

# Уравнения с параметрами

Что значит решить уравнение с параметрами?

---

Пусть дано равенство с параметрами  $x$ ;  $a$ ;  $f(x;a)=0$  и поставлена задача: для каждого действительного значения  $a$  решить это уравнение относительно  $x$ , то уравнение  $f(x;a)=0$  называется уравнением с переменной  $x$  и параметром  $a$ .

Решить это уравнение с параметром  $a$  – это значит для каждого значения  $a$  найти значения  $x$ , удовлетворяющие этому уравнению

С4. Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\sqrt{x-8} = -ax + 3a + 2$  имеет единственное решение.

---

Пусть  $\sqrt{x-8} = t$ ,  $t \geq 0$ , тогда  $x - 8 = t^2$ ;  $x = t^2 + 8$  и уравнение примет вид:

$$t = -a t^2 - 8a + 3a + 2$$

$$a t^2 + t + 5a - 2 = 0$$

1) Если  $a = 0$ , то уравнение имеет единственный корень

$$t - 2 = 0; t = 2; x = 4 + 8 = 12$$

2) Если  $a \neq 0$  и  $a > 0$

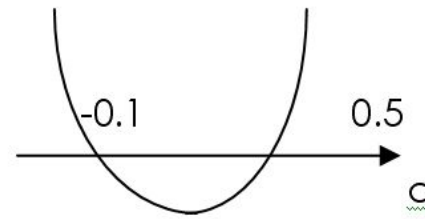
$$D = 1 - 4a(5a - 2) = 1 - 20a^2 + 8a;$$

$$-20a^2 + 8a + 1 > 0$$

$$20a^2 - 8a - 1 < 0$$

- 1) Ветви вверх
- 2) Нули функции

$$20a^2 - 8a - 1 = 0$$



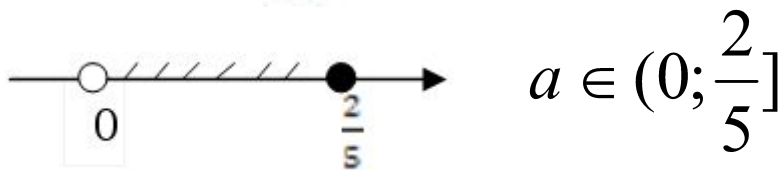
---


$$D = 16 + 20 = 36$$

$$a_1 = \frac{4 + 6}{20} = 0,5$$

$$a_2 = \frac{4 - 6}{20} = -0,1$$

Т.к.  $t \geq 0$ , то единственное неотрицательное решение будет, если  $t_2 = \frac{5a - 2}{a}$



3. Если  $a \neq 0$  и  $\mathcal{D} = 0$

$\mathcal{D} = 0$  если:

$$a = -0.5 \quad \text{или} \\ -0.1t^2 + t + 2.5 = 0$$

$$t^2 - 10t + 25 = 0$$

$$t = 5$$

$$a = 0.5 \\ 0.5t^2 + t + 0.5 = 0$$

$$t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$t = -1 \quad (\text{неуд. } t \geq 0)$$

**Ответ:  $[0; 0,4]; -0.1$**

Прежде всего при решении уравнения с параметрами надо сделать то, что делается при решении любого уравнения – привести заданное уравнение к более простому виду, то есть разложить на множители, избавиться от модулей, логарифмов и т. д.

# Как решить задачи с параметром?

---

При решении задач с параметром иногда удобно, а иногда просто необходимо строить графики. Эскиз графиков иногда помогают увидеть «ход решения».

Необходимо в первую очередь рассмотреть решение при тех значениях параметра, при которых обращается в ноль коэффициент при старшей степени  $x$ , тем самым понизив степень многочлена.

C2 Найти все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$x^2 + 2(a^2 + 1)|x| + a = 0 \quad \text{имеет 2 различных корня.}$$

Т.к.  $|x^2| = x^2$ , то сделаем замену переменных

---

$|x| = t, t \geq 0$  и уравнение примет вид:  $t^2 + 2(a^2 + 1)t + a = 0$

итак, надо найти те значения  $a$ , при которых квадратное уравнение имеет один положительный корень  $t$  (тогда  $x = \pm t$ ).

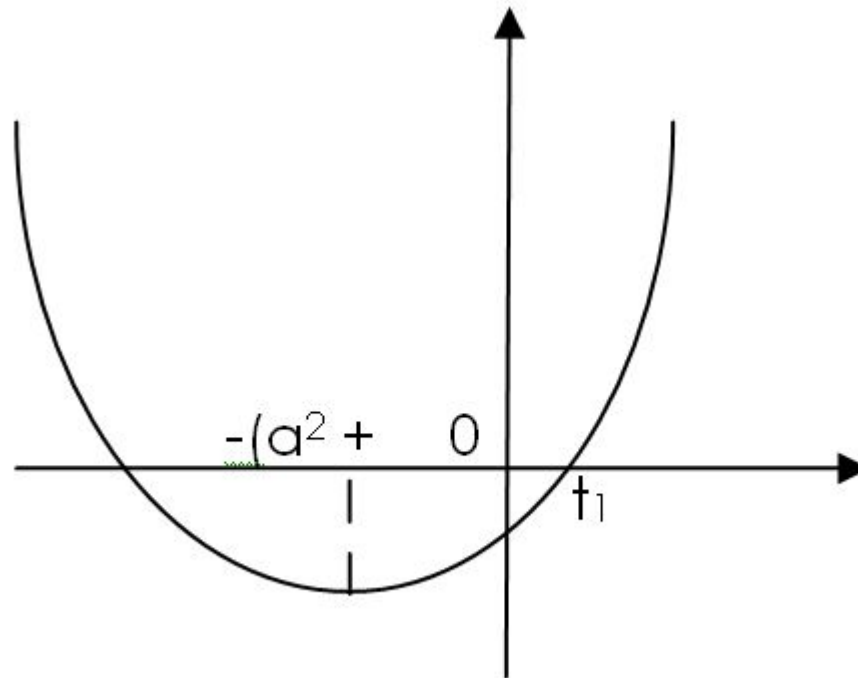
Рассмотрим функцию  $y = t^2 + 2(a^2 + 1)t + a$

График функции – парабола, ветви – вверх.

$$t_0 = \frac{(a^2 + 1)2}{(-1)2} = -(a^2 + 1)$$

# Иллюстрируем схематически

---



Квадратное уравнение будет иметь один положительный корень, если  $y(0) < 0$   
 $y(0) = 0 + 2(a^2 + 1) \cdot 0 + a$   
 $y(0) = a$ , значит  $a < 0$