

# Концепция учебника по алгебре и началам анализа для профильной ШКОЛЫ


Доцент кафедры методики и теории  
преподавания математики в школе  
Московского городского педагогического  
университета  
Надежда Евгеньевна Фёдорова, к. п. н.

[900igr.net](http://900igr.net)


# Содержание учебников призвано сформировать


- у **всех** учащихся старших классов представление о математике как о части человеческой культуры, как о средстве моделирования различных явлений природы, жизни и деятельности человека;


- *у учащихся, планирующих связать свою дальнейшую, профессиональную деятельность с естественно – научными, техническими, экономическими знаниями* – представление о широком применении математических методов в различных теоретических и практических вопросах; сформировать прочные и конкретные знания и умения, позволяющие в дальнейшем использовать математику как средство освоения своих профессиональных знаний.



# Содержательные и структурные особенности учебника


- 
- первая глава учебника в сжатом виде повторяет традиционное содержание основной (девятилетней ) школы, что позволит учителю эффективно организовать повторение математики, максимально используя самостоятельную деятельность учащихся (при чтении текстов и решении задач из этой главы).
  - *В этой же главе дается краткое изложение элементов теории множеств и логики – вопросов, включенных в содержание нового стандарта математического образования для основной школы.*

- 
- В связи с возрастными особенностями учащихся традиционный курс алгебры, связанный с элементарными функциями и их исследованием методами элементарной математики предшествует изучению элементов математического анализа;



Ведущей линией курса является **числовая линия**, что позволяет с самого начала строить курс с опорой на свойства действительных чисел. В частности, это объясняет тот факт, что основное содержание курса начинается с изучения теории делимости чисел .


Числовая линия свое логическое завершение получает в главе «Комплексные числа», рассматриваемой в конце 11 класса


- 
- Развивается числовая линия параллельно функциональной, но с некоторым опережением по времени. Вопросы, связанные с исследованием функции следуют за изучением соответствующих числовых понятий и алгебраических операций



• Простейшие **уравнения** решаются с опорой на свойства числовых равенств, а после изучения определенного класса функций решаются более сложные показательные, логарифмические, иррациональные, тригонометрические уравнения.


- Решения **неравенств** рассматриваются после изучения соответствующего класса функций

- 
- Ведущими дидактическими принципами курса является **оптимальная взаимосвязь научности и доступности**. Этому способствует разумная простота терминологии, а также стиль и язык изложения учебного материала.




Для **учащихся базового уровня** изложение ведется конкретно-индуктивным методом с опорой на практические задачи. Задачи мотивируют значимость вводимых понятий и иллюстрируют основу математических абстракций, показывающих математические модели реальных процессов. Применение теоретического материала на протяжении всего курса иллюстрируется примерами и задачами, решения которых разбираются достаточно подробно

- Изложение теоретического материала **для учащихся профильного уровня** ведется на дедуктивной основе. Часть доказательств отдельных положений в профильных классах переносится на самостоятельную работу под руководством учителя (к таким вопросам, например, относятся обоснования ряда равносильных преобразований уравнений, неравенств и их систем). Изучение некоторых понятий происходит с разных точек зрения и в разных разделах ( так, например, бином Ньютона рассматривается и в теории многочленов, и в разделе «Комбинаторика»), что усиливает мировоззренческую составляющую курса.



Система упражнений учебника  
имеет выделенные 4 уровня  
сложности:

- 1) обязательный базовый;
- 2) продвинутый базовый;
- 3) профильный;
- 4) углубленный профильный.

- 
- Упражнения приведены в конце каждого параграфа, в конце каждой главы (упражнения для тематического повторения) и в конце учебника (для итогового повторения курса).
  - По каждой теме (главе) имеются вопросы для проверки теоретических знаний и практические задания для самоконтроля («Проверь себя!»).


