Кафедра математики и моделирования

Преподаватель Никулина Л. С.

Высшая математика

Четвертый семестр.

Содержание

- Элементы линейной алгебры
- Задачи линейного программирования
- Графический метод решения ЗЛП
- Симплексный метод решения ЗЛП
- Двойственные задачи
- Транспортная задача
- Анализ временных рядов

Элементы линейной алгебры

Лекция 1

Определители

Определение. Определителем 2-го порядка называется выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} \grave{a}_1 & b_1 \\ \grave{a}_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \qquad (1)$$

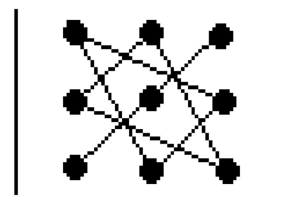
Числа a_1, a_2, b_1, b_2 называются элементами определителя. Они расположены в двух строках и двух столбцах. Определитель 2-го порядка равен разности произведений его элементов главной и побочной диагоналей.

Определителем 3-го порядка называется выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Правило треугольника

Способ вычисления определителей 3-го порядка

(+)  (-) 

называется правилом треугольника.
Элементы, входящие в определитель со знаком + и со знаком –, выбираются из определителя, как показано на рисунках.

Пример

Найдем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (1\cdot 4\cdot 0 + 0\cdot 2\cdot(-1) + 3\cdot 2\cdot(-3)) - (-1\cdot(-3)\cdot 4 + 1\cdot 2\cdot 2 + 0\cdot 3\cdot 0) =$$

$$= -18 - 12 - 4 = -34$$

Ранг матрицы.

Рассмотрим матрицу *A* размера $m \times n$.

Выберем в этой матрице произвольно *k* строк и *k* столбцов, где $k \le m$ и $k \le n$. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных *k* строк и *k* столбцов, составим определитель *k*-го порядка. Все такие определители называют минорами *k*-го порядка матрицы *A*.

Определение. Наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы называется ее рангом.

Для вычисления ранга матрицы ее сначала приводят к более простому виду с помощью так называемых элементарных преобразований, к которым относятся:

1) перестановка строк матрицы;
2) умножение какой-либо строки на одно и то же отличное от нуля число;
3) прибавление к элементам строки соответствующих элементов другой строки, предварительно умноженных на некоторое число.

Можно показать, что элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

Если с помощью элементарных преобразований получить нули ниже главной диагонали матрицы, то ранг исходной матрицы будет равен числу ненулевых строк преобразованной матрицы.

Пример

С помощью элементарных преобразований вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Система m линейных уравнений с n неизвестными

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Назовем матрицей системы матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных. Матрицу, полученную из *A* добавлением столбца свободных членов, называют расширенной матрицей:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Для того чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.

Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение, если же ранг меньше числа неизвестных, то система имеет множество решений.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Для того чтобы решить систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

выписывают расширенную матрицу этой системы

Назовем матрицей системы матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных. Матрицу, полученную из *A* добавлением столбца свободных членов, называют расширенной матрицей:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Элементарные преобразования

Для того чтобы решить систему уравнений выписывают расширенную матрицу этой системы и над строками этой матрицы производят элементарные преобразования, приводя ее к виду, когда ниже главной диагонали, содержащей элементы

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm},$$

будут располагаться нули.

Разрешается:

1) изменять порядок строк матрицы, что соответствует изменению порядка уравнений;

2) умножать строки на любые отличные от нуля числа, что соответствует умножению соответствующих уравнений на эти числа;

3) прибавлять к любой строке матрицы другую, умноженную на отличное от нуля число, что соответствует прибавлению к одному уравнению системы другого, умноженного на число.

Пример

Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

Общее решение системы линейных уравнений

Определение. Если ранг матрицы равен r, то любой отличный от нуля минор порядка этой матрицы называется <u>базисным.</u>

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Пример

Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 10, \\ x_2 + 2x_4 = 5, \\ x_3 - 4x_4 = 9. \end{cases}$$

Расширенная матрица этой системы имеет вид

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Минор 3-го порядка в левой части матрицы- базисный. Он равен единице.

