

# ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Основные определения

# Векторы

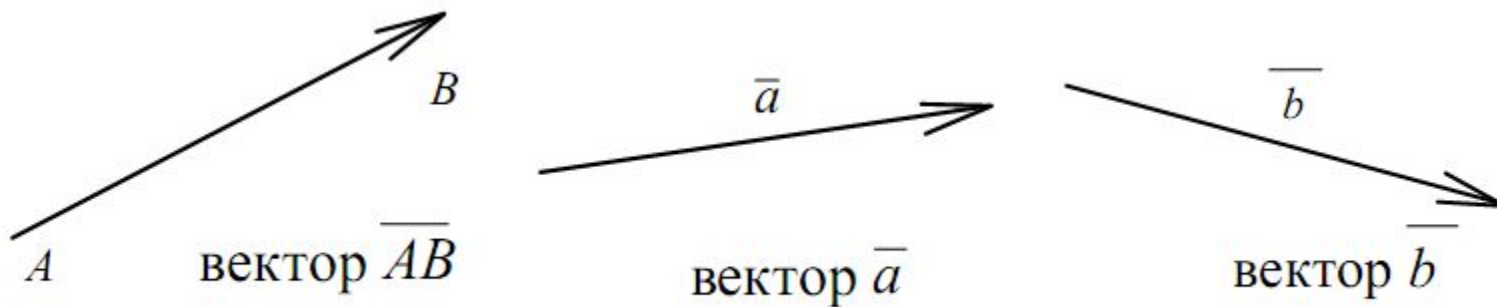
---

**Определение.** Вектором назовём направленный отрезок, т.е. отрезок прямой, ограниченный двумя точками, одна из которых называется начальной, а другая конечной.

---

# Изображение и обозначения

---



---

**Определение 2.2.** *Модуль вектора есть положительное число, равное длине вектора, т. е. расстоянию между его начальной и конечной точками.*

Обозначение модуля:  $|\overline{AB}|$ ,  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ .

*Вектор, у которого конечная точка совпадает с начальной, называется нуль-вектор и обозначается  $\vec{0}$ . Направление нулевого вектора не определено.*

**Определение 2.3.** *Векторы равны, если они одинаково направлены и длины их равны.*

**Определение 2.4.** *Вектор, длина которого равна единице, называют единичным вектором.*

---

**Определение 2.5.** Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной или на параллельных прямых.

Два коллинеарных вектора называются одинаково направленными, если их концы  $B$  и  $D$  лежат по одну сторону от прямой  $AC$ , содержащей их начала (см. рис. 2.2). В противном случае они называются противоположно направленными.

Два вектора, противоположно направленные, но имеющие одинаковые длины, называются противоположными.

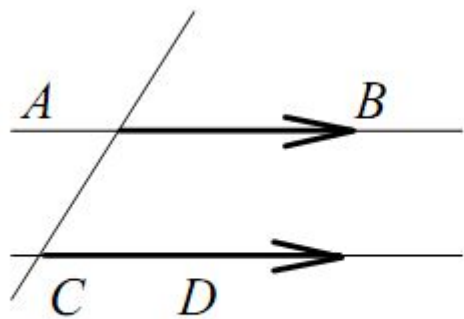


Рис. 2.2

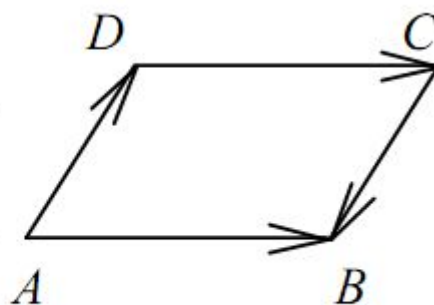


Рис. 2.3

# Компланарные векторы

---

*Определение 2.6. Векторы, лежащие в одной плоскости (или в параллельных плоскостях), называются компланарными.*

Вектор, точка приложения которого может быть выбрана произвольно, называют свободным.

---

# Линейные операции над векторами

---

К линейным операциям относятся операции умножения вектора на число, сложения и вычитания векторов.

---

---

*Умножение вектора на число. Произведением вектора  $\bar{a}$  на число  $\lambda$  называется вектор  $\bar{c}$ , коллинеарный вектору  $\bar{a}$ , имеющий длину  $|\bar{c}| = |\lambda| |\bar{a}|$ , одинаково направленный с вектором  $\bar{a}$  при  $\lambda > 0$  и противоположно направленный при  $\lambda < 0$ .*

Таким образом, векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{c}$  коллинеарны тогда, и только тогда, когда  $\bar{c} = \lambda \bar{a}$ .

---



**Сложение векторов.** Отложим вектор  $\vec{a} = \overline{AB}$  от некоторой точки  $A$  (рис. 2.4), затем от точки  $B$  отложим вектор  $\vec{b} = \overline{BC}$ .

Вектор  $\overline{AC}$ , соединяющий начало первого вектора и конец второго, называется суммой и обозначается  $\vec{a} + \vec{b}$ . Эту же сумму можно получить другим способом. Пусть точка  $A$  – общее начало векторов,  $\overline{AB} = \vec{a}$  и  $\overline{AC} = \vec{b}$ . Построим на этих векторах как на сторонах параллелограмм (рис. 2.5).

