

Кафедра математики и моделирования  
Старший преподаватель Г.В. Аверкова  
Курс «Высшая математика»

## Тема 8 «Вывод канонических уравнений гиперболы и параболы»

Исследование формы гиперболы и параболы по их уравнениям. График квадратного трехчлена, уравнение равносторонней гиперболы, асимптоты которой приняты за оси координат, график дробно-линейной функции.



# Цели и задачи

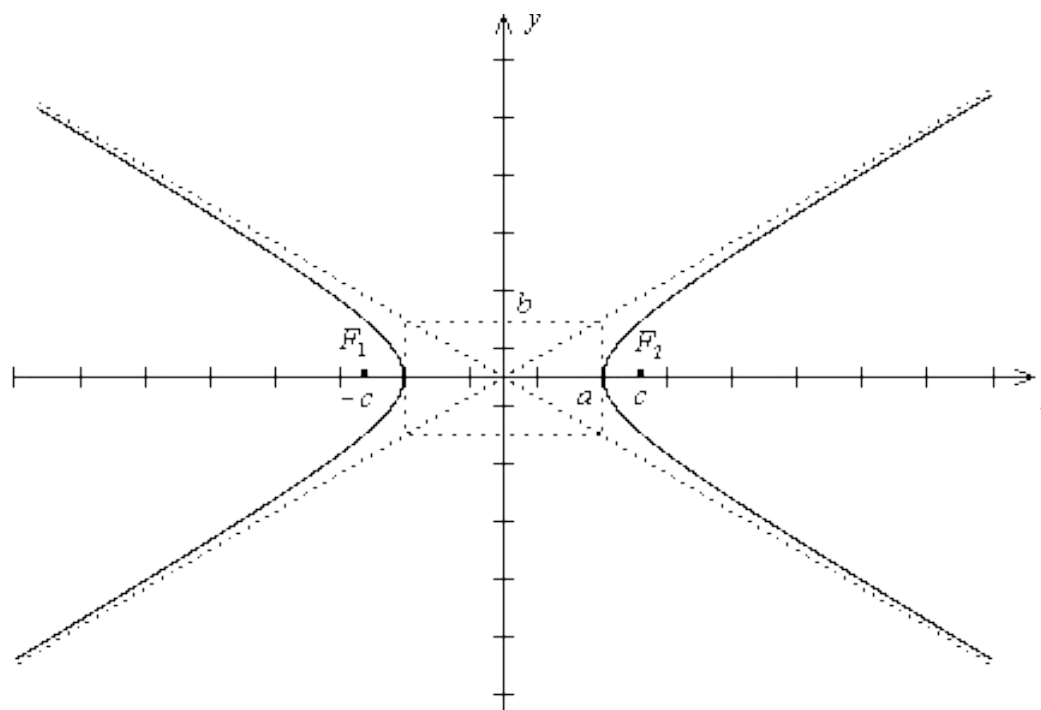
---

- Цели:
  - Рассмотреть основные понятия по теме «Вывод канонических уравнений гиперболы и параболы»
- Задачи:
  - Рассмотреть свойства гиперболы
  - Рассмотреть свойства параболы

# Теоретический материал

Гиперболой называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0$$



# Теоретический материал

---

## Свойства гиперболы

1) Параметры  $a$ ,  $b$  называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы.

Гипербола лежит вне полосы  $|x| < a$

Вершинами гиперболы являются точки  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$

2) Гипербола лежит в вертикальных углах, образованных прямыми  $y = \pm \frac{b}{a}x$  и содержащих точки оси  $Ox$

Данные прямые называются асимптотами гиперболы

# Теоретический материал

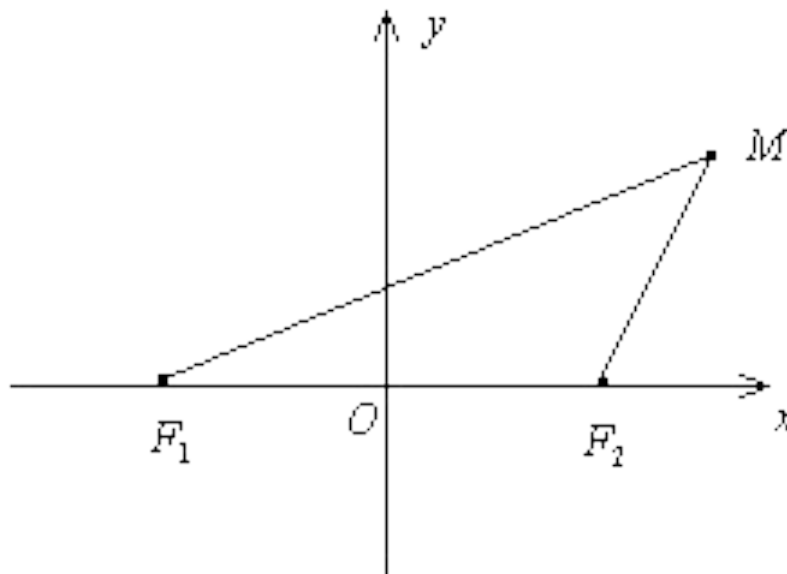
---

- 3) Координатные оси  $Ox$  и  $Oy$  канонической системы координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат – ее центром симметрии
- 4) На гиперболе лежат точки, сколь угодно далекие от начала координат
- 5) Гипербола есть множество точек, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух данных точек (фокусов) постоянна (равна заданному числу)

# Теоретический материал

---

Точки  $F_1(c, 0)$ ,  $F_2(-c, 0)$ , где  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , называются соответственно правым и левым фокусами гиперболы. Величина  $2c$  называется фокусным расстоянием.



