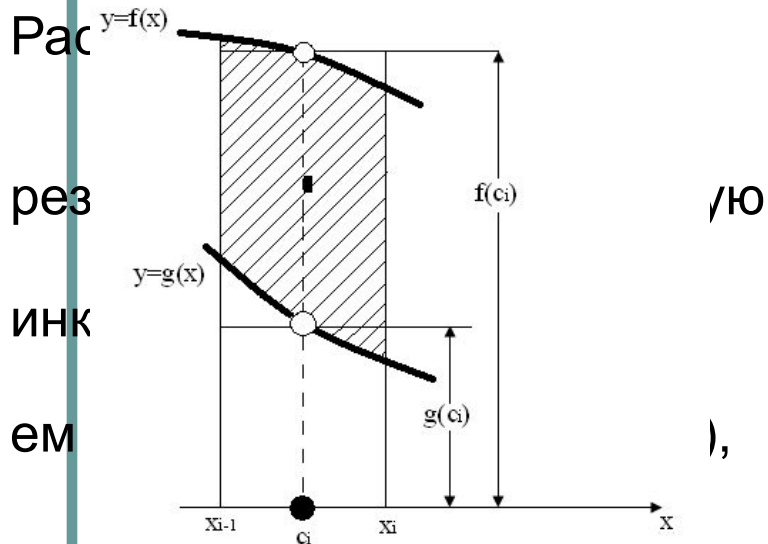


2) Рассмотрим материальную пластину, ограниченную двумя кривыми  $y = f(x), y = g(x)$  и прямыми  $x = a, x = b, f(x) \geq g(x)$ .

3) Предположим, что поверхностная плотность этой пластинки постоянна и равна  $\rho$ . Определим центр тяжести пластинки:

4) Делим  $[a; b]$  на  $n$  равных частей точками деления  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ . Обозначим  $a = x_0, b = x_n$ .

5) Через  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  проведем прямые  $\parallel Oy$ . Получим  $n$  узких пластинок. Находим центр тяжести пластинок.



центр тяжести пластинок находится

но в точках  $c$

$$m_1 = \rho[f(c_1) - g(c_1)]\Delta x_1, m_2 = \rho[f(c_2) - g(c_2)]\Delta x_2, \dots, m_n = \rho[f(c_n) - g(c_n)]\Delta x_n,$$

для 1-ой пластинки:  
 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

получаем точку  $c_i$   
 $(c_1; \frac{f(c_1) + g(c_1)}{2})$   
 $(c_2; \frac{f(c_2) + g(c_2)}{2})$   
 $(c_n; \frac{f(c_n) + g(c_n)}{2})$   
 приближенно

координатам

6)

от

пласт

основани

Ц

Д

Д

8) Заменяем каждую узкую пластинку материальной точкой, расположенной в центре тяжести этой пластинки и имеющей ту же массу, что и узкая пластинка. Тогда, центр тяжести такой системы материальных точек совпадает с центром тяжести всей пластины:

$$x \cong \frac{\sum_{i=1}^n c_i \rho [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \rho [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x_i} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x_i}$$
$$y \cong \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f(c_i) + g(c_i)}{2} \cdot \rho [f(c_i) - g(c_i)] \cdot \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \rho [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x_i} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{ [f(c_i)]^2 - [g(c_i)]^2 \} \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x_i}.$$

А это сводится к интегральным исчислениям, что будем изучать в 11 классе.