Переменные x_1, x_2, x_3 -базисные, а остальные – свободные. Их находят, перенося свободные неизвестные в правые части уравнений.

Обозначим $x_4 = c.$ Тогда

$$x_1 = 10 - c,$$

$$x_2 = 5 - 2c,$$

$$x_3 = 9 + 3c.$$

Метод Жордана –Гаусса решения СЛАУ

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

В процессе решения могут встретиться следующие случаи :

1) в результате преобразования получилась матрица вида

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_2' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_r' \end{array}\right).$$

В этом случае система совместная, определенная и имеет единственное решение

$$x_1 = b_1', \quad x_2 = b_2', \quad \ldots., \quad x_n = b_r'.$$

2)на некотором этапе получилась матрица , содержащая r единичных столбцов. Например,

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \ldots & 0 & a'_{1r+1} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & a'_{2r+1} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 1 & a'_{rr+1} & \ldots & a'_{rn} & b'_r
\end{array}\right).$$

Тогда система совместна и имеет бесчисленное множество решений. Общее решение можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 = b_1' - a_{1r+1}' x_{r+1} - \ldots - a_{1n}' x_n, \\ x_2 = b_2' - a_{2r+1}' x_{r+1} - \ldots - a_{2n}' x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = b_r' - a_{rr+1}' x_{r+1} - \ldots - a_{rn}' x_n. \end{cases}$$

Придавая каждой из стоящих в правых частях равенств свободных переменных произвольные значения, получаем частные решения системы.

Базисным решением СЛАУ называется частное решение . в котором свободные переменные имеют нулевые значения: $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r$

.

Пример.

Решить методом Жордана-Гаусса систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 22x_4 - 4x_5 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 16x_4 - 4x_5 = 9, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 12x_4 - 2x_5 = 6. \end{cases}$$

Расширенная матрица системы

$$\overline{A}^{(0)} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 22 & -4 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 16 & -4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 12 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

1-я итерация. За направляющий элемент берем $a_{11}=1$. Преобразуем 1-ый столбец в единичный. Для этого прибавим ко 2-й и 3-й строкам 1-ю, умноженную на -1. Получим матрицу

$$\overline{A}^{(1)}=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 22 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -10 & 2 & -5 \end{array}\right).$$

- **Вторая итерация.** Выбираем направляющий элемент $a_{32} = -1.$ Т.к. он отличен от нуля, то разделим третью строку на -1 и преобразуем второй столбец в единичный. Для этого к первой строке прибавим третью, умноженную на -2. Получим

$$\overline{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 10 & -2 & 5 \end{array}\right).$$

- **Третья итерация**. Берем за направляющий элемент $a_{23} = -1$. Т.к. он отличен от нуля, то разделим вторую строку на -1. Преобразуем третий столбец в единичный. Для этого умножим вторую строку на -1 и прибавим к третьей. Получим матрицу

$$\overline{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 3 \end{array} \right).$$

Исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + 4x_4 - 2x_5 = 3, \\ x_3 + 6x_4 = 2. \end{cases}$$

Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_4, \\ x_2 = 3 - 4x_4 + 2x_5, \\ x_3 = 2 - 6x_4. \end{cases}$$

Переменные x_1, x_2, x_3 являются базисными, остальные – свободными. Если свободные переменные положить равными нулю, т.е. $x_4 = x_5 = 0$, то получим первое базисное решение (1,3,2,0,0).

Метод Жордана –Гаусса в excel.

Открыть окно и установить «Поиск решения».

В меню :Сервис /Надстройки/ Поиск решения (ставим галочку).вычисления производим с помощью функций Нажимаем кнопки Вставка, функции. В окне Мастер функций выбираем нужную.