# Теоретический материал

---

б) Гипербола есть множество точек плоскости, отношение расстояний от которых до данной точки (фокуса гиперболы) и до данной прямой (одноименной с фокусом директрисы) постоянно (равно эксцентриситету гиперболы)

Число  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  называется эксцентриситетом гиперболы

Правой и левой директрисой гиперболы называются прямые

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

# Теоретический материал

---

## 7) Оптическое свойство гиперболы

Если поместить в один из фокусов гиперболы с зеркальной «поверхностью» точечный источник света, то все лучи после отражения от «поверхности» видятся исходящими из другого фокуса

Гипербола  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

называется сопряженной к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

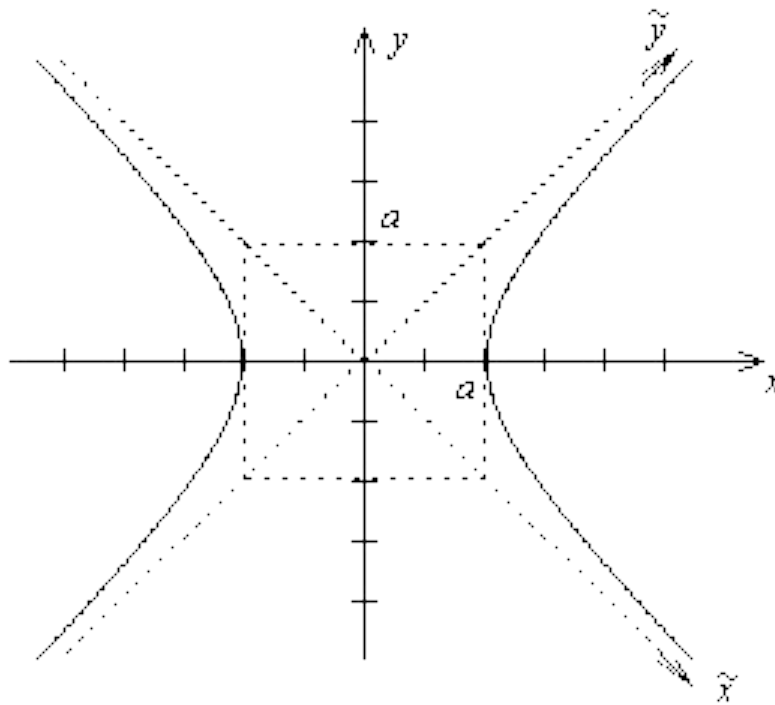


# Теоретический материал

---

## Равносторонняя гипербола

Если действительная и мнимая полуоси гиперболы равны, то гипербола называется равносторонней.

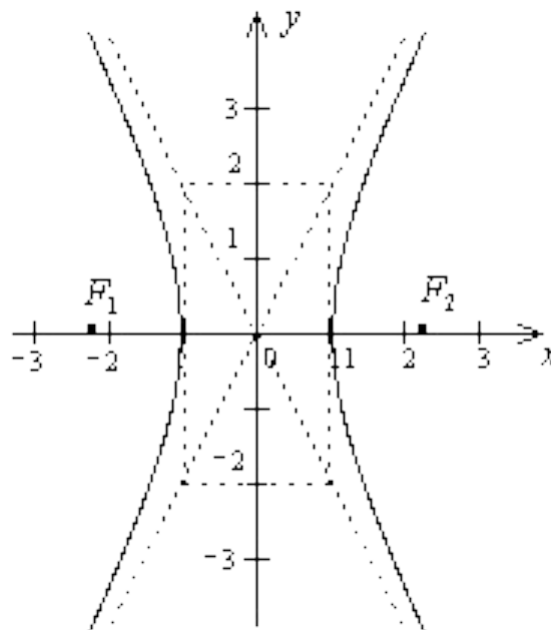


# Теоретический материал

## Исследование формы гиперболы по ее уравнению

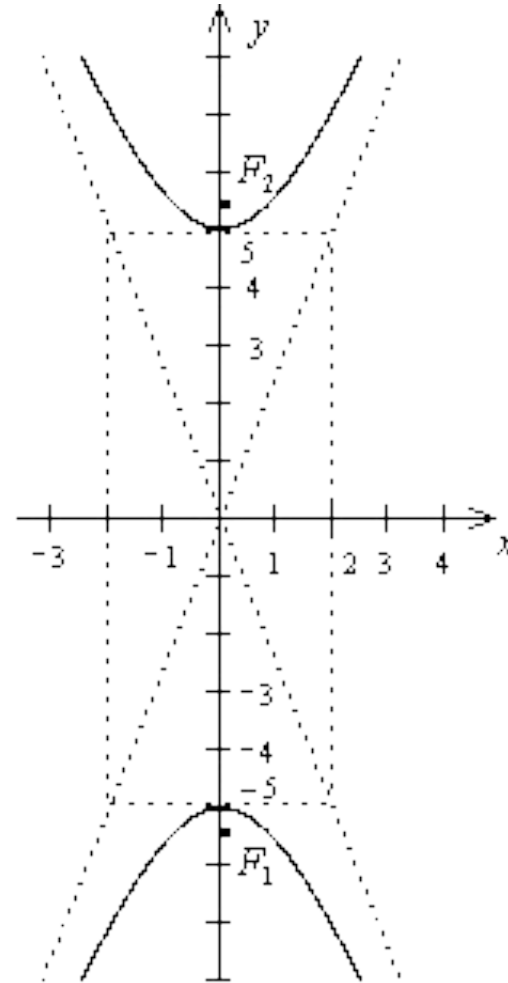
Пример 1

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$$



# Теоретический материал

Пример 2  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = -1$