В **методических рекомендациях** приводятся

- Концептуальные особенности изложения содержания каждой главы в целом;
- Формулируются требования к обязательным результатам обучения в общеобразовательных и профильных классах;
- Ставятся цели изучения каждого параграфа; приводятся конкретные рекомендации по конструированию учебного процесса для изучения каждой темы;
- Предлагается система самостоятельных и контрольных работ по каждой теме;
- Приводятся подробные решения наиболее трудных задач учебника;
- Даются рекомендации по проведению уроков обобщения и систематизации знаний

# Алгебра и начала математического анализа

10 класс





# Тема 1. Алгебра 7-9 классов (повторение)

# Множества

- 1) Какие названия применяются для обозначения **множества** животных; кораблей?
- 2) Как называют **множество** артистов, работающих в одном театре; цветов в одной вазе?
- 3) Как называется **множество** точек земной поверхности, равноудаленных от Северного полюса; имеющих одинаковую долготу?
- 4) Коза привязана веревкой длиной  $l$  к колечку, которое может скользить по другой веревке, натянутой между кольшками  $A$  и  $B$ . Каково **множество** точек луга, до которых может дотянуться коза?

# Логика

№233 (стр. 74)


Привести контрпример, опровергающий утверждение:

1) *в любой четырехугольник* можно вписать окружность;

2) *для любого треугольника* сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны;

3) *сумма чисел с разными знаками* есть число отрицательное;

4) *в равнобедренном треугольнике* *один угол тупой*.



# Тема 11. Делимость чисел(10ч.)

# Задачи к теме 11

- §2. Задача 5. Найти последнюю цифру числа  $2^{387}$

- §4. Задача 4. Доказать, что натуральное число  $a$ , записанное в виде

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \dots + 10^n a_n$$

- делится на 11 тогда и только тогда, когда делится на 11 сумма  $a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n$

# Делимость чисел

## *Задача 2 (стр. 77)*

*Доказать, что число  $a = 16^{10} - 2^{35}$  делится на 31.*

# Задачи

- 1. Доказать, что уравнение  $42x+66y=13$  не имеет целочисленных решений.
- 2. Найти все целочисленные решения уравнения  $7x+15y = 3$ .
- 3. Найти все целочисленные решения уравнения  $x^2=y^2+7$ .
- 4. Доказать, что уравнение  $x^2-y^2=1994$  не имеет целочисленных решений

# Делимость чисел

*Задача 4 (стр.88)*

*Доказать, что уравнение  $x^2 - y^2 = 1994$  не имеет целочисленных решений.*





# **Тема 111. Многочлены.**

## **Алгебраические уравнения.(17ч.)**

■ ***Решить уравнение.***

■  **$x^3 - 3x^2 + 2 = 0$  (5 баллов)**

■  **$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 4 = 0$   
(6 баллов)**


■  **$78x^6 - 133x^5 + 133x - 78 = 0$   
(7 баллов)**

- **Теорема.** Если рациональное число  $m/n$  является корнем целочисленного многочлена

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

- то  $a_0$  делится на  $m$ , а  $a_k$  делится на  $n$
- **Задача.** Найти все корни многочлена


$$2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1.$$



# **Тема 1У. Степень с действительным показателем(11\14ч.)**

# Свойства степени

- **1.**  $a^x > 1$  при  $a > 1, x > 0$
- **Теорема.** Пусть  $a > 1$  и  $x_1 < x_2$ . Тогда  $a^{x_1} < a^{x_2}$ .
- **Сл.1.** Пусть  $0 < a < 1$  и  $x_1 > x_2$ . Тогда  $a^{x_1} < a^{x_2}$ .
- **Сл.2.** Пусть  $a > 0, a \neq 1, a^{x_1} = a^{x_2}$ . Тогда  $x_1 = x_2$ .
- **Сл.3.** Пусть  $0 < x_1 < x_2$ . Тогда,  
если  $p > 0$ , то  $x_1^p < x_2^p$ ,  
а если  $p < 0$ , то  $x_1^p > x_2^p$ .