Функции

МУМНОЖ—умножение матриц

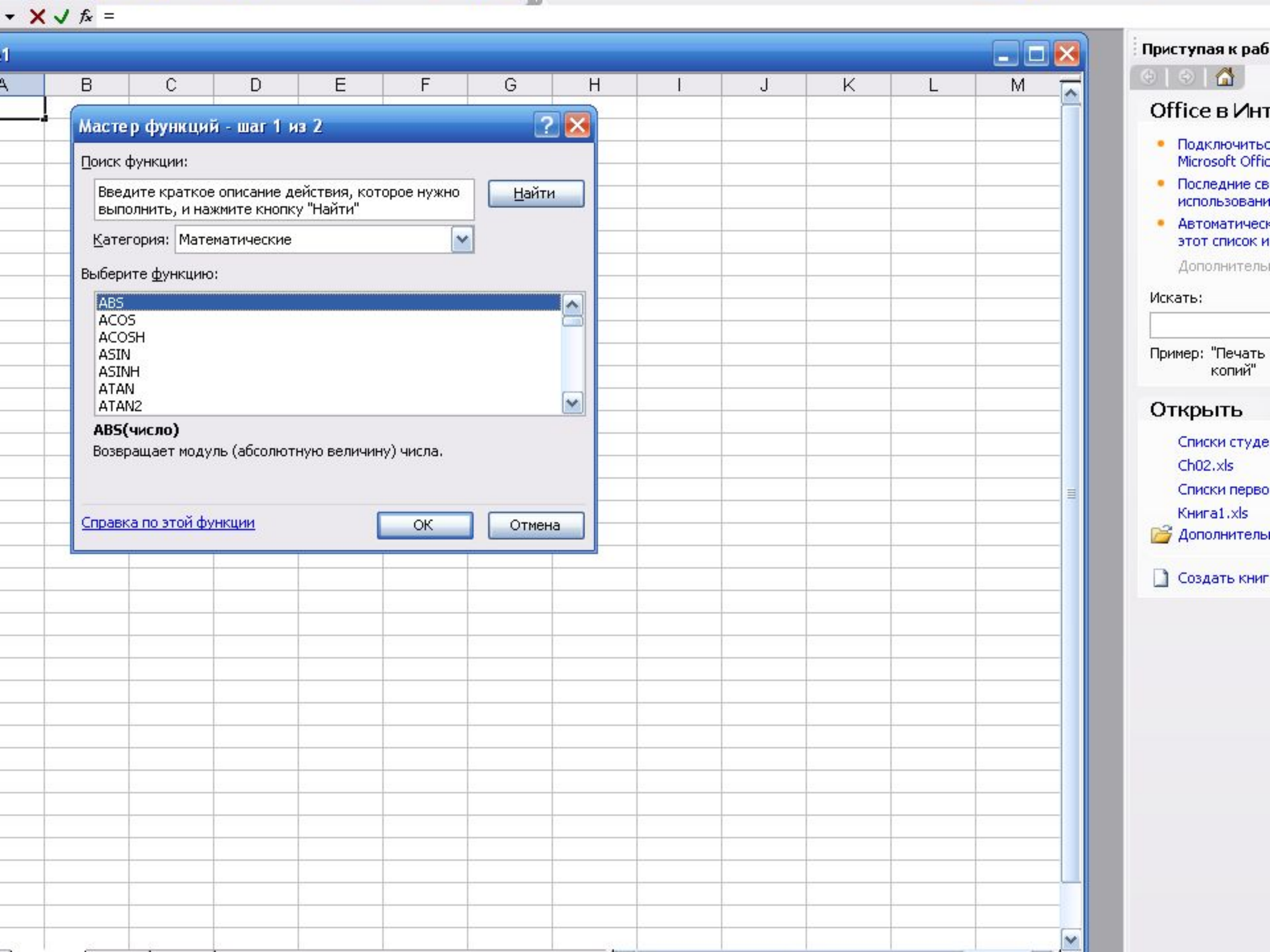
ТРАНСП—транспонирование

МОПРЕД—вычисление определителя

МОБР—вычисление обратной матрицы

Функции для выполнения действий с матрицами находятся в категории МАТЕМАТИЧЕСКИЕ.

