

Теория вероятностей и статистика 9 класс

Глава 12. Числовые характеристики
случайных величин

Результаты обучения. В результате изучения материала главы 12 учащийся должен:

- знать определение математического ожидания конечной случайной величины, понимать, что математическое ожидание является обобщением среднего арифметического значений величины;
- знать свойства математического ожидания и уметь использовать их при решении простых задач;
- знать, что важным свойством распределения случайной величины является рассеивание величины, уметь вычислять дисперсию и стандартное отклонение;
- знать формулы математического ожидания и дисперсии числа успехов в серии испытаний Бернулли.

11.53. Математическое ожидание случайной величины.

Для введения понятия «математическое ожидание случайной величины» необходимо разобрать задачу п.53.

Для проведения лотереи изготовили 100 билетов. Из них 1 билет с выигрышем в 500 р., 10 билетов с выигрышем по 100 р. и остальные 89 билетов без выигрыша. Какой средний выигрыш соответствует 1 билету?

Выигрыш является случайной величиной X , которая может принимать значение 0; 100; 500, с вероятностью 0,89; 0,1 и 0,01.

Если покупатель приобретает все 100 билетов, то выигрыш составит 1500 руб, следовательно выигрыш, соответствующий одному билету в 100 раз меньше. 15 руб. $(0 \cdot 89 + 10 \cdot 100 + 1 \cdot 500) : 100 = 0 \cdot 0,89 + 100 \cdot 0,1 + 500 \cdot 0,01 = 15$.

15 руб – это среднее значение случайной величины. Оно называется математическим ожиданием случайной величины.

| | | | | |
|-------------|------|-----|------|--|
| Значения | 0 | 100 | 500 | |
| Вероятность | 0,89 | 0,1 | 0,01 | |

- Рассмотрим случайную величину X . Пусть распределение случайной величины X задано таблицей.
-

| | | | | | |
|--------------------------|-------|-------|-------|-----|-------|
| Значение величины X | x_1 | x_2 | x_3 | ... | x_n |
| Вероятность | p_1 | p_2 | p_3 | ... | p_n |

Обозначим математическое ожидание $E(X)$.

Определение. Математическим ожиданием случайной величины X называют число

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n$$

$E(a) = a \cdot 1$. Математическое ожидание постоянной величины равняется этой величине.

Задачи № 1. а), б), в). №2 решаются по формуле.

№3.

| | | | | | | | | |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Значение Z | -8 | -6 | -4 | -2 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| Вероятность | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 |

$$E(Z) = (-8-6-4-2+2+4+6+8) \cdot 1/8 = 0.$$

№4. X- «число выпавших орлов»

| | | |
|-------------|-----|-----|
| Значение X | 0 | 1 |
| Вероятность | 0,5 | 0,5 |

$$E(X) = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 = 0,5$$

- №5. Y – «сумма очков, выпавших при двух бросаниях игральной кости»
-

| | | | | | | | | | | | |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Значение Y | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Вероятность | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

$$E(Y) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7.$$

Вернуться к этой задаче в п.54, при использовании свойств.

□ Задача № 9.

X – «число клеток в подбитом корабле»

| | | | | | |
|--------------|-----|------|------|------|------|
| Значение X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Вероятность | 0,8 | 0,04 | 0,06 | 0,06 | 0,04 |

$$E(X) = 0 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,04 + 2 \cdot 0,06 + 3 \cdot 0,06 + 4 \cdot 0,04 = 0,5.$$

$$E(X) = 0,5.$$

Задача № 10.