# Тема У.

## Степенная функция (13\17ч.)

# Свойство функции $y=x^3$

- Докажем, что функция не является ограниченной.
- Т.е. докажем, что для любого  $C>0$  найдется значение  $x_c$ , такое, что  $|f(x_c)|>C$ .
- Пусть ,  $x_c = \sqrt[3]{2C}$  где  $C$ -любое положительное
- число, тогда  $f(x_c) = (\sqrt[3]{2C})^3 = 2C > C$ .

# Задача

- Функция спроса на некоторый товар задана формулой
$$q = -1 + \frac{189}{2p + 7}.$$
- Найти: 1) область определения и множество значений функции спроса; 2) объем спроса при цене  $p_1 = 20 \text{ ед.}$ ,  $p_2 = 50 \text{ ед.}$ ,  $p_3 = 80 \text{ ед.}$ ;
- 3) функцию, обратную функции спроса, которая описывает зависимость цены за единицу продукции от объема спроса.




# Примеры задач

- **Задача 9.** Решить неравенство

$$\sqrt{3x^2 + 8x - 3} > \frac{1 + 2x}{3}.$$

- **Задача 10.** Решить неравенство

$$\sqrt{2 - x} - \sqrt{x - 1} > \frac{1}{\sqrt{5}}.$$



Тема У1.  
Показательная функция  
(10\11 ч.)

# Примеры задач

- **Задача 11. Решить уравнение**


$$(x-3)^{3x^2-10x+3} = 1.$$

- **Задача 12. При каких значениях  $a$  уравнение  $(a-1)3^{2x} - (2a-1)3^x - 1 = 0$  имеет два различных корня?**

# Показательная функция

**№44 (стр. 220)**

*Доказать, что уравнение  $4^x + 25^x = 29$  имеет только один корень  $x = 1$ .*



Тема У11.  
Логарифмическая  
функция (15\17 ч.)


# Логарифмическая функция

Задача 4 (стр.236)

Как известно, двухпроцентный вклад в сбербанк, равный  $a$  рублям, через  $p$  лет становится равным  $a(1,02)^p$ , а трехпроцентный вклад становится равным  $a(1,03)^p$ . Через сколько лет каждый из вкладов удвоится?

# Задача

- **66.** Вода в исследуемом глубоком озере содержит взвесь, которая уменьшает проходимость света в воде. Эксперименты показали, что интенсивность света уменьшается на 10% при прохождении каждых 20 см воды. Днем измерительный прибор опустили на дно озера и начали постепенно поднимать. На какой глубине  $d$  прибор впервые покажет наличие света, если его чувствительность такова, что способна обнаружить 0,17% дневного света?



Тема У111.  
Тригонометрические  
формулы(21\24ч.)



# Задачи к теме У111


■ **138.** Доказать:  $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ; 2)  $\operatorname{tg}^2 36^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 72^\circ = 5$ .

■ **148.** Доказать, что если

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ то } \sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

■ **215.** Доказать тождество

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{1}{8} (5 + 3 \cos 4\alpha).$$



Тема 1Х.  
Тригонометрические  
уравнения  
(15\21ч)

