

Определение центра тяжести математическими средствами

Секция математики

Выполнила: Шернина Оксана Игоревна
ученица 10 класса МОУ «Лицей» г. Новотроицка

Руководитель: Поветкина Наталия Анатольевна

Актуальность

Нахождение центра тяжести имеет большое значение не только при решении задач математического и физического содержания, но и при решении задач практической направленности.

Меня заинтересовало, к чему может привести неправильный расчёт центра тяжести в ряде морских трагедий.



Центр тяжести линий

- Если линия имеет центр симметрии, то её центр тяжести совпадает с центром симметрии.
- Если линия имеет ось симметрии, то её центр тяжести лежит на оси симметрии.
- Если линия имеет плоскость симметрии, то её центр тяжести лежит на плоскости симметрии.

Из этих свойств следует, что центр тяжести отрезка лежит в его середине.

Центр тяжести однородной пластинки

С точки зрения физики материальная точка - это точка, снабжённая массой. Математически: материальная точка – это пара, состоящая из точки и некоторого положительного числа, называемого массой.

Центр тяжести материальных точек – это точка, в которой расположено объединение этих материальных точек.

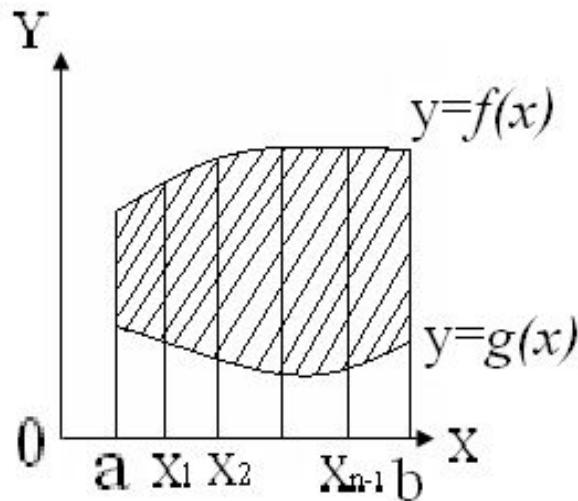
Теорема а): Центр тяжести и объединение системы материальных точек не зависит от порядка их последовательного объединения (группировки), т.е. от выбора объединяемых пар.

б): Центр тяжести и объединение системы материальных точек не изменяется, если заменить несколько материальных точек их объединением.

Нахождение центра тяжести однородной пластинки

1) Найдем центр тяжести материальных точек:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = M \text{ или } M = \sum_{i=1}^n m_i$$
$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M} \quad \bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}$$

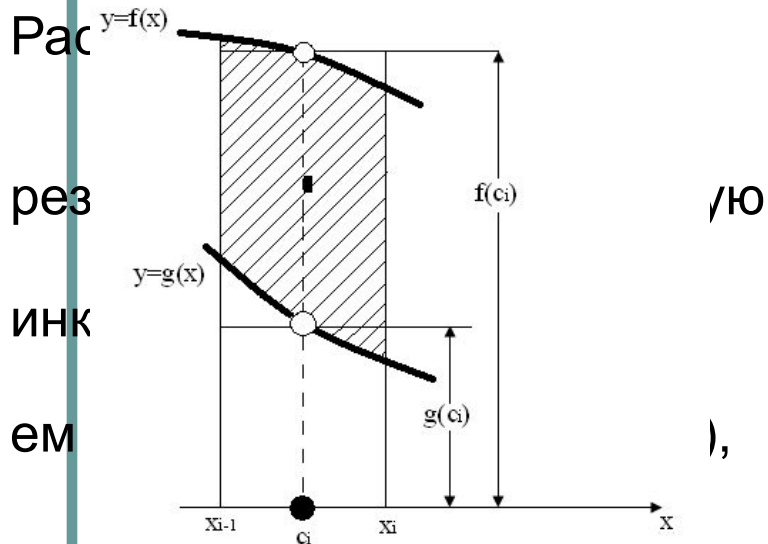


2) Рассмотрим материальную пластину, ограниченную двумя кривыми $y = f(x), y = g(x)$ и прямыми $x = a, x = b, f(x) \geq g(x)$.

3) Предположим, что поверхностная плотность этой пластинки постоянна и равна ρ . Определим центр тяжести пластинки:

4) Делим $[a; b]$ на n равных частей точками деления $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$. Обозначим $a = x_0, b = x_n$.

5) Через x_1, x_2, \dots, x_{n-1} проведем прямые $\parallel Oy$. Получим n узких пластинок. Находим центр тяжести пластинок.



6)

от

пласт

основани

получаем точку $(c_1; \frac{f(c_1) + g(c_1)}{2})$

$(c_2; \frac{f(c_2) + g(c_2)}{2})$ Ц

$(c_n; \frac{f(c_n) + g(c_n)}{2})$ приближитель

координатам

$$m_1 = \rho[f(c_1) - g(c_1)]\Delta x_1, m_2 = \rho[f(c_2) - g(c_2)]\Delta x_2, \dots, m_n = \rho[f(c_n) - g(c_n)]\Delta x_n,$$

Д

для 1-ой пластинки: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Д

8) Заменяем каждую узкую пластинку материальной точкой, расположенной в центре тяжести этой пластинки и имеющей ту же массу, что и узкая пластинка. Тогда, центр тяжести такой системы материальных точек совпадает с центром тяжести всей пластины:

$$x \cong \frac{\sum_{i=1}^n c_i \rho [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \rho [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x_i} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x_i}$$
$$y \cong \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f(c_i) + g(c_i)}{2} \cdot \rho [f(c_i) - g(c_i)] \cdot \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \rho [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x_i} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{ [f(c_i)]^2 - [g(c_i)]^2 \} \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x_i}.$$

А это сводится к интегральным исчислениям, что будем изучать в 11 классе.