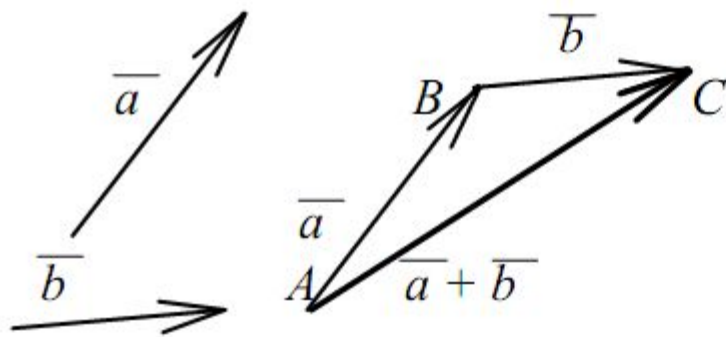


Рис. 2.4

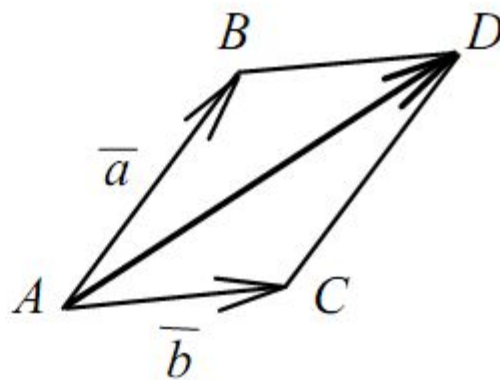


Рис. 2.5

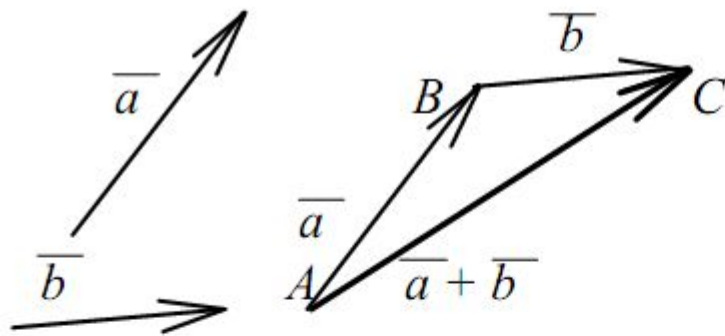


Рис. 2.4

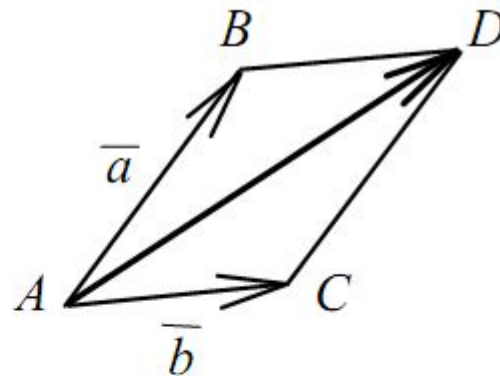


Рис. 2.5

*Диагональ параллелограмма – вектор*

$$\overline{AD} = \overline{a} + \overline{b} = \begin{cases} \overline{AB} + \overline{BD}, \\ \overline{AC} + \overline{CD} \end{cases}$$

является суммой векторов  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$ , т. к. вектор в пространстве можно переносить параллельно самому себе и, значит,  $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ .

**Замечание.** Операция сложения векторов распространяется на любое конечное число слагаемых векторов. Чтобы сложить три вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  (рис. 2.6), расположим их так, чтобы конец первого служил началом второго, а конец второго – началом третьего, т. е.  $\vec{a} = \overline{AB}$ ,  $\vec{b} = \overline{BC}$ ,  $\vec{c} = \overline{CD}$ . Суммой векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  является вектор  $\overline{AD}$ , соединяющий начало первого и конец последнего вектора (метод замыкающей)  $\overline{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .

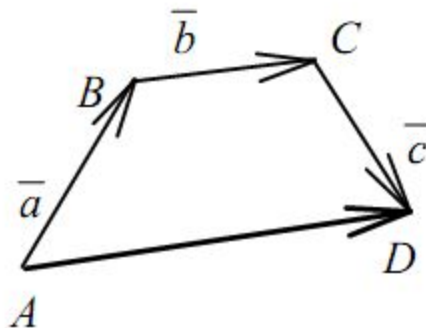


Рис. 2.6

**Вычитание векторов.** Разностью двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется третий вектор  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ , равный сумме векторов  $\vec{a}$  и  $(-\vec{b})$ , если  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$  (см. рис 2.7).

