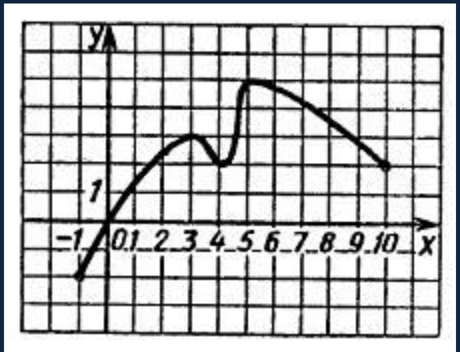
Возрастание и убывание функций

- Познакомимся на примере с возрастанием и убыванием функции. На рисунке ниже изображен график функции, определенной на отрезке [-1;10]. Эта функция возрастает на отрезках [-1;3] и [4;5], и убывает на отрезках [3;4] и [5,10].



- Рассмотрим еще один пример. Очевидно, что функция $y=x^2$ убывает на промежутке (-∞; 0] и возрастает на промежутке [0;∞). Видно, что график этой функции при изменении x от -∞ до 0 сначала опускается до нуля, а затем поднимается до бесконечности.

  Определение. **Функция f возрастает на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2>x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.**

  Определение. **Функция f убывает на множестве P, если для любых x_1 и x_2 из множества P, таких, что $x_2>x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.**

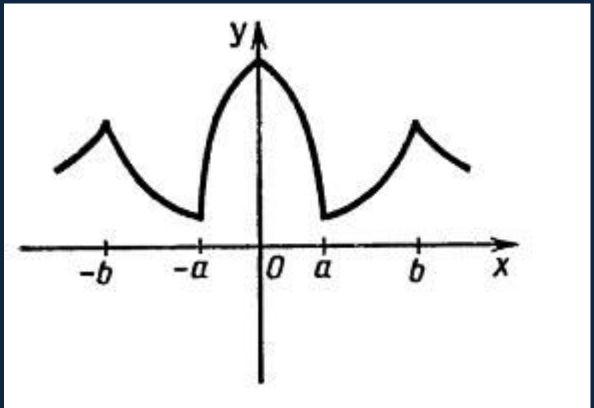
  Иначе говоря, функция f называется возрастающей на множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции. Функция f называется убывающей на множестве P, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Возрастание и убывание четных функций

- Для четных функций задача нахождения промежутков возрастания и убывания сильно упрощается. Достаточно всего лишь найти промежутки возрастания и убывания при $x \geq 0$ (см. рисунок внизу).

  Пусть, например, функция f четна и возрастает на промежутке [a;b], где $b>a\geq 0$. Докажем, что эта функция убывает на промежутке [-b; -a].

  Действительно, пусть $-a \geq x_2 > x_1 \geq -b$. Тогда $f(-x_2)=f(x_2)$, $f(-x_1)=f(x_1)$, причем $a \leq -x_2 < -x_1 \leq b$, и, поскольку f возрастает на [a;b], имеем $f(-x_1)>f(-x_2)$, то есть $f(x_1)>f(x_2)$.



Возрастание и убывание функции синус

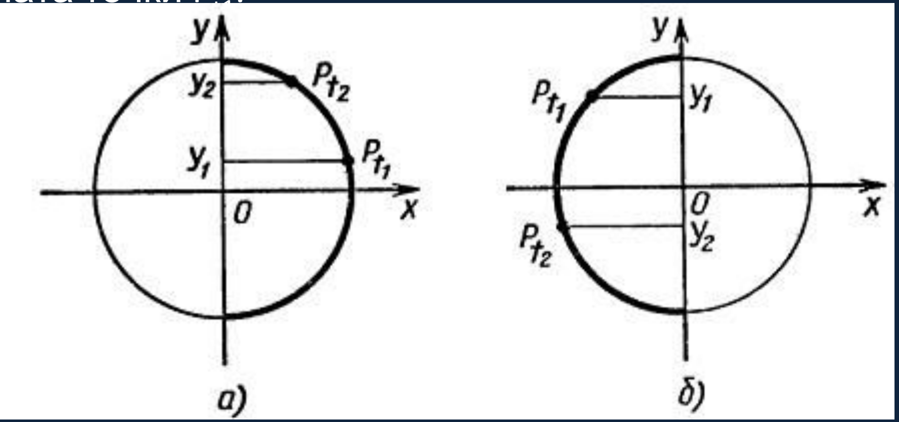
- Докажем, что синус возрастает на промеждутках [-π/2+2πn ; π/2+2πn], n - целое. В силу периодичности функции синуса доказательство достаточно провести для отрезка [-π/2 ; π/2]. Пусть $x_2 > x_1$. Применим формулу разности синусов и найдем:

  Из неравенства $-\pi/2 \le x_1 < x_2 \le \pi/2$ следует, что и , поэтому и , следовательно и .

  Это доказывает, что на указанных промежутках синус возрастает.

  Аналогичным образом легко доказать, что промежутки [π/2+2πn ; 3π/2+2πn], n - целое, являются промежутками убывания функции синуса.

  Полученный результат можно легко проиллюстрировать с помощью рисунка единичной окружности (см. рисунок ниже). Если $-\pi/2 \le t_1 < t_2 \le \pi/2$, то точка P_{t2} имеет ординату большую, чем точка P_{t1}. Если же $\pi/2 \le t_1 < t_2 \le 3\pi/2$, то ордината точки P_{t2} меньше, чем ордината точки P_{t1}.



Возрастание и убывание функции косинус

Промежутками возрастания косинуса являются отрезки $[-\pi+2\pi n ; 2\pi n]$, n - целое. Промежутками убывания косинуса являются отрезки $[2\pi n ; \pi + 2\pi n]$, n - целое. Доказательство этих утверждений можно провести аналогично доказательству для синуса.

Однако, проще воспользоваться формулой приведения $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$, из которой сразу следует, что промежутками возрастания косинуса являются промежутки возрастания синуса, сдвинутые на $\pi/2$ влево. Аналогичное утверждение можно сделать и для промежутков убывания.

Автор: Сабитова
Файруза Рифовна
учитель математики
1 квалификационной категории