Решение уравнений третьей степени

Пример:

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 3x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$x^2 (x - 2) - (3x^2 - 8x + 4) = 0$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$x = 2 \qquad x = 2/3$$

$$x^2 (x - 2) - (3 (x - 2) (x - 2/3)) = 0$$

$$x^2 (x - 2) - ((x - 2) (3x - 2)) = 0$$

$$(x - 2)(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$x - 2 = 0 \qquad\qquad x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = 2 \qquad x = 2 \quad x = 1$$

Ответ: x = 2; x = 1.

Цель работы: Выявить способы решения уравнения третьей степени.

Задачи работы:

1) Познакомиться с историческими фактами, связанными с данным вопросом.

2) Описать технологии различных существующих способов решения уравнений третьей степени.

3) Провести анализ этих способов, сравнить их.

4) Привести примеры практического применения различных способов решения практических уравнений.

Объект исследования: уравнения третьей степени.

Предмет исследования: способы решения уравнений третьей степени.

•   На рубеже XV и XVI веков был подытожен опыт решения уравнений третьей степени в одной из первых печатных книг по математике «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности», напечатанной в Венеции в 1494 году. Ее автор-монах Лука Пачоли, друг великого Леонардо да Винчи.

$$x^3 + ax = b \quad (1) \qquad x^3 = ax + b \quad (2)$$

•   В конце 1534 года ученик Ферро Антонио Марио Фиоре, знавший это решение, вызвал на поединок математика из Венеции Никколо Тарталью.

•   Тарталья прилагает титанические усилия, и за 8 дней до назначенного срока (срок истекал 12 февраля 1535 года) счастье улыбается ему: искомый способ найден. После этого Тарталья за 2 часа решил все задачи противника, в то время как Фиоре не решил к сроку не одной задачи Тартальи.

- Кардано родился 24 сентября 1501 года в Павии, в семье юриста.
- К 1539 году Кардано заканчивает свою первую книгу целиком посвященную математике « Практика общей арифметики ». По его замыслу, она должна была заменить книгу Пачоли.
- В январе 1539 года Кардано обращается к Тарталье с просьбой передать ему правила решения уравнения (1) или для опубликования в своей книге, или под обещание держать сообщенное в секрете. Тарталья отказывается. 12 февраля Кардано повторяет свою просьбу. Тарталья неумолим. 13 марта Кардано преглашает Тарталью к себе в Милан, обещая представить его губернатору Ломбардии. По-видимому, эта перспектива прельстила Тарталью: он принимает приглашение. 25 марта в доме Кардано состоялась решающая беседа. Итак, Тарталья дал уговорить себя.

- **В 1543 году Кардано и Феррари поехали в Болонью, где дела Наве позволил им познакомиться с бумагами покойного дель Ферро. Там они убедились, что последнему уже было известно правило Тартальи.**

  К 1543 году Кардано научился решать не только уравнения (1) и (2), но и уравнения $x^3 + b = ax$ (3) , а также «полное» кубическое уравнение, т.е. уравнение, содержащие член с x^2. К тому же времени Феррари придумал, как решать уравнения четвертой степени.

«Великое искусство»

- $x^3 = ax + b$ (2)
- Уравнение (2) можно решить при помощи подстановки x = $\alpha + \beta$
- $x^3 + b = ax$ (3)

- Кардано решил уравнение (3), дав очень смелое по тем временам рассуждение, обыгрывающее отрицательность корня.