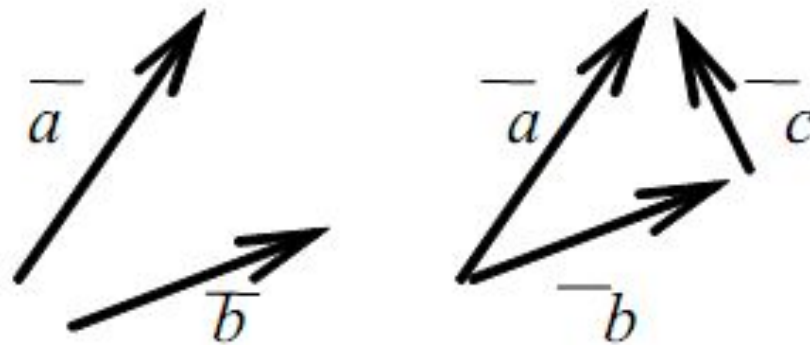


Рис. 2.7

# Свойства линейных операций над векторами

---

1. Переместительный закон (коммутативности):

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}.$$

2. Сочетательный закон (ассоциативности):

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).$$

3. Нулевой вектор играет роль нуля на множестве векторов:

$$\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}.$$

4. Сумма противоположных векторов равна нуль-вектору:

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}.$$

---



- 
3. Если каждый из векторов умножить на число  $\alpha$ , то и сумма этих векторов умножится на число  $\alpha$ :

$$\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}.$$

4. Модуль суммы векторов не больше суммы модулей этих векторов:

$$|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|.$$

5. Модуль суммы векторов не меньше разности модулей этих векторов:

$$|\bar{a} + \bar{b}| \geq |\bar{a}| - |\bar{b}|.$$

---

# Линейная зависимость векторов. Аффинный базис

---

*Определение 2.8.* Система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$  называется линейно зависимой, если существуют числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , не все равные нулю, для которых справедливо равенство

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k = 0. \quad (2.1)$$

При этом левая часть равенства (2.1) называется линейной комбинацией векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ .

Векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$  называются линейно независимыми, если равенство (2.1) выполняется только при  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ .

---

**Теорема 1.4.** *Если система векторов линейно зависима, то хотя бы один из векторов всегда можно представить в виде линейной комбинации остальных.*

Действительно, пусть в равенстве (2.1)  $\alpha_1 \neq 0$ . Тогда

$$\bar{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\bar{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\bar{a}_k$$

Справедливо и обратное утверждение: если один из векторов представлен в виде линейной комбинации остальных, то эта система векторов линейно зависима.

---



*Следствие.* Коллинеарные векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  линейно зависимы, поскольку

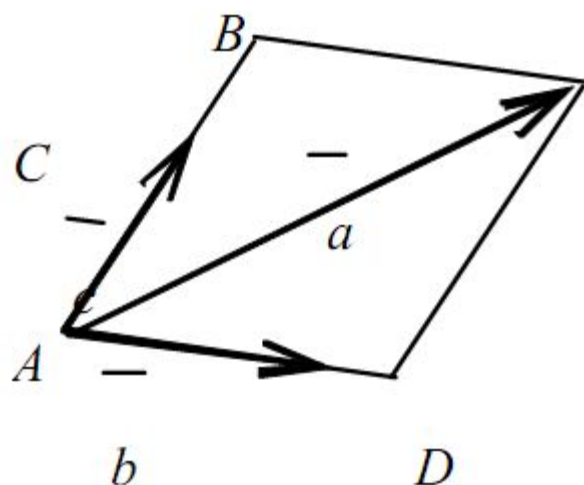
$$\bar{b} = \lambda \bar{a}. \quad (2.3)$$

Справедливо и обратное утверждение: два линейно зависимых вектора коллинеарны.

---

**Теорема 1.5.** *Всякие три вектора  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и  $\bar{c}$ , принадлежащие одной плоскости, линейно зависимы.*

---



**Следствие.** Для того чтобы три вектора в трёхмерном пространстве были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы. Если три вектора не компланарны, то они линейно независимы.

---

# Базис на плоскости

---

*Определение 2.9.* Базисом на плоскости (в двумерном пространстве, которое будем обозначать  $E_2$ ) называются любые два линейно независимых вектора.

Пусть  $\bar{a}$  – любой вектор на плоскости,  $\bar{b}$  и  $\bar{c}$  – базис. По теореме 5 следует:  $\bar{a} = \alpha_1 \bar{b} + \alpha_2 \bar{c}$ . Говорят, что вектор  $\bar{a}$  разложен по базису  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ ; числа  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  называются *аффинными координатами* вектора  $\bar{a}$  на плоскости (или в пространстве  $E_2$ ):  $\bar{a} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ .

---

# Базис в трехмерном пространстве

---

*Определение 2.10.* В трёхмерном пространстве (будем обозначать  $E^3$ ) базисом называются любые три линейно независимых вектора, т. е. всякие три некопланарных вектора.

Пусть  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  – базис. Тогда любой четвёртый вектор можно представить в виде их линейной комбинации (см. формулу 2.2)

$$\bar{d} = \alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b} + \alpha_3 \bar{c}, \quad \text{или} \quad \bar{d} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – координаты вектора  $\bar{d}$  в базисе  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ .

Если векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$  имеют общее начало в точке  $O$  и точка  $M$  является концом вектора  $\bar{d}$ , то вектор

$$\bar{d} = \overline{OM} = \alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b} + \alpha_3 \bar{c}$$

называется *радиус-вектором точки  $M$  в базисе  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$* , при этом числа  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  называются *аффинными координатами точки  $M$* .



