

Концепция учебника по алгебре и началам анализа для профильной ШКОЛЫ


Доцент кафедры методики и теории
преподавания математики в школе
Московского городского педагогического
университета
Надежда Евгеньевна Фёдорова, к. п. н.

900igr.net


Содержание учебников призвано сформировать


- у **всех** учащихся старших классов представление о математике как о части человеческой культуры, как о средстве моделирования различных явлений природы, жизни и деятельности человека;


- *у учащихся, планирующих связать свою дальнейшую, профессиональную деятельность с естественно – научными, техническими, экономическими знаниями* – представление о широком применении математических методов в различных теоретических и практических вопросах; сформировать прочные и конкретные знания и умения, позволяющие в дальнейшем использовать математику как средство освоения своих профессиональных знаний.



Содержательные и структурные особенности учебника


- 
- первая глава учебника в сжатом виде повторяет традиционное содержание основной (девятилетней) школы, что позволит учителю эффективно организовать повторение математики, максимально используя самостоятельную деятельность учащихся (при чтении текстов и решении задач из этой главы).
 - *В этой же главе дается краткое изложение элементов теории множеств и логики – вопросов, включенных в содержание нового стандарта математического образования для основной школы.*

- 
- В связи с возрастными особенностями учащихся традиционный курс алгебры, связанный с элементарными функциями и их исследованием методами элементарной математики предшествует изучению элементов математического анализа;




Ведущей линией курса является **числовая линия**, что позволяет с самого начала строить курс с опорой на свойства действительных чисел. В частности, это объясняет тот факт, что основное содержание курса начинается с изучения теории делимости чисел .


Числовая линия свое логическое завершение получает в главе «Комплексные числа», рассматриваемой в конце 11 класса

- 
- Развивается числовая линия параллельно функциональной, но с некоторым опережением по времени. Вопросы, связанные с исследованием **функции** следуют за изучением соответствующих числовых понятий и алгебраических операций

• Простейшие **уравнения** решаются с опорой на свойства числовых равенств, а после изучения определенного класса функций решаются более сложные показательные, логарифмические, иррациональные, тригонометрические уравнения.


- Решения **неравенств** рассматриваются после изучения соответствующего класса функций

- 
- Ведущими дидактическими принципами курса является **оптимальная взаимосвязь научности и доступности**. Этому способствует разумная простота терминологии, а также стиль и язык изложения учебного материала.




Для **учащихся базового уровня** изложение ведется конкретно-индуктивным методом с опорой на практические задачи. Задачи мотивируют значимость вводимых понятий и иллюстрируют основу математических абстракций, показывающих математические модели реальных процессов. Применение теоретического материала на протяжении всего курса иллюстрируется примерами и задачами, решения которых разбираются достаточно подробно

- Изложение теоретического материала **для учащихся профильного уровня** ведется на дедуктивной основе. Часть доказательств отдельных положений в профильных классах переносится на самостоятельную работу под руководством учителя (к таким вопросам, например, относятся обоснования ряда равносильных преобразований уравнений, неравенств и их систем). Изучение некоторых понятий происходит с разных точек зрения и в разных разделах (так, например, бином Ньютона рассматривается и в теории многочленов, и в разделе «Комбинаторика»), что усиливает мировоззренческую составляющую курса.



Система упражнений учебника
имеет выделенные 4 уровня
сложности:

- 1) обязательный базовый;
- 2) продвинутый базовый;
- 3) профильный;
- 4) углубленный профильный.

- 
- Упражнения приведены в конце каждого параграфа, в конце каждой главы (упражнения для тематического повторения) и в конце учебника (для итогового повторения курса).
 - По каждой теме (главе) имеются вопросы для проверки теоретических знаний и практические задания для самоконтроля («Проверь себя!»).



В **методических рекомендациях** приводятся

-Концептуальные особенности изложения содержания каждой главы в целом;

-Формулируются требования к обязательным результатам обучения в общеобразовательных и профильных классах;

-Ставятся цели изучения каждого параграфа; приводятся конкретные рекомендации по конструированию учебного процесса для изучения каждой темы;


-Предлагается система самостоятельных и контрольных работ по каждой теме;

-Приводятся подробные решения наиболее трудных задач учебника;

-Даются рекомендации по проведению уроков обобщения и систематизации знаний

Алгебра и начала математического анализа

10 класс



Тема 1. Алгебра 7-9 классов (повторение)

Множества

- 1) Какие названия применяются для обозначения **множества** животных; кораблей?
- 2) Как называют **множество** артистов, работающих в одном театре; цветов в одной вазе?
- 3) Как называется **множество** точек земной поверхности, равноудаленных от Северного полюса; имеющих одинаковую долготу?
- 4) Коза привязана веревкой длиной l к колечку, которое может скользить по другой веревке, натянутой между кольшками A и B . Каково **множество** точек луга, до которых может дотянуться коза?

Логика

№233 (стр. 74)


Привести контрпример, опровергающий утверждение:

1) **в любой четырехугольник** можно вписать окружность;

2) **для любого треугольника** сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны;

3) **сумма чисел с разными знаками** есть число отрицательное;

4) **в равнобедренном треугольнике** **один угол тупой.**



Тема 11. Делимость чисел(10ч.)

Задачи к теме 11

- §2. Задача 5. Найти последнюю цифру числа 2^{387}

- §4. Задача 4. Доказать, что натуральное число a , записанное в виде

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \dots + 10^n a_n$$

- делится на 11 тогда и только тогда, когда делится на 11 сумма $a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n$

Делимость чисел

Задача 2 (стр. 77)

Доказать, что число $a = 16^{10} - 2^{35}$ делится на 31.

Задачи

- 1. Доказать, что уравнение $42x+66y=13$ не имеет целочисленных решений.
- 2. Найти все целочисленные решения уравнения $7x+15y=3$.
- 3. Найти все целочисленные решения уравнения $x^2=y^2+7$.
- 4. Доказать, что уравнение $x^2-y^2=1994$ не имеет целочисленных решений

Делимость чисел

Задача 4 (стр.88)

Доказать, что уравнение $x^2 - y^2 = 1994$ не имеет целочисленных решений.



Тема 111. Многочлены.

Алгебраические уравнения.(17ч.)

■ ***Решить уравнение.***

■ **$x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ (5 баллов)**

■ **$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 4 = 0$
(6 баллов)**


■ **$78x^6 - 133x^5 + 133x - 78 = 0$
(7 баллов)**

- **Теорема.** Если рациональное число m/n является корнем целочисленного многочлена

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

- то a_0 делится на m , а a_k делится на n
- **Задача.** Найти все корни многочлена


$$2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1.$$



Тема 1У. Степень с действительным показателем(11\14ч.)

Свойства степени

- **1.** $a^x > 1$ при $a > 1, x > 0$
- **Теорема.** Пусть $a > 1$ и $x_1 < x_2$. Тогда $a^{x_1} < a^{x_2}$.
- **Сл.1.** Пусть $0 < a < 1$ и $x_1 > x_2$. Тогда $a^{x_1} < a^{x_2}$.
- **Сл.2.** Пусть $a > 0, a \neq 1, a^{x_1} = a^{x_2}$. Тогда $x_1 = x_2$.
- **Сл.3.** Пусть $0 < x_1 < x_2$. Тогда,
если $p > 0$, то $x_1^p < x_2^p$,
а если $p < 0$, то $x_1^p > x_2^p$.



Тема У.

Степенная функция (13\17ч.)

Свойство функции $y=x^3$

- Докажем, что функция не является ограниченной.
- Т.е. докажем, что для любого $C>0$ найдется значение x_c , такое, что $|f(x_c)|>C$.
- Пусть , $x_c = \sqrt[3]{2C}$ где C -любое положительное
- число, тогда $f(x_c) = (\sqrt[3]{2C})^3 = 2C > C$.

Задача

- Функция спроса на некоторый товар задана формулой
$$q = -1 + \frac{189}{2p + 7}.$$
- Найти: 1) область определения и множество значений функции спроса; 2) объем спроса при цене $p_1 = 20 \text{ ед.}$, $p_2 = 50 \text{ ед.}$, $p_3 = 80 \text{ ед.}$;
- 3) функцию, обратную функции спроса, которая описывает зависимость цены за единицу продукции от объема спроса.


Примеры задач

- **Задача 9.** Решить неравенство

$$\sqrt{3x^2 + 8x - 3} > \frac{1 + 2x}{3}.$$

- **Задача 10.** Решить неравенство

$$\sqrt{2-x} - \sqrt{x-1} > \frac{1}{\sqrt{5}}.$$



Тема У1.
Показательная функция
(10\11 ч.)

Примеры задач

- **Задача 11. Решить уравнение**


$$(x-3)^{3x^2-10x+3} = 1.$$

- **Задача 12. При каких значениях a уравнение $(a-1)3^{2x} - (2a-1)3^x - 1 = 0$ имеет два различных корня?**

Показательная функция

№44 (стр. 220)

Доказать, что уравнение $4^x + 25^x = 29$ имеет только один корень $x = 1$.



Тема У11.
Логарифмическая
функция (15\17 ч.)


Логарифмическая функция

Задача 4 (стр.236)

Как известно, двухпроцентный вклад в сбербанк, равный a рублям, через p лет становится равным $a(1,02)^p$, а трехпроцентный вклад становится равным $a(1,03)^p$. Через сколько лет каждый из вкладов удвоится?

Задача

- **66.** Вода в исследуемом глубоком озере содержит взвесь, которая уменьшает проходимость света в воде. Эксперименты показали, что интенсивность света уменьшается на 10% при прохождении каждых 20 см воды. Днем измерительный прибор опустили на дно озера и начали постепенно поднимать. На какой глубине d прибор впервые покажет наличие света, если его чувствительность такова, что способна обнаружить 0,17% дневного света?



Тема У111.
Тригонометрические
формулы(21\24ч.)

Задачи к теме У111


■ **138.** Доказать: $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; 2) $\operatorname{tg}^2 36^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 72^\circ = 5$.

■ **148.** Доказать, что если

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ то } \sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

■ **215.** Доказать тождество

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{1}{8} (5 + 3 \cos 4\alpha).$$



Тема 1X.
Тригонометрические
уравнения
(15\21ч)

Задачи к теме 1X

Задача 9. Решить уравнение

$$\sin x \cdot \sin 9x \cdot \sin 13x = 1.$$

Задача 10. Решить уравнение

$$(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 + \cos^2 x.$$

Задача 11. Решить уравнение

$$\sin^6 x + \cos^8 x = 1.$$

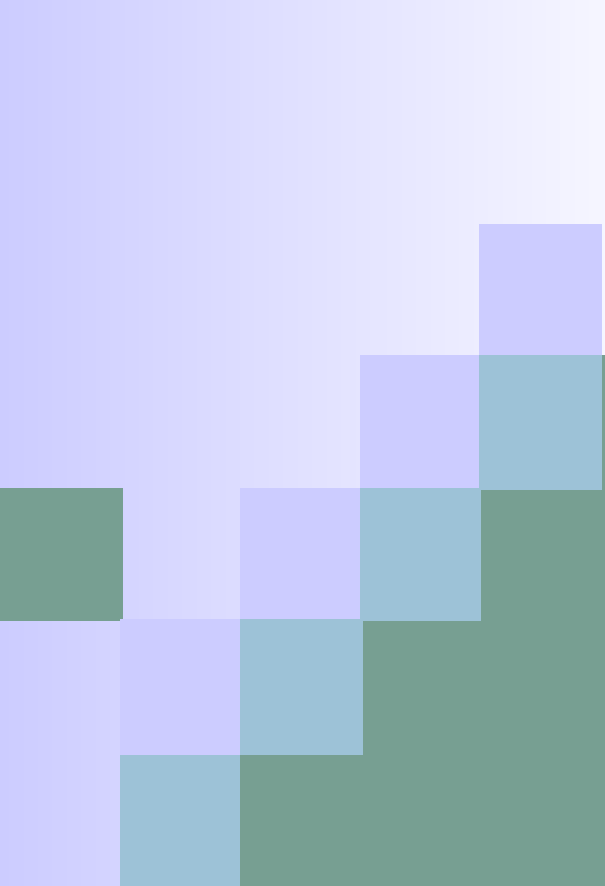
- **Задачи**

- **Задача 6. Решить неравенство**

$$\sqrt[4]{\frac{5 + 3 \cos 4x}{8}} > -\sin x.$$


- **86. Решить неравенство**

$$\frac{\sin^2 x - \frac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0$$



Алгебра и начала математического анализа

11 класс



Тема 1.

Тригонометрические функции

(18\19 ч.)

Задачи к теме 1

- §1. Задача 8. Доказать, что функция $y=x \sin x$ не является ограниченной на множестве \mathbb{R} .
- §2. Задача 8. Доказать, что функция $y=\sin\frac{1}{x}$ не является периодической.
- §3. Задача 5. Построить график функции $y=x \cos x$.
- §4. Задача 3. Исследовать функцию $y = \log_2 \sin x$ и построить график
- §6. Задача 5. Построить график функции $y=\arcsin(\sin x)$



Тема 11.

Производная и ее
геометрический смысл
(17\25 ч.)

Задачи к теме 11

- **§2. Задача .1** Исследовать функцию $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ в окрестности точки $x=1$.
- **Задача 2.** Исследовать функцию $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ x + 1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$ в окрестности точки $x=0$
- **Задача 4.** Исследовать функцию $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leq 1, \\ x + 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$ в окрестности точки $x=1$

Задача


- **Задача 3.** Найти числа b и c такие, при которых функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x < 2, \\ b & \text{при } x = 2, \\ x + c & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

- непрерывна в точке $x=2$

Задачи

- **60.** Тело, масса которого $m=5\text{кг}$, движется прямолинейно по закону $s = 1-t + t^2$ (где s выражается в метрах, t - в секундах). Найти кинетическую энергию тела $\frac{mv^2}{2}$ через 10 минут после начала движения.
- **61.** В тонком неоднородном стержне длиной 25 см его масса (в г) распределена по закону $m=2l^2+3l$, где l -длина стержня, отсчитываемая от его начала. Найти линейную плотность: 1) в точке, отстоящей от начала стержня на 3 см; 2) в конце стержня.



Тема 111.
Применение
производной к
исследованию функций
(15\15 ч.)

Теорема Лагранжа

- Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$. Тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c) (b - a).$$

Задачи

- **§2. Задача 4.** Найти экстремумы функции

$$f(x) = 5x^3 - x |x + 1|$$

- **§3. Задача 5.** Найти высоту конуса, имеющего наибольший объем среди всех конусов, вписанных в сферу, радиуса R .

Задача


- На координатной плоскости Oxy дана точка $M(2;4)$. Рассматриваются треугольники, у которых две вершины, симметричные относительно оси Oy , лежат на параболе $y = 3x^2$, $-1 \leq x \leq 1$, а точка M является серединой одной из сторон каждого треугольника. Среди этих треугольников выбран тот, который имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

Теорема

- Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$$



Тема 1У. Первообразная и интеграл (11\17 ч.)

Задачи к Теме 1У


- **§3. Задача 7.** Вычислить интеграл $\int_0^3 x \sqrt{x+1} dx$
- **§5. Задача.** Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,08 м, если для ее сжатия на 0,01 м требуется сила 10 Н
- **§6. Задача 2.** Найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = \cos x$, удовлетворяющее условию $y(0)=0$.



Тема У.
Комбинаторика
(8\12 ч.)

Задачи к теме У


- Сколько различных шифров можно набрать в автоматической камере хранения, если шифр составляется с помощью любой из тридцати букв русского алфавита с последующим трехзначным числовым кодом?
- Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 5 членов, можно образовать из 10 преподавателей?



Тема У1.
Элементы теории
вероятностей
(7\10 ч.)

Задачи к теме У1

- 1. В лотерее участвуют 15 билетов, среди которых 3 выигрышных. Наугад вынуты 2 билета. Какова вероятность того, что: 1) оба вынутых билета выигрышные; 2) выигрышного билета не оказалось; 3) только один выигрышный?
- 2. Студент, которому предстояло сдать зачет, знал ответы на 70 вопросов из 90. Какова вероятность того, что он 1) верно ответит на два вопроса; 2) ответит на второй вопрос при условии, что он не знал ответа на первый вопрос?



Тема У11.
Комплексные числа
(15 ч.)

Задачи к теме У11

- **§2. Задача 4.** Доказать, что для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$


- **§3. Задача 1.** Пусть z_1 и z_2 - разные точки комплексной плоскости. Доказать, что $|z - z_1| = |z - z_2|$ - уравнение прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки z_1 и z_2 и проходящей через его середину.

- **§4. 52.** Найти тригонометрическую форму комплексного числа $-5(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$;

$$1 + \cos \alpha + \sin \alpha, 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

- **§5. Задача 6.** Записать формулы для $\cos 4x$ и $\sin 4x$.
- **§7. Задача 2.** Решить уравнение

$$z^6 = -1$$



**Тема У111.
Уравнения и
неравенства с двумя
переменными
(8\13 ч.)**

Задачи к главе У111

- §1. **Задача 6.** Пусть M – множество точек плоскости с координатами $(x; y)$ таких, что числа $3x$, $2y$, $9-y$ являются длинами сторон некоторого треугольника. Найти площадь фигуры M .
- **Задача 7.** Найти все пары целых чисел x и y , для которых верны неравенства $3y-x < 5$, $x+y > 26$, $3x-2y < 46$.
- §2. **Задача 2.** Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению:
 - 1) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$;
 - 2) $8x^3 y = y^4$

§2. Задача 6. Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{x - 25}{x^2 + y^2 - 625} > \frac{1}{26}$$

- **Задача 13.** Дана система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4|x|, \\ |x| + |y| \geq 2, \\ x^2 - y^2 + 16 - 8x \geq 0. \end{cases}$$

- Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют: 1) первому неравенству системы; 2) первым двум неравенствам системы; 3) всем трем неравенствам системы.
- **§3. Задача 1.** Найти все значения a , при которых существует ровно одна пара действительных чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$2x^2 + 4x + 2y^2 - 8y + 10 - a = 0$$



Спасибо за
внимание