- Кардано полностью разобрался и с общим кубическим уравнением $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, заметив, что подстановка $x = y – a/3$ уничтожает член с x^2.
- В 1545 году Кардано все известное ему о кубических уравнениях включил в вышедшую книгу « Великое искусство или о правилах алгебры».
- Если уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три вещественных корня, то их сумма равна $–a$.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

$$x = y - \frac{a}{3}$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b(y - \frac{a}{3}) + c = y^3 - ay^2 + \frac{a^2}{3}y - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2}{3}a^2 y +$$

$$\frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c = y^3 + (b - \frac{a^2}{3})y + (c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (2)$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Первый пример:

$$x^3 + 6x - 2 = 0$$

Здесь p = 6 и q =-2.Наша формула дает:

$$x = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$$

В школе нас приучили, что все корни должны извлекаться, и полученный ответ может показаться нам недостаточно красивым. Но согласитесь, что никакой подбор не помог бы нам узнать, что эта разность двух кубических корней является решением такого простого уравнения. Так что этот результат можно записать нашей формуле в актив.

Второй пример:

$x^3 + 3x - 4 = 0$. Формула (3) дает:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

Ответ более громоздок. Это число можно найти приближенно с помощью таблиц, и чем точнее будут таблицы, тем ближе будет результат к единице. Причина проста: это число равно единице. Но из формулы этого не видно, и это, пожалуй, недостаток формулы: ведь при решении *квадратного* уравнения с целыми коэффициентами, мы сразу видим, является ли оно *рациональным*.

Третий пример:

(x + 1)(x + 2)(x - 3) = 0.

Сразу видно, что это уравнение имеет три решения: -1, -2, 3. Но попробуем решить его по формуле. Раскрываем скобки

.

$$x^3 - 7x - 6 = 0$$

и применяем формулу (3):

$$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}$$

Экстремумы многочлена третьей степени

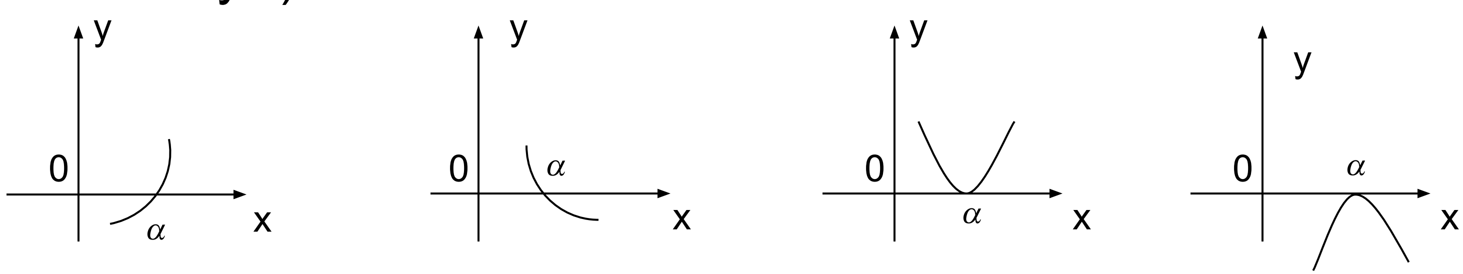
y = Рассмотрим, как находятся точки максимума и минимума функции $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

- $y = ax^2 + bx + c$ (1) ( ). $a \neq 0$

В первом и втором случаях говорят, что *функция монотонна в точке* х = α

(в первом случае она возрастает, во втором – убывает). В третьем и четвертом случаях говорят, что *функция имеет экстремум в точке* х = α

(в третьем случае – минимум, в четвертом – максимум).



- *Корень квадратного трехчлена является его точкой экстремума тогда и только тогда, когда этот корень – двукратный*.

- **Теорема 1.**
  Для того, чтобы точка $x = \alpha$ была точкой экстремума функции $y = ax^2+bx+c$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число m, при котором многочлен $ax^2+bx+c-m$ имеет двукратный корень $x = \alpha$.*

- **Лемма.** *Пусть дан многочлен третьей степени* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. $(a \neq 0)$, *и пусть* $x = \alpha$ *- его действительный корень. Тогда* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d =$

  $= a(x - \alpha)(x^2 + px + q)$,   (3)   где p и q *– некоторые действительные числа.*

- **Теорема 2.**

Для того чтобы точка $x = \alpha$ *была точкой экстремума функции* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число* m, *при котором многочлен* $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d - m$ *имеет двукратный корень* $x = \alpha$, *то есть* $P(x) = a\,(x-\alpha)^2(x-\beta)$ (4)

где $\alpha \neq \beta$.