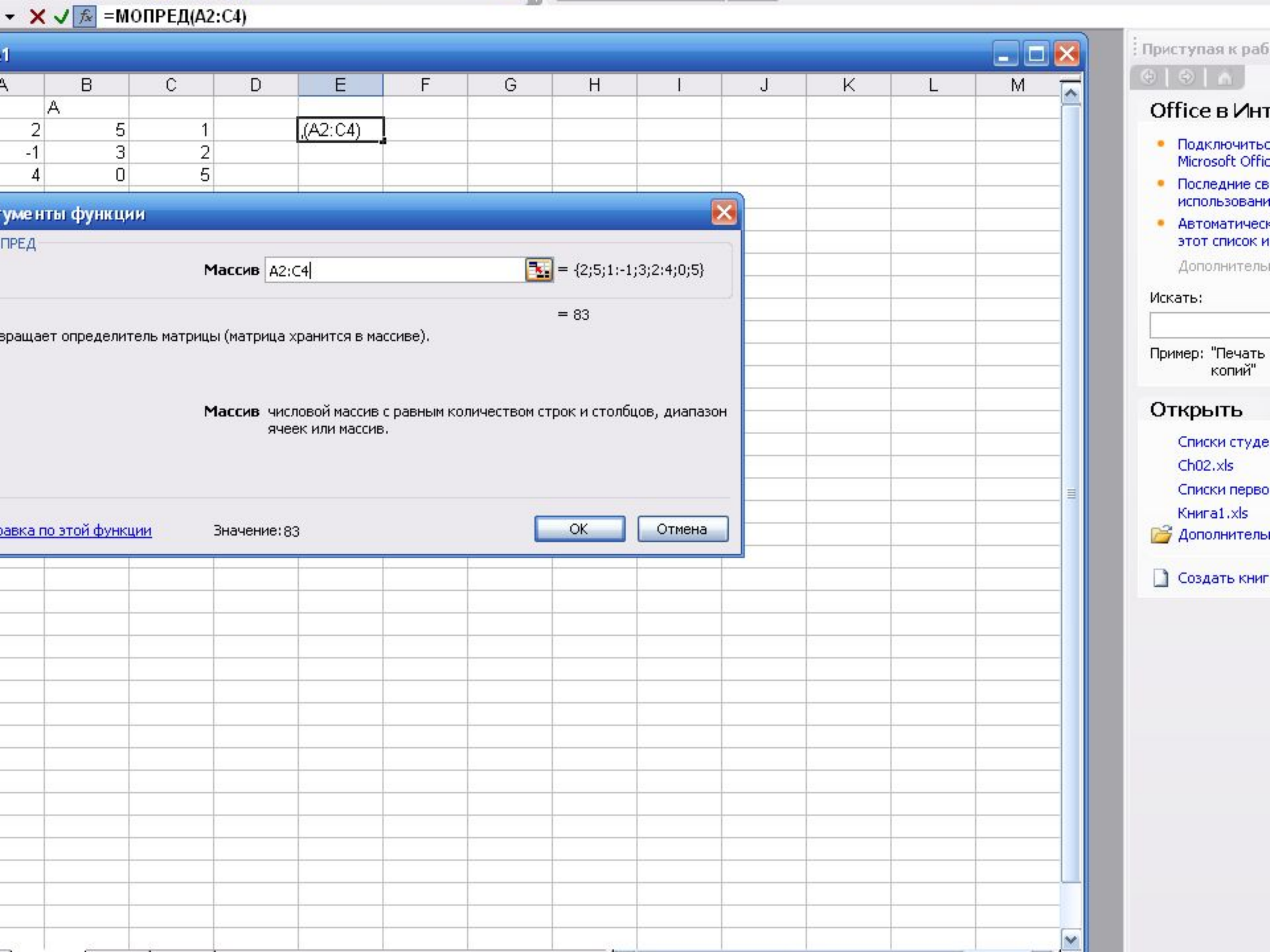
Если определитель обратной матрицы равен нулю, то при вычислении ее появляется знак ошибки #число!


=
Мастер функций - шаг 1 из 2
Поиск функции:
Введите краткое описание действия, которое нужно выполнить, и нажмите кнопку "Найти"
Найти
Категория: Математические
Выберите функцию:
ABS
ACOS
ACOSH
ASIN
ASINH
ATAN
ATAN2
ABS(число)
Возвращает модуль (абсолютную величину) числа.
Справка по этой функции
ОК
Отмена
A B C D E F G H I J K L M
Приступая к раб
Office в Инт
Подключитьс
Microsoft Offic
Последние св
использовани
Автоматическ
этот список и
Дополнитель
Искать:
Пример: "Печать
копий"
Открыть
Списки студе
Ch02.xls
Списки перво
Книга1.xls
Дополнитель
Создать книг

Вычислить определитель

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

#число!