# Проекция вектора на ось

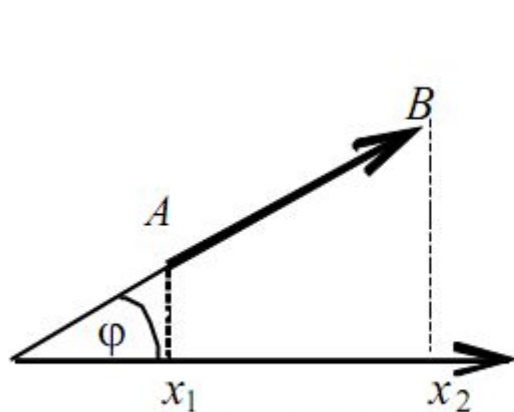


Рис. 2.11

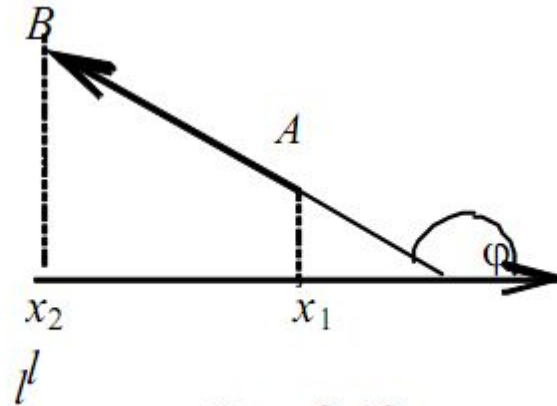


Рис. 2.12

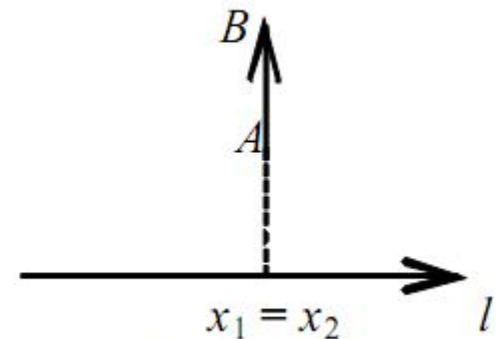


Рис. 2.13

**Определение 2.11.** Разность  $x_2 - x_1$  называется проекцией вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$ .

При этом:

если угол  $\varphi$  между осью и вектором – острый, то  $x_1 < x_2$  и проекция положительна (рис. 2.11);

если угол  $\varphi$  между осью и вектором – тупой, то  $x_1 > x_2$  и проекция отрицательна (рис. 2.12);

если угол  $\varphi = 90^\circ$ , то  $x_1 = x_2$  и проекция равна нулю (рис. 2.13).

# Теоремы о проекциях

---

Проекция вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$  обозначается символом  $\text{пр}_l \overline{AB}$ .

*Теорема 2.1.* Проекция вектора  $\overline{a}$  на ось  $l$  равна произведению модуля вектора  $\overline{a}$  на косинус угла  $\varphi$  между вектором и осью:

$$\text{пр}_l \overline{a} = |\overline{a}| \cos \varphi = |a| \cos(\overline{a}, \hat{l}).$$

*Теорема 2.2.* Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось:

$$\text{пр}_l(\overline{a} + \overline{b}) = \text{пр}_l \overline{a} + \text{пр}_l \overline{b}.$$

**Следствие.**  $\text{пр}_l(\overline{a} - \overline{b}) = \text{пр}_l \overline{a} - \text{пр}_l \overline{b}$ .

*Теорема 2.3.* Если вектор  $\overline{a}$  умножить на число  $\lambda > 0$ , то его проекция на ось  $l$  увеличится в  $\lambda$  раз:

$$\text{пр}_l(\lambda \overline{a}) = \lambda \text{пр}_l \overline{a}.$$

# Прямоугольный декартов базис

Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве  $E_3$ , образованную тремя взаимно перпендикулярными осями с общим началом в точке  $O$  (рис. 2.14). Одну из осей называют *осью абсцисс* и обозначают  $Ox$ , вторую – *осью ординат* и обозначают  $Oy$ , третью – *осью аппликат* и обозначают  $Oz$ . На каждой из осей выберем единичный вектор, направление которого совпадает с положительным направлением оси:

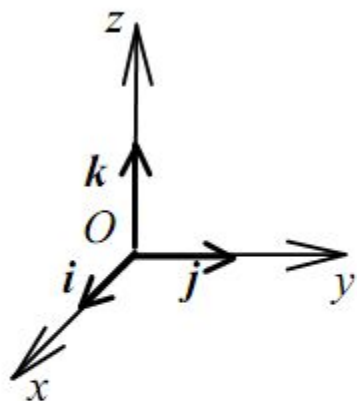


Рис. 2.14

$$\bar{i} \in Ox, \bar{j} \in Oy, \bar{k} \in Oz; |\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1.$$

Эти векторы называются *ортами*. Так как орты некопланарны, то они образуют базис, который называется *декартовым ортогональным базисом*. Орты можно записывать  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ , ввиду их единственности, без черты.