- **Теорема 3.**(достаточные условия максимума и минимума).

Пусть функция $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *имеет экстремум в точке* $x = \alpha$ *и* m *– значение функции в точке* $x = \alpha$*. Представим многочлен* $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d - m$ *в виде (4). Тогда, если* $a(\beta - \alpha) > 0$*, то* $x = \alpha$ *- точка максимума; если* $a(\beta - \alpha) < 0$*, то* $x = \alpha$ *- точка минимума.*

Исследовать на экстремумы функцию

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ (5) и построить ее график.

Попробуем подобрать числа m, α, β так, чтобы выполнялось тождество

$x3 - 3x2 - 9x + 5 - m = (x-\alpha)^2 \ (x-\beta)$ (причем $\alpha \neq \beta$). Отсюда

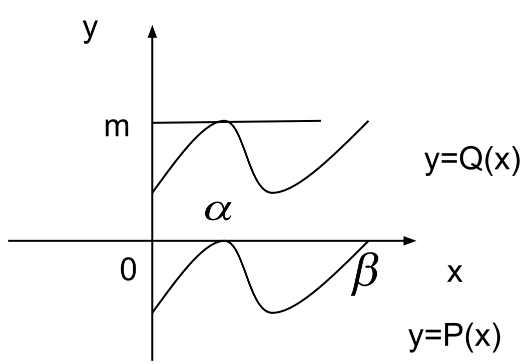
$x^3 - 3x^2 - 9x + 5 - m = (\beta + 2\alpha) x^2 + (2\alpha\beta + \alpha^2)x - \alpha^2\beta$

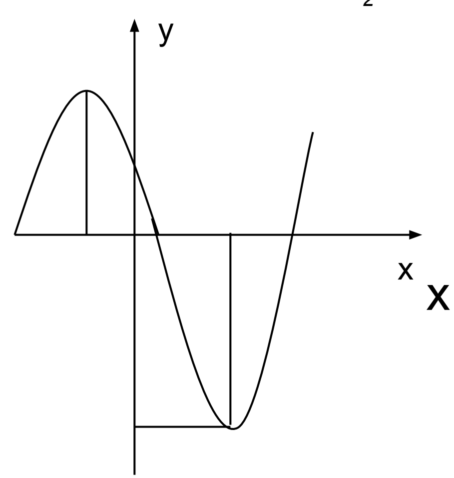
Для отыскания значения m, α, β мы получим систему уравнений

$$\begin{cases} -(\beta + 2\alpha) = -3 \\ 2\alpha\beta + \alpha^2 = -9 \\ -\alpha^2\beta = 5 - m \end{cases}$$

Эта система имеет следующие решения: $\alpha_1 = -1, \ \beta_1 = 5$, $m_1 = 10$

$\alpha_2 = 3, \ \beta_2 = -3$, $m_2 = -22$.





Выводы

- В процессе работы мы познакомились с историей развития проблемы решения уравнения третьей степени.
- Теоретическая значимость полученных результатов заключается в том, что осознано место формулы Кардано в решении некоторых уравнений третьей степени.
- Мы убедились в том, что формула решения уравнений третьей степени существует, но она не популярна из-за ее громоздкости и не очень надежна, т.к. не всегда достигает конечного результата.
- Т.к. очень часто приходиться исследовать на экстремумы функции в правой части которой многочлен третьей степени, то большое практическое значение имеет алгоритм нахождения экстремумов многочлена третьей степени, который рассмотрен в работе.

Направления дальнейшего исследования

- В дальнейшем можно рассматривать такие вопросы:
- как узнать заранее, какие корни имеет уравнение третьей степени,
- можно ли кубическое уравнение решить графическим способом, если можно, то как;
- как оценить приближенно корни кубического уравнения;
- как построить график кубического четырехчленна.