=МОПРЕД(A2:C4)
A
2 5 1
-1 3 2
4 0 5
(A2:C4)
гументы функции
ПРЕД
Массив A2:C4
= {2;5;1:-1;3;2:4;0;5}
= 83
звращает определитель матрицы (матрица хранится в массиве).
Массив числовой массив с равным количеством строк и столбцов, диапазон ячеек или массив.
равка по этой функции
Значение: 83
ОК
Отмена
Приступая к раб
Office в Инт
Подключитьс
Microsoft Offic
Последние св
использовани
Автоматическ
этот список и
Дополнител
Искать:
Пример: "Печать копий"
Открыть
Списки студе
Ch02.xls
Списки перво
Книга1.xls
Дополнител
Создать книг

Решить в excel систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 22x_4 - 4x_5 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 16x_4 - 4x_5 = 9, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 12x_4 - 2x_5 = 6. \end{cases}$$

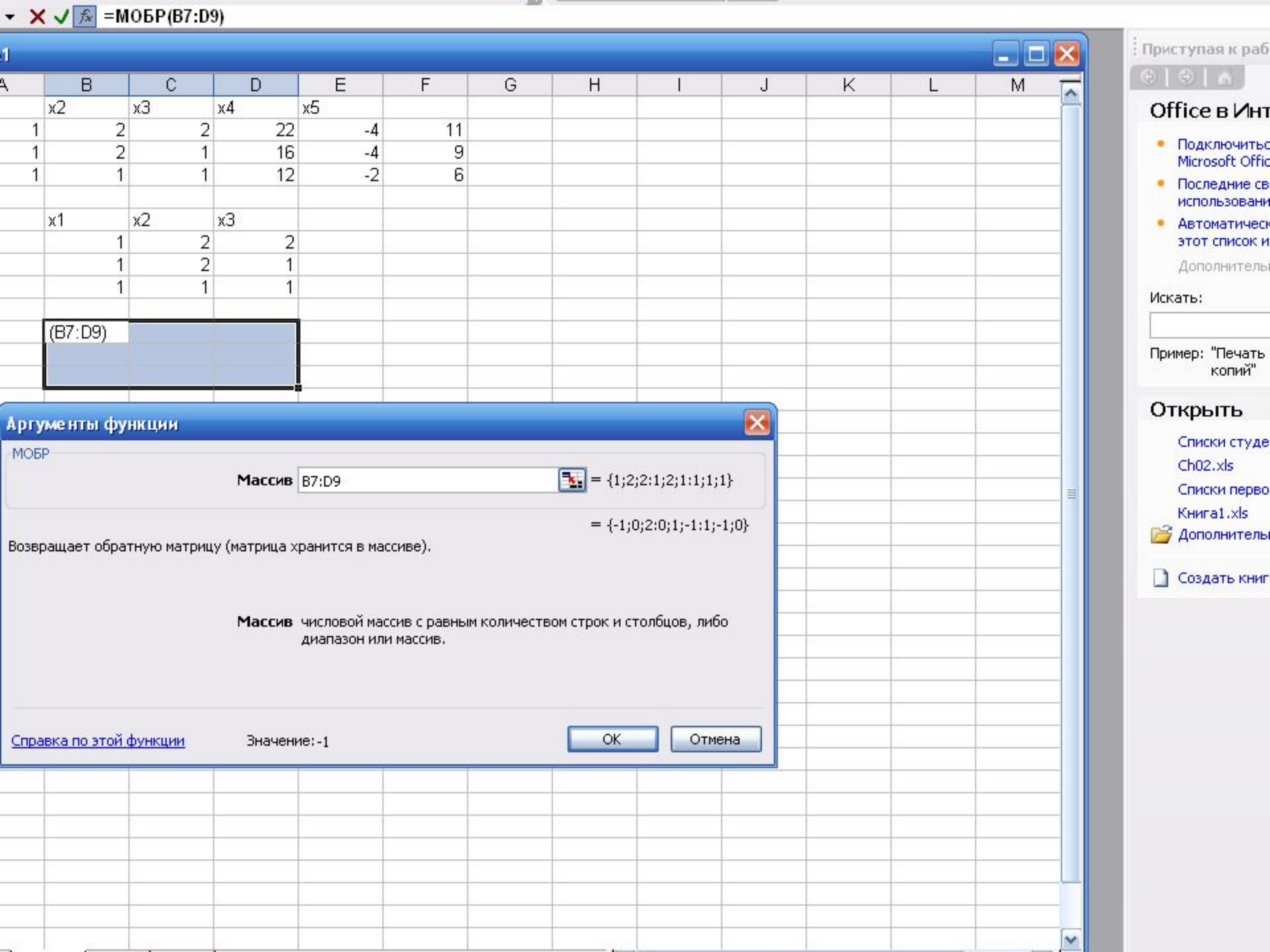
ВГУЭС

Решить в excel систему

Мы уже видели, что эта система имеет множество решений, причем нами уже найдено одно базисное решение. Общее число базисных решений будет не более, чем

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = 10.$$

Здесь число 5 –это число всех переменных, а 3-число базисных переменных. Рассмотрим по шагам получение всех базисных решений, начиная с первого x_1, x_2, x_3