Рассмотрим вектор  $\bar{a}$  в пространстве  $E_3$ . Перенесём его параллельно самому себе в точку  $O$  (см. рис. 2.15).

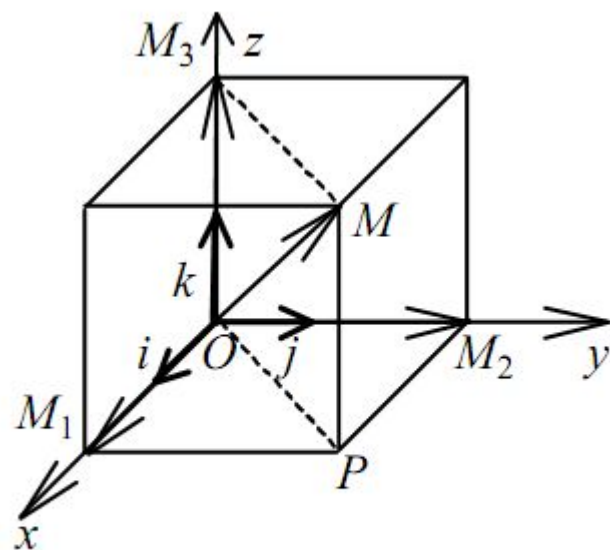


Рис. 2.15

$\bar{a} = \overline{OM}$  – радиус-вектор точки  $M$ .

$$\bar{a} = a_x i + a_y j + a_z k$$

$$\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

числа  $a_x, a_y, a_z$  – проекции вектора  $\bar{a}$  на координатные оси

$a_x i, a_y j, a_z k$  – составляющие вектора  $\bar{a}$



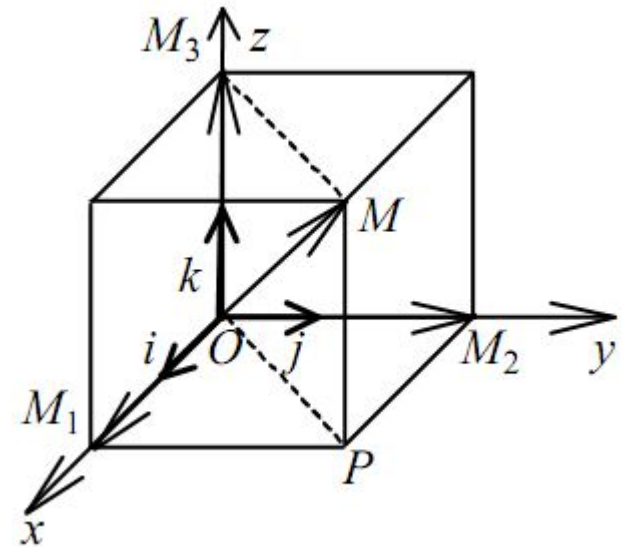
# Длина вектора

---

$$|\vec{a}|^2 = OM^2 = OM_1^2 + OM_2^2 + OM_3^2,$$

$$OM_1 = a_x, \quad OM_2 = a_y, \quad OM_3 = a_z,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$



Длина вектора, заданного концами – расстояние между точками

---

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} .$$

---

# Направляющие косинусы вектора

---

Направление вектора в пространстве определяется углами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  между вектором и положительным направлением соответствующих осей координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ;  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  и  $\cos \gamma$  называются направляющими косинусами вектора.

$$\left. \begin{array}{l} a_x = |\vec{a}| \cos \alpha \\ a_y = |\vec{a}| \cos \beta \\ a_z = |\vec{a}| \cos \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

---

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Введём единичный вектор  $\bar{a}_0$  по направлению  $\bar{a}$

$$\bar{a} = |\bar{a}| \bar{a}_0,$$

$$\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{a_x}{|\bar{a}|} i + \frac{a_y}{|\bar{a}|} j + \frac{a_z}{|\bar{a}|} k,$$

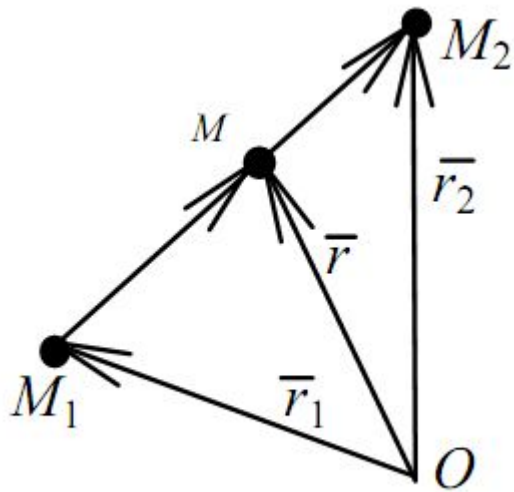
$$\bar{a}_0 = i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma,$$