# Задачи к теме 1X

**Задача 9.** Решить уравнение

$$\sin x \cdot \sin 9x \cdot \sin 13x = 1.$$

**Задача 10.** Решить уравнение

$$(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 + \cos^2 x.$$

**Задача 11.** Решить уравнение

$$\sin^6 x + \cos^8 x = 1.$$

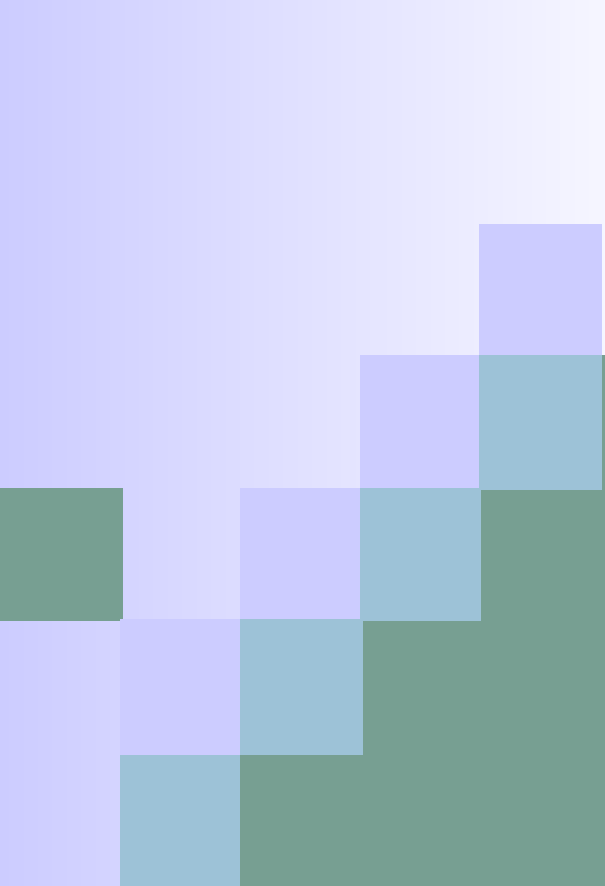
- **Задачи**

- **Задача 6. Решить неравенство**

$$\sqrt[4]{\frac{5 + 3 \cos 4x}{8}} > -\sin x.$$


- **86. Решить неравенство**

$$\frac{\sin^2 x - \frac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0$$



# Алгебра и начала математического анализа

11 класс



# Тема 1.

# Тригонометрические функции

(18\19 ч.)

# Задачи к теме 1

- **§1. Задача 8.** Доказать, что функция  $y=x \sin x$  не является ограниченной на множестве  $\mathbb{R}$ .
- **§2. Задача 8.** Доказать, что функция  $y=\sin\frac{1}{x}$  не является периодической.
- **§3. Задача 5.** Построить график функции  $y=x \cos x$ .
- **§4. Задача 3.** Исследовать функцию  $y = \log_2 \sin x$  и построить график
- **§6. Задача 5.** Построить график функции  $y=\arcsin(\sin x)$



# Тема 11.

Производная и ее  
геометрический смысл  
(17\25 ч.)



# Задачи к теме 11

- **§2. Задача .1** Исследовать функцию  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  в окрестности точки  $x=1$ .
- **Задача 2.** Исследовать функцию  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ x + 1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$  в окрестности точки  $x=0$
- **Задача 4.** Исследовать функцию  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leq 1, \\ x + 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$  в окрестности точки  $x=1$

# Задача


- **Задача 3.** Найти числа  $b$  и  $c$  такие, при которых функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x < 2, \\ b & \text{при } x = 2, \\ x + c & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

- непрерывна в точке  $x=2$

## Задачи

- **60.** Тело, масса которого  $m=5\text{ кг}$ , движется прямолинейно по закону  $s = 1-t + t^2$  (где  $s$  выражается в метрах,  $t$  - в секундах). Найти кинетическую энергию тела  $\frac{mv^2}{2}$  через 10 минут после начала движения.
- **61.** В тонком неоднородном стержне длиной 25 см его масса (в г) распределена по закону  $m=2l^2+3l$ , где  $l$ -длина стержня, отсчитываемая от его начала. Найти линейную плотность: 1) в точке, отстоящей от начала стержня на 3 см; 2) в конце стержня.



Тема 111.  
Применение  
производной к  
исследованию функций  
(15\15 ч.)

# Теорема Лагранжа

- Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a;b]$  и дифференцируема на интервале  $(a;b)$ . Тогда существует точка  $c \in (a;b)$  такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c) (b - a).$$

# Задачи

- **§2. Задача 4.** Найти экстремумы функции

$$f(x) = 5x^3 - x | x + 1 |$$

- **§3. Задача 5.** Найти высоту конуса, имеющего наибольший объем среди всех конусов, вписанных в сферу, радиуса  $R$ .