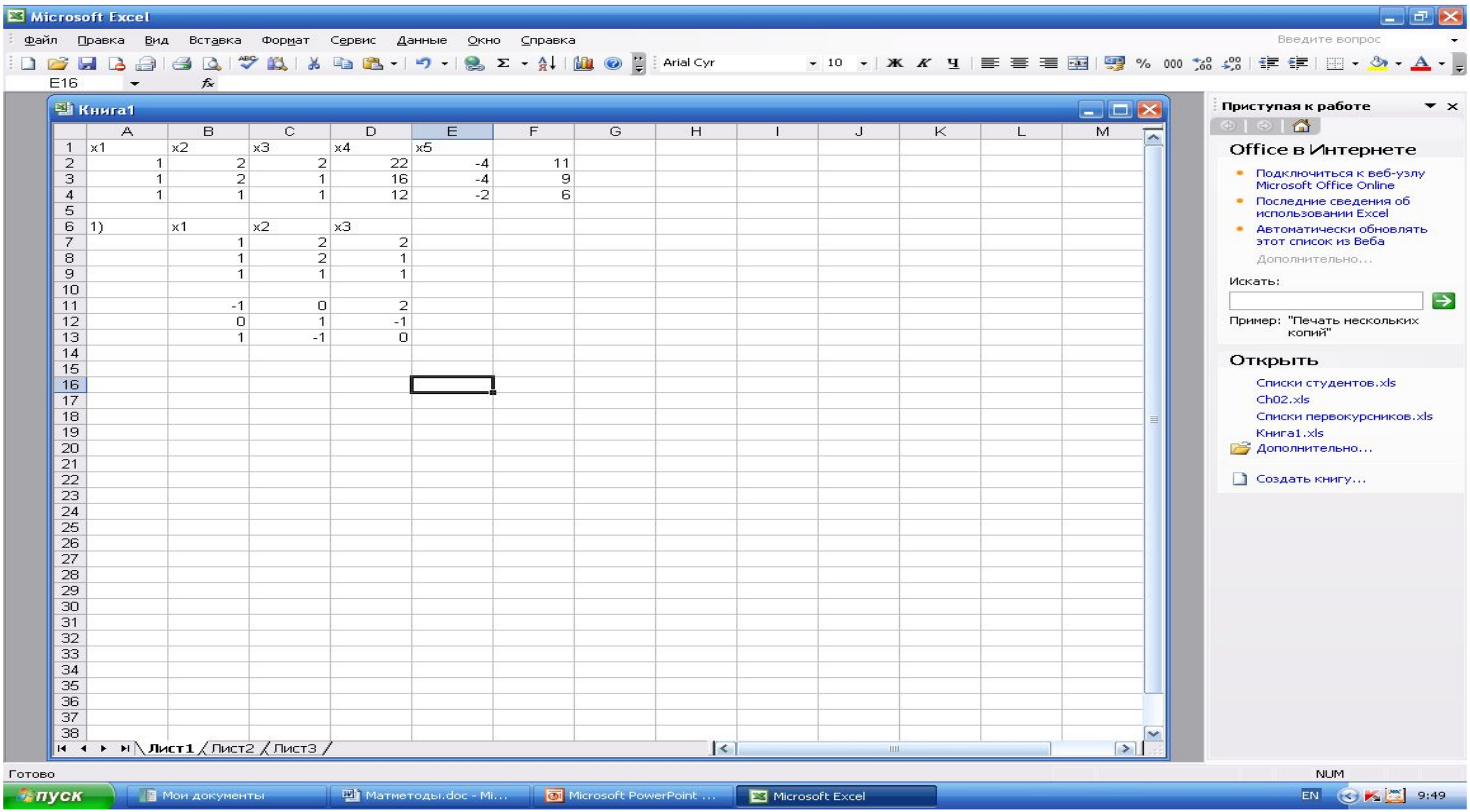


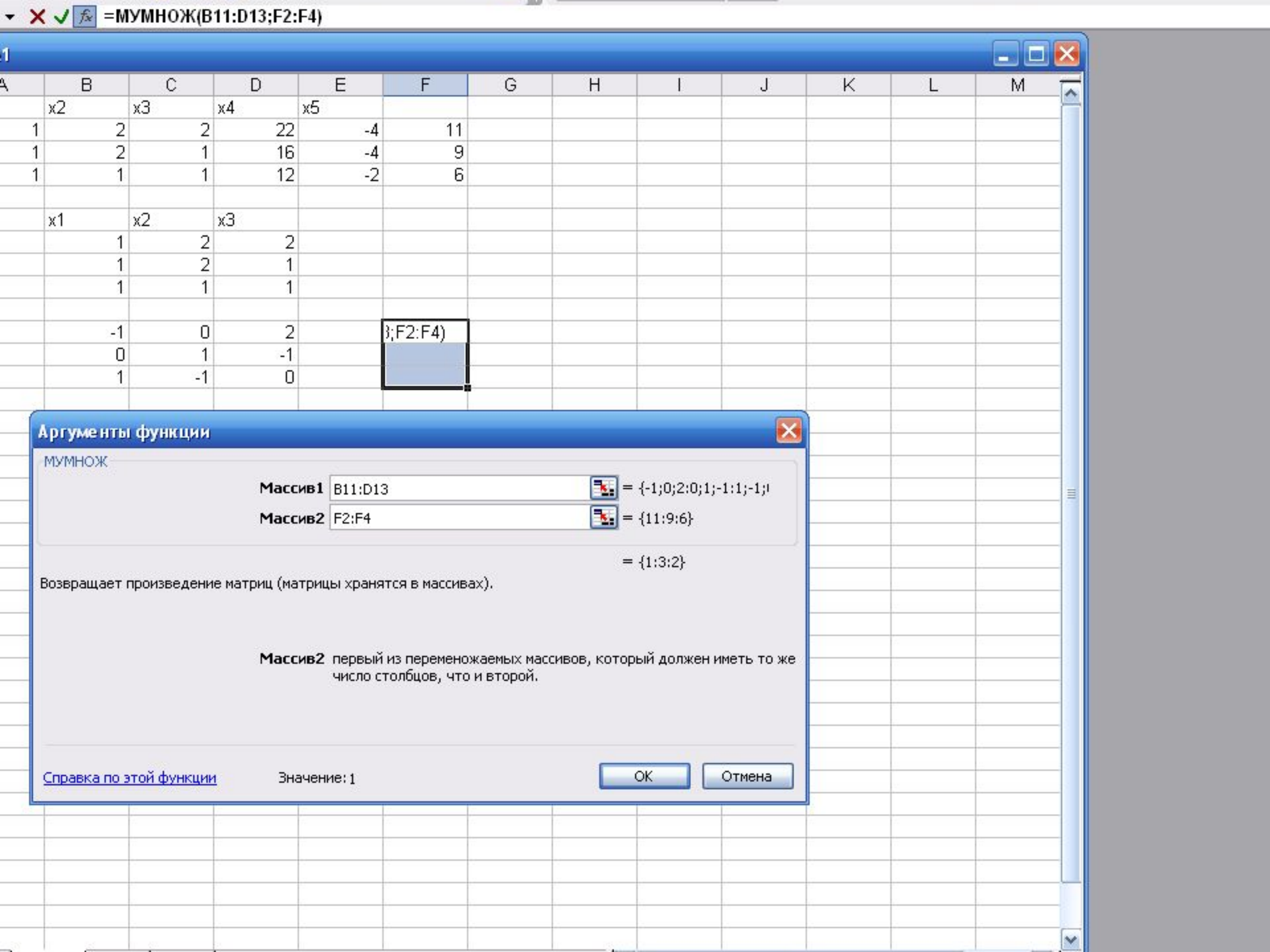
=МОБР(B7:D9)
A B C D E F G H I J K L M
x2 x3 x4 x5
1 2 2 22 -4 11
1 2 1 16 -4 9
1 1 1 12 -2 6
x1 x2 x3
1 2 2
1 2 1
1 1 1
(B7:D9)
Аргументы функции
МОБР
Массив B7:D9 = {1;2;2:1;2;1:1;1;1}
= {-1;0;2:0;1;-1:1;-1;0}
Возвращает обратную матрицу (матрица хранится в массиве).
Массив числовой массив с равным количеством строк и столбцов, либо диапазон или массив.
Справка по этой функции
Значение: -1
ОК
Отмена
Приступая к раб
Office в Инт
Подключитьс
Microsoft Offic
Последние св
использовани
Автоматическ
этот список и
Дополнительн
Искать:
Пример: "Печать
копий"
Открыть
Списки студе
Ch02.xls
Списки перво
Книга1.xls
Дополнительн
Создать книг