---

# Деление отрезка в данном отношении

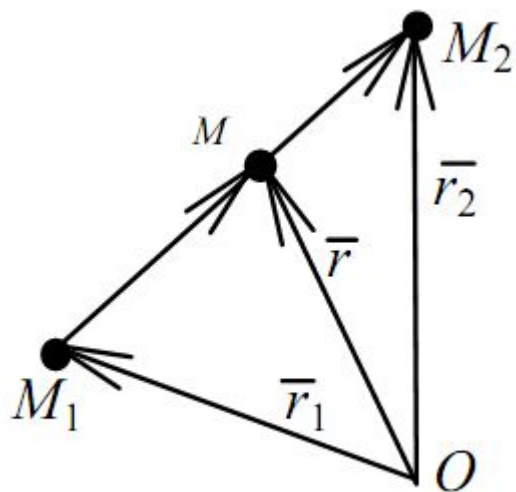
Разделить отрезок  $M_1M_2$  в данном отношении  $\lambda > 0$  – значит найти такую точку  $M$ , что

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda, \text{ или } M_1M = \lambda MM_2. \quad (2.12)$$



$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}), \text{ или } \vec{r}(1 + \lambda) = \lambda\vec{r}_2 + \vec{r}_1$$

---



---

$$\bar{r} - \bar{r}_1 = \lambda(\bar{r}_2 - \bar{r}), \text{ или } \bar{r}(1 + \lambda) = \lambda\bar{r}_2 + \bar{r}_1$$

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_1 + \lambda\bar{r}_2}{1 + \lambda} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \\ z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}, \end{cases}$$

---

# Скалярное произведение

---

*Определение 2.12.* Скалярным произведением двух векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  называется скаляр – число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение обозначается

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \left( \overset{\wedge}{\bar{a}, \bar{b}} \right), \quad (2.17)$$

или  $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между векторами

---

# Свойства скалярного произведения

---

1. Коммутативность:  $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$ .

2. Скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения:

$$(\lambda \cdot \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \lambda \bar{b}) = \lambda (\bar{a}, \bar{b}).$$

3. Скалярное произведение подчиняется сочетательному закону:

$$(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}.$$

---



4. Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то либо один из векторов равен нулю, либо равен нулю косинус угла между ними, т. е. векторы перпендикулярны. Обратно: если  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то  $\cos \varphi = 0$  и  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ .

5. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2}$$

---

# Вычисление проекции вектора на вектор

---

$$(a, b) = |b| \cdot \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = |a| \cdot \text{пр}_{\bar{a}} \bar{b},$$

$$\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{b}|}, \quad \text{или} \quad \text{пр}_{\bar{a}} \bar{b} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}|}.$$

---

# Скалярное произведение в декартовой системе координат

---

$$\bar{a} \{a_x, a_y, a_z\} \text{ и } \bar{b} \{b_x, b_y, b_z\}$$

скалярные произведения единичных векторов:

$$i \cdot i = |i|^2 \cos 0 = 1, \quad j \cdot j = 1, \quad k \cdot k = 1,$$

$$i \cdot j = |i| \cdot |j| \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad i \cdot k = 0, \quad j \cdot k = 0.$$

---

# Скалярное произведение орт

---

	$i$	$j$	$k$
$i$	1	0	0
$j$	0	1	0
$k$	0	0	1

---

Теперь вычислим скалярное произведение, воспользовавшись его свойствами:

$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot \bar{b} &= (a_x i + a_y j + a_z k) \cdot (b_x i + b_y j + b_z k) = \\ &\quad \underline{a_x b_x i \cdot i} + a_x b_y i \cdot j + a_x b_z i \cdot k + \\ &\quad + a_y b_x j \cdot i + \underline{a_y b_y j \cdot j} + a_y b_z j \cdot k + a_z b_x k \cdot i + a_z b_y k \cdot j + \underline{a_z b_z k \cdot k}.\end{aligned}$$

Все слагаемые, кроме подчёркнутых, обращаются в ноль, окончательно получаем

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (2.18)$$

**Скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных проекций**

---

# Итоговые формулы

---

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi, \text{ где } \varphi = \left( \hat{\bar{a}, \bar{b}} \right),$$

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

$$\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

---

# Векторное произведение

---

*Определение 2.13.* Векторным произведением вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , который подчиняется следующим условиям:

- вектор  $\vec{c}$  перпендикулярен плоскости перемножаемых векторов (рис. 2.24), т. е.  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{c} \perp \vec{b}$ ;

- вектор  $\vec{c}$  направлен так, что если смотреть с его конца вдоль вектора, то поворот от  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$  совершается против часовой стрелки (т. е. ориентирован так же, как вектор  $\vec{k}$  относительно векторов  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$ );

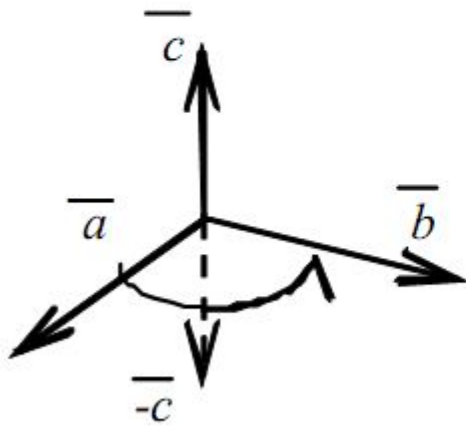


Рис. 2.24



# Модуль векторного произведения

---

• модуль вектора  $\bar{c}$  численно равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  как на его сторонах:

$$S_{\text{параллелогр.}} = |\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin \left( \overset{\wedge}{\bar{a}, \bar{b}} \right). \quad (2.21)$$

Обозначается векторное произведение символами

$$\bar{a} \times \bar{b} \text{ или } [\bar{a}, \bar{b}].$$

---



# Основные свойства векторного произведения

---

1. При перемене мест сомножителей векторное произведение меняет знак на противоположный:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}].$$

2. Константу можно выносить за знак векторного произведения, т. е. векторное произведение подчиняется сочетательному закону относительно числового множителя:

$$\lambda[\bar{a}, \bar{b}] = [\lambda\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \lambda\bar{b}].$$

---

3. Векторное произведение подчиняется распределительному закону:

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}.$$

4. Если векторное произведение двух векторов равно нулю, то либо один из векторов равен  $\bar{0}$ , либо  $\sin \varphi = 0$ , т. е. векторы коллинеарны. В частности,

$$|\bar{a} \times \bar{a}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \sin 0 = 0.$$

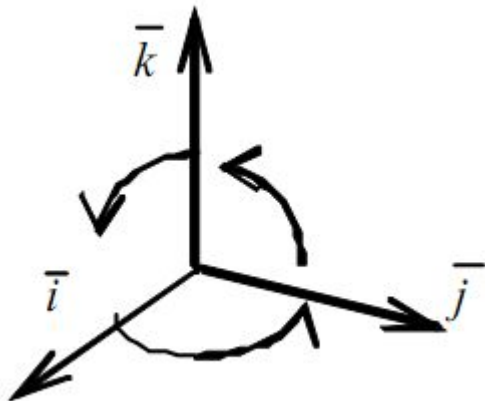
Таким образом, для того чтобы два ненулевых вектора  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось нуль-вектору  $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}$ .

---

# Векторное произведение в декартовой системе координат

---

$$\bar{a} = a_x i + a_y j + a_z k, \quad \bar{b} = b_x i + b_y j + b_z k$$



$$[i, i] = [j, j] = [k, k] = 0$$

$$[i, j] = k$$

$$[j, k] = i, [k, j] = -i, [k, i] = j, [i, k] = -j, [j, i] = -k$$

---

# Векторное произведение орт

---

	$i$	$j$	$k$
$i$	0	$k$	$-j$
$j$	$-k$	0	$i$
$k$	$j$	$-i$	0

---

---

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

---

---

С помощью определения векторного произведения можно решать задачу о вычислении площади треугольника, построенного на векторах как на сторонах (рис 2.26).

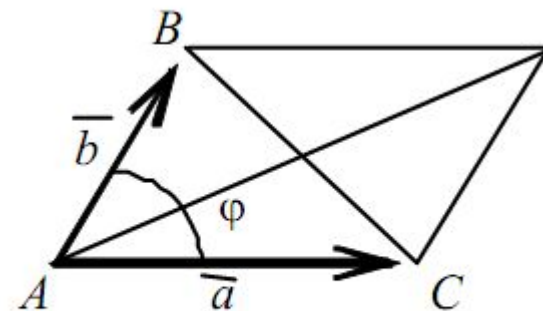


Рис. 2.26

---



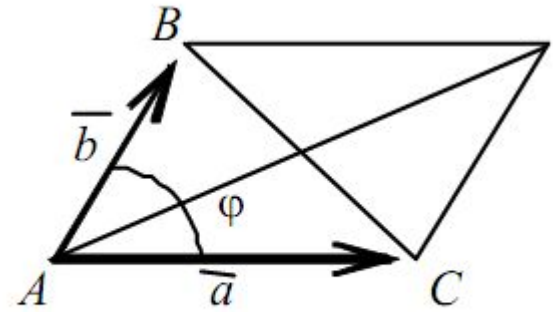


Рис. 2.26

По определению модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах:

$$S_{\text{параллелограмм}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi,$$

$$\text{где } \varphi = \left( \hat{\vec{a}}, \vec{b} \right).$$

следовательно,

$$\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\Delta}.$$

# Смешанное произведение трёх векторов

---

*Определение 2.14.* Смешанным произведением трёх векторов  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  называется **число**, равное скалярному произведению вектора  $\bar{a}$  на векторное произведение векторов  $[\bar{b}, \bar{c}]$ .

Обозначается оно так:  $\bar{a} \cdot [\bar{b}, \bar{c}] = (\bar{a} \bar{b} \bar{c})$ .

---

# Смешанное произведение в декартовой системе координат

---

Пусть даны векторы

$$\bar{a} = a_x i + a_y j + a_z k, \quad \bar{b} = b_x i + b_y j + b_z k, \quad \bar{c} = c_x i + c_y j + c_z k.$$

Найдём  $[\bar{a}, \bar{b}] \cdot \bar{c}$ .

Вычислим предварительно векторное произведение

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} k = d_x i + d_y j + d_z k,$$

где  $\bar{d} = [\bar{a}, \bar{b}]$ .

---

скалярное произведение

$$(\bar{d}, \bar{c}) = d_x c_x + d_y c_y + d_z c_z.$$

Окончательно смешанное произведение равно

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z.$$

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

# Геометрический смысл смешанного произведения

---

Построим на векторах как на рёбрах параллелепипед

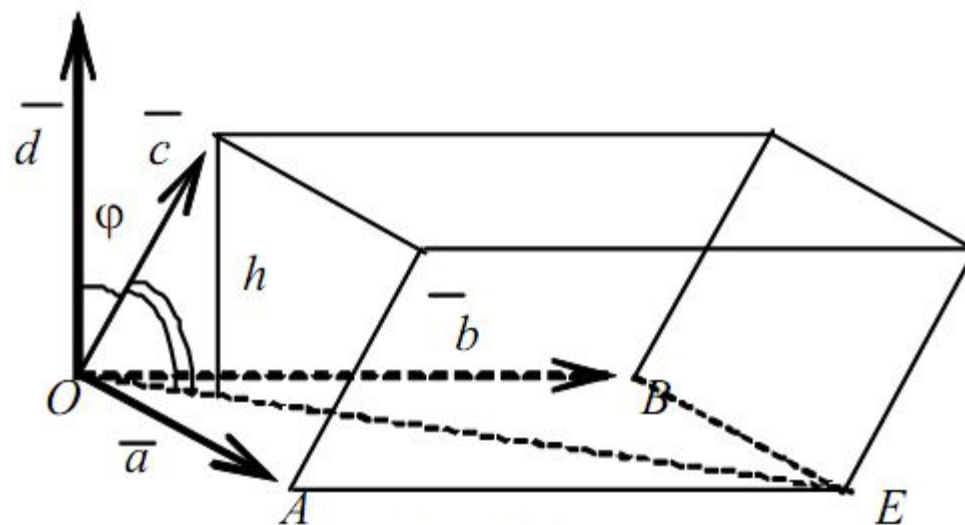
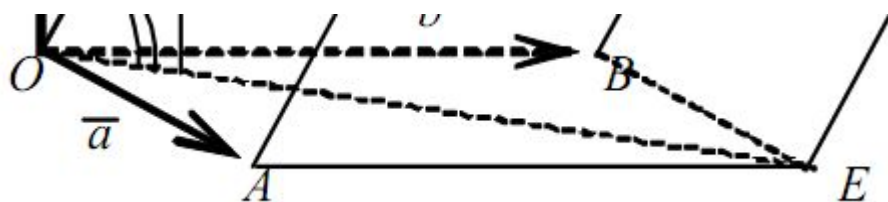


Рис 2.28

---

Найдём вектор  $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ , модуль которого равен площади параллелограмма  $OBEA$ :

$$|\vec{d}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = S.$$



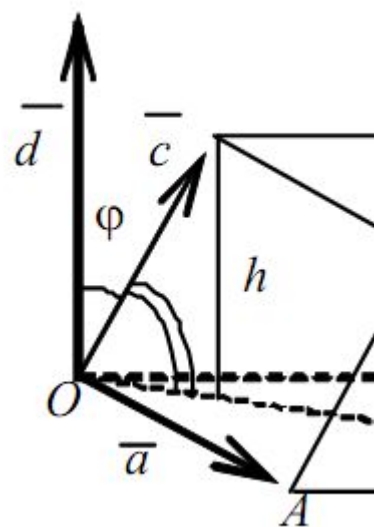
Далее, умножив скалярно  $\vec{d} \cdot \vec{c}$ , вычислим смешанное произведение векторов

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \varphi = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  – угол между векторами  $\vec{d}$  и  $\vec{c}$ ,

$$|\vec{c}| \cdot \cos \varphi = |\vec{c}| \cdot \sin(90 - \varphi) = h,$$

где  $h$  – высота параллелепипеда.





$$V_{\text{пар}} = S_{\text{осн}} \cdot h = \pm \bar{a} \bar{b} \bar{c}.$$

- Если угол  $\varphi < \frac{\pi}{2}$ , то  $|\bar{c}| \cdot \cos \varphi > 0$ ,  $\bar{a} \bar{b} \bar{c} = V$ .
  - Если угол  $\varphi > \frac{\pi}{2}$ , то  $|\bar{c}| \cdot \cos \varphi < 0$ ,  $\bar{a} \bar{b} \bar{c} = -V$ .
- 

*Вывод: модуль смешанного произведения трёх векторов равен объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах как на рёбрах.*

---

# Свойства смешанного произведения

---

1. • При перемене мест двух сомножителей смешанное произведение меняет знак на противоположный:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}.$$

5. • Циклическая перестановка векторов не меняет знака смешанного произведения:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b}.$$

6. • Операции векторного умножения и скалярного переставимы:

$$\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c}.$$

**Все свойства смешанного произведения  
доказываются с помощью свойств  
определителя!**

---

# Условие компланарности трех векторов

---

*Теорема 2.6.* Чтобы векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю.

---