а). X – «наибольшее из двух выпавших очков»

| | | | | | | |
|--------------|------|------|------|------|------|-------|
| Значение X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Количество | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
| Вероятность | 1/36 | 3/36 | 5/36 | 7/36 | 9/36 | 11/36 |

$$A(\tilde{O}) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = 4 \frac{17}{36}$$

№10 (б). X – «наименьшее из двух выпавших очков»

| | | | | | | |
|-------------|-------|------|------|------|------|------|
| Значение | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Количество | 11 | 9 | 7 | 5 | 3 | 1 |
| Вероятность | 11/36 | 9/36 | 7/36 | 5/36 | 3/36 | 1/36 |

$$A(\tilde{O}) = 1 \cdot \frac{11}{36} + 2 \cdot \frac{9}{36} + 3 \cdot \frac{7}{36} + 4 \cdot \frac{5}{36} + 5 \cdot \frac{3}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} = 2 \frac{19}{36}$$

П. 54. Свойства математического ожидания

Свойство 1. Пусть X – случайная величина, a – некоторое число. Рассмотрим случайную величину $Y = aX$. Тогда $E(Y) = aE(X)$.

Свойство 2. Пусть U и V – две случайные величины. Тогда $U + V$ – также случайная величина, и при этом $E(U + V) = E(U) + E(V)$.

Это значит, что математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

Задача № 1.

X – «число очков, выпавших на одной
игральной кости»

$$E(X) = 3,5$$

Тогда при пяти бросаниях математическое
ожидание равно а). $3,5 \cdot 5 = 17,5$

$$\text{б). } 3,5 \cdot 7 = 24,5$$

$$\text{в). } 3,5 \cdot 100 = 350$$

$$\text{г). } 3,5 \cdot k = 3,5k$$

Задача № 2. Применение свойств.

Задача № 3.

| | | | | | | | | | | | |
|-------------|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Значение X | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Вероятность | p | p | p | p | p | p | p | p | p | p | p |

$$p=1/11. \quad E(X) = 1/11 \cdot (-3-2-1+0+1+2+3+4+5+6+7)=2$$

| | | | | | | | | | |
|-------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Значение Y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Вероятность | p | p | p | p | p | p | p | p | p |

$$p = 1/9. \quad E(Y) = 1/9 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 5$$

а). $Z=X+Y, \quad E(Z) = E(X)+E(Y) \quad E(Z) = 2+5 = 7$

б). $Z=X-Y \quad E(Z) = 2-5 = -3.$

Задача № 5.

Т.к. бросаний 5, то всего событий 32.

X – «выпадение орлов»

| | | | | | | |
|--------------|------|------|-------|-------|------|------|
| Значение X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Вероятность | 1/32 | 5/32 | 10/32 | 10/32 | 5/32 | 1/32 |

$$E(X) = 1/32 \cdot (0 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 1) = 80 \cdot 1/32 = 2,5$$

$$E(X) = 2,5$$

Задача № 6 разбирается подробно в п.58.

П.56- 57. Дисперсия и стандартное отклонение. Свойства дисперсии.

- Дисперсия - мера рассеивания.(п.55)

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины $(X - E(X))^2$.

$$D(X) = E((X - E(X))^2)$$

- Стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{D(X)}$
- Свойства дисперсии. 1. Пусть X – случайная величина. Рассмотрим случайную величину

$Y = aX$, где a - некоторое число. Тогда $D(Y) = a^2D(X)$

2. Пусть X – случайная величина .

Рассмотрим случайную величину $Y = X + a$. Тогда

$$D(Y) = D(X)$$

□ Задача № 2.

Проводится одно испытание Бернулли, с вероятностью успеха p . Случайная величина S – «число успехов». Найти $D(S)$.

| | | |
|--------------|------------|-----|
| | $E(S) = p$ | |
| Значение S | 0 | 1 |
| Вероятность | $1-p$ | p |

$D(X) = E((X - E(X))^2)$

| | | |
|---------------------|-------|-------|
| Значение $S - E(S)$ | $-p$ | $1-p$ |
| Вероятность | $1-p$ | p |

$$D(S) = p^2(1-p) + (1-p)^2p = p(1-p)(p + 1-p) = p(1-p) = p - p^2$$

Задача № 3.

$$D(X) = E((X - E(X))^2)$$

$$а). E(X) = -2 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,2 = 0$$

| | | | |
|----------------|-----|-----|-----|
| $(X - E(X))^2$ | 4 | 0 | 9 |
| Вероятность | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

$$D(X) = 4 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,5 + 9 \cdot 0,2 = 1,2 + 1,8 = 3$$

б). Аналогично.

Задача №4.б). Вычислить дисперсию случайной величины X . $D(X) = E((X - E(X))^2)$

$E(X)$

$= 3$

| | | | | |
|--------------|-----|-----|-----|-----|
| Значения X | -2 | 0 | 1 | 5 |
| Вероятность | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,6 |

| | | | | |
|---------------------|-----|-----|-----|-----|
| Значения $X - E(X)$ | -5 | -3 | -2 | 2 |
| Вероятность | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,6 |

$E((X - E(X))^2) = 25 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,6 = 6,6$

$$D(X) = 6,6$$

Задачи № 5,6 решаются аналогично.

□ Задача № 7.

а). Случайная величина X принимает значения от 0 до 6 с равными вероятностями, т.е. $p = 1/7$.

Найти $D(X)$.

$$D(X) = E((X - E(X))^2)$$

$$E(X) = 21 \cdot 1/7 = 3$$

Значения $X - E(X)$ от -3 до 3. Тогда $D(X) = 4$.

б). Случайная величина Y принимает значения от 1 до 7, т.е. $Y = X + 1$. Следовательно, по свойству дисперсии $D(Y) = D(X)$. Т.е. $D(Y) = 4$.

- Задача № 8. При решении используются свойства дисперсии.

a). $D(X) = 3, \quad Y=3X, \quad D(Y)= 9D(X), \quad D(Y)=27$

б). $Y=X+5. \quad D(Y)=D(X) \quad D(Y)=3.$

e). $Y=-5X-7. \quad D(Y)= 25D(X)=75.$

Остальные решаются аналогично.

П. 58. Математическое ожидание числа успехов в серии испытаний Бернулли

Если S – число успехов в серии n независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p , то $E(S) = np$.

Задача № 1.

2000 – окуней и 1000 – карасей. Всего 3000 рыб.

Найти ожидаемое число карасей.

$$E(S) = np$$

$$S = \{0; 1; 2; 4; \dots; 30\} \quad E(S) = 30p$$

$$p = \frac{1000}{3000} = \frac{1}{3}$$

$$E(S) = 10$$

Задача № 3.

$n=120$

а). S – «число очков кратно 3»

При бросании игральной кости с равной вероятностью $1/6$ выпадают 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Успехов 2 (значения 3 и 6). Следовательно вероятность события X при однократном бросании равна $1/3$.

Т.е. $E(S) = 120 \cdot 1/3 = 40$.

б). Аналогично.

Задача № 4.

Вероятность успеха 0,25. Следовательно E

$(S)=16 \cdot 0.25=4$. Т.е. ожидаемое число правильных ответов 4.

Задача №5.

Математическое ожидание случайной величины

«число выпадений острием вверх» равно 135.

$n=300$. Найти p .

$$E(S) = np. \quad p \cdot 300 = 135,$$

$$p = 0,45$$

П. 59. Дисперсия числа успехов.

Дисперсия числа успехов S в серии испытаний Бернулли вычисляется по формуле $D(S) = npq$.

n – число испытаний Бернулли

p – вероятность успеха

q – вероятность неудачи

Задача № 1.

$n = 100$ $p = 0,36$, следовательно $q = 0,64$.

$$D(S) = 0,36 \cdot 0,64 \cdot 100 = 23,04$$

$$\sigma = \sqrt{D(S)} \quad \sigma = \sqrt{23,04} = 4,8$$

Задача № 2. а). X – «выпавшее число очков кратно 3»

$$p = \frac{1}{3} \quad q = \frac{2}{3} \quad D(X) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 13500 = 3000$$

$$D(X) = 3000$$

Задача № 3.

S – число попаданий серии выстрелов по мишени.

p – вероятность попадания (вероятность успеха)

Найти дисперсию величины S .

- а). $D(X) = npq$. $p=0,3$, тогда вероятность неудачи равна $0,7$. число выстрелов равно 100 . Тогда дисперсия равна 21 .
- в). При 2500 выстрелах дисперсия равна 525 .



К задаче № 4 даны рекомендации в ответе.