Следующее действие

Нажимаем одну за другой клавиши F2+Ctrl+Shift+Enter.

Получаем в выделенном диапазоне обратную матрицу, которую теперь умножим на столбец свободных членов, расположенный в диапазоне F2-F4.


Microsoft Excel
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка
Введите вопрос
Arial Cyr
10
E16
Книга1
x1 x2 x3 x4 x5
1 2 2 22 -4 11
1 2 1 16 -4 9
1 1 1 12 -2 6
1) x1 x2 x3
1 2 2
1 2 1
1 1 1
-1 0 2
0 1 -1
1 -1 0
Лист1 Лист2 Лист3
Приступая к работе
Office в Интернете
Подключиться к веб-узлу Microsoft Office Online
Последние сведения об использовании Excel
Автоматически обновлять этот список из Веба
Дополнительно...
Искать:
Пример: "Печать нескольких копий"
Открыть
Списки студентов.xls
Ch02.xls
Списки первокурсников.xls
Книга1.xls
Дополнительно...
Создать книгу...
Готово
NUM
пуск
Мои документы
Матметоды.doc - Mi...
Microsoft PowerPoint ...
Microsoft Excel
EN
9:49


=МУМНОЖ(B11:D13;F2:F4)
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
x2
x3
x4
x5
1
2
2
22
-4
11
1
2
1
16
-4
9
1
1
1
12
-2
6
x1
x2
x3
1
2
2
1
2
1
1
1
1
-1
0
2
;F2:F4)
0
1
-1
1
-1
0
Аргументы функции
МУМНОЖ
Массив1
B11:D13
= {-1;0;2:0;1;-1:1;-1;
Массив2
F2:F4
= {11:9:6}
= {1:3:2}
Возвращает произведение матриц (матрицы хранятся в массивах).
Массив2
первый из переменожаемых массивов, который должен иметь то же число столбцов, что и второй.
Справка по этой функции
Значение: 1
OK
Отмена

Нажимаем клавиши

F2+Ctrl+Shift+Enter.

Получили первое базисное решение , которое было получено вручную

(1,3,2).

Другие базисные решения можно получить по аналогичной схеме.