11 класс

Виды показательных уравнений

Шарабарина Галина Гавриловна, учитель математики
МБОУ « Солоновская средняя общеобразовательная школа имени Матренина А.П.»Алтайский край , Смоленский район

Показательным уравнением называется уравнение, в котором неизвестное (x) входит только в показатели степени при некоторых постоянных основаниях.

Для показательных уравнений выполнено следующее утверждение:

Уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (a>0, a) и f(x) = g(x) эквивалентны.

Это утверждение используется при решении простейших уравнений.

I. Простейшие уравнения

Пример 1

$5^{x-2} = 3$

$$5^{x-2} = 5^{\log_5 3}$$

$x-2 = \log_3 5$

$x = 2 + \log_3 5$

Пример 2

$3^{x+2} = 3$

$x+2=1$

$x = -1$

Ответ $x = -1$

Прийти к простейшим уравнениям можно путем тождественным преобразованиям.

Пример 3

$0{,}5^{3x-1} = 16^{-2}$

$(1/2)^{3x-1} = (2^4)^{-2}$

$(2^{-1})^{3x-1} = 2^{-8}$

$2^{-3x+1} = 2^{-8}$

$-3x+1 = -8$

$-3x = -9$

$x = 3$

Ответ: $x = 3$

Пример 4

$$\sqrt{3^{x^2-5}} * 5^{\frac{x^2-5}{2}} = 225$$

$$3^{\frac{x^2-5}{2}} 5^{\frac{x^2-5}{2}} = 25 * 9$$

$$3^{\frac{x^2-5}{2}} 5^{\frac{x^2-5}{2}} = 5^2 * 3^2$$

$$(5 * 3)^{\frac{x^2-5}{2}} = (5 * 3)^2$$

$$15^{\frac{x^2-5}{2}} = 15^2$$

$$\frac{x^2-5}{2} = 2$$

$$x^2 - 5 = 4$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Ответ: $x = \pm 3$

II. Уравнения, решаемые способом замены переменных

Пример 5

$$9^{x^2} - 4*3^{x^2} + 3 = 0$$

$$3^{2x^2} - 4*3^{x^2} + 3 = 0$$

Пусть $3^{x^2} = t, t > 0$ тогда $t^2 - 4t + 3 = 0$ $t_1 = 1$, $t_2 = 3$

$$3^{x^2} = 1 \qquad 3^{x^2} = 3$$

$$3^{x^2} = 3^0$$

$x^2 = 1$

$x^2 = 0$

$$x = \pm 1$$

$x = 0$

Ответ $x = 0$, $x = \pm 1$

Пример 6

1 способ

$$7^{x+2} - \frac{1}{7}7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^{x} = 48$$

$$7^{x}7^{2} - \frac{1}{7}7^{x}7 - \frac{14 * 7^{x}}{7} + 2 \cdot 7^{x} = 48$$

Пусть $7^x = t$, $t>0$, тогда

$49t - t - 2t + 2t = 48$

$48t = 48$

$t = 1$,

$7^x = 1$

$7^x = 7^0$

$x = 0$

Ответ: $x = 0$

2 способ (более рациональный, вынесением общего множителя)

$$7^{x}(7^{2}-\frac{1}{7}7^{1}-14\cdot 7^{-1}+2)=48$$

$7^x *48 = 48$

$7^x = 1$

$7^x = 7^0$

$x = 0$

Пример 7

$$2^{\sin^2 x} + 5 * 2^{\cos^2 x} = 7 \qquad 2^{1-\cos^2 x} + 5 * 2^{\cos^2 x} = 7$$

$$\frac{2}{2^{\cos^2 x}} + 5 * 2^{\cos^2 x} - 7 = 0$$

Пусть $2^{\cos^2 x} = a$ $\quad 0 \le \cos^2 x \le 1 \quad 1 \le a \le 2$

$$\frac{2}{a} + 5a - 7 = 0 \qquad \frac{2 + 5a^2 - 7a}{a} = 0, a \ne 0$$

$5a^2 - 7a + 2 = 0$

a = 1, a = 2/5 – не удовлетворяет условию $1 \le a \le 2$

$$2^{\cos^2 x} = 1$$

$2^{\cos^2 x} = 2^0$ $\cos^2 x = 0$ $\cos x = 0$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

Пример 8

$(5+2\sqrt{6})^x + (5-2\sqrt{6})^x = 10$

Заметим $(5+2\sqrt{6})^x (5-2\sqrt{6})^x = 25 - 24 = 1$, следовательно

$(5-2\sqrt{6})^x = (5+2\sqrt{6})^{-1}$ (взаимно обратные числа)

$(5+2\sqrt{6})^x + (5+2\sqrt{6})^{-x} = 10$

Пусть $(5+2\sqrt{6})^x = t$, $t>0$

$t+1/t=10$ $t^2-10t + 1 = 0$

$t_1 = 5+2\sqrt{6}$ $t_2 = 5-2\sqrt{6}$

$(5+2\sqrt{6})^x = 5+2\sqrt{6}$ $(5+2\sqrt{6})^x = 5-2\sqrt{6}$

$x = 1$ $x = -1$

Ответ: $x = \pm 1$

III. Однородные уравнения

Пример 9

$2^{2x+2} – 6^x – 2*3^{2x+2} = 0$

$2^{2x} * 4 – 2^x * 3^x – 2*9*3^{2x} = 0$

$$\frac{2^{2x}*4}{2^{2x}}-\frac{2^x*3^x}{2^{2x}}-\frac{18*3^{2x}}{2^{2x}}=\frac{0}{2^{2x}}, т.к. 2^{2x}>0$$

$$4-(\frac{3}{2})^x-18*(\frac{3}{2})^{2x}=0$$

Пусть (3/2)x = t, t > 0

$4 - t - 18t^2 = 0$

$-8t^2 - t + 4 = 0$

$D = 289$

$t_1 = -1/2$, не удовлетворяет условию $t > 0$

$t_2 = 4/9$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$$

$x = -2$ Ответ: $x = -2$

Определи к какому виду относятся следующие показательные уравнения и реши их

1) $$6^{x-1} = \frac{1}{\sqrt[5]{6}}$$

2) $$7 * 5^{x} - 5^{x+1} = 2 * 5^{-3}$$

3) $$4^{x^2+2} - 9 * 2^{x^2+2} + 8 = 0$$

4) $8^x + 18^y = 2 * 27^y$

5) $3^{x-1} + 2 * 3^{-x-1} - 1 = 0$

6) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$

7) $\left(4+\sqrt{15}\right)^x + \left(4-\sqrt{15}\right)^x = 8$