# Задача

- На координатной плоскости  $Oxy$  дана точка  $M(2;4)$ . Рассматриваются треугольники, у которых две вершины, симметричные относительно оси  $Oy$ , лежат на параболе  $y = 3x^2$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , а точка  $M$  является серединой одной из сторон каждого треугольника. Среди этих треугольников выбран тот, который имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.


# Теорема

- Для того, чтобы прямая  $y = kx + b$  была асимптотой графика функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$$






Тема 1У.  
Первообразная и  
интеграл (11\17 ч.)

# Задачи к Теме 1У


- **§3. Задача 7.** Вычислить интеграл  $\int_0^3 x \sqrt{x+1} dx$
- **§5. Задача.** Вычислить работу силы  $F$  при сжатии пружины на 0,08 м, если для ее сжатия на 0,01 м требуется сила 10 Н
- **§6. Задача 2.** Найти решение  $y(x)$  дифференциального уравнения  $y' = \cos x$ , удовлетворяющее условию  $y(0)=0$ .



Тема У.  
Комбинаторика  
(8\12 ч.)

# Задачи к теме У


- Сколько различных шифров можно набрать в автоматической камере хранения, если шифр составляется с помощью любой из тридцати букв русского алфавита с последующим трехзначным числовым кодом?
- Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 5 членов, можно образовать из 10 преподавателей?



Тема У1.  
Элементы теории  
вероятностей  
(7\10 ч.)

# Задачи к теме У1

- 1. В лотерее участвуют 15 билетов, среди которых 3 выигрышных. Наугад вынуты 2 билета. Какова вероятность того, что: 1) оба вынутых билета выигрышные; 2) выигрышного билета не оказалось; 3) только один выигрышный?
- 2. Студент, которому предстояло сдать зачет, знал ответы на 70 вопросов из 90. Какова вероятность того, что он 1) верно ответит на два вопроса; 2) ответит на второй вопрос при условии, что он не знал ответа на первый вопрос?



**Тема У11.**  
**Комплексные числа**  
**(15 ч.)**

# Задачи к теме У11

- **§2. Задача 4.** Доказать, что для любых двух комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  справедливо равенство

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

- **§3. Задача 1.** Пусть  $z_1$  и  $z_2$  - разные точки комплексной плоскости. Доказать, что  $|z - z_1| = |z - z_2|$  - уравнение прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки  $z_1$  и  $z_2$  и проходящей через его середину.




- **§4. 52.** Найти тригонометрическую форму комплексного числа  $-5(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$ ;

$$1 + \cos \alpha + i \sin \alpha, 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

- **§5. Задача 6.** Записать формулы для  $\cos 4x$  и  $\sin 4x$ .
- **§7. Задача 2.** Решить уравнение

$$z^6 = -1$$



**Тема У111.  
Уравнения и  
неравенства с двумя  
переменными  
(8\13 ч.)**

## Задачи к главе У111

- §1. **Задача 6.** Пусть  $M$  – множество точек плоскости с координатами  $(x; y)$  таких, что числа  $3x$ ,  $2y$ ,  $9-y$  являются длинами сторон некоторого треугольника. Найти площадь фигуры  $M$ .
- **Задача 7.** Найти все пары целых чисел  $x$  и  $y$ , для которых верны неравенства  $3y-x < 5$ ,  $x+y > 26$ ,  $3x-2y < 46$ .
- §2. **Задача 2.** Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению:
  - 1)  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ ;
  - 2)  $8x^3 y = y^4$

**§2. Задача 6.** Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{x - 25}{x^2 + y^2 - 625} > \frac{1}{26}$$

- **Задача 13.** Дана система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4|x|, \\ |x| + |y| \geq 2, \\ x^2 - y^2 + 16 - 8x \geq 0. \end{cases}$$

- Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют: 1) первому неравенству системы; 2) первым двум неравенствам системы; 3) всем трем неравенствам системы.
- **§3. Задача 1.** Найти все значения  $a$ , при которых существует ровно одна пара действительных чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих уравнению

$$2x^2 + 4x + 2y^2 - 8y + 10 - a = 0$$



Спасибо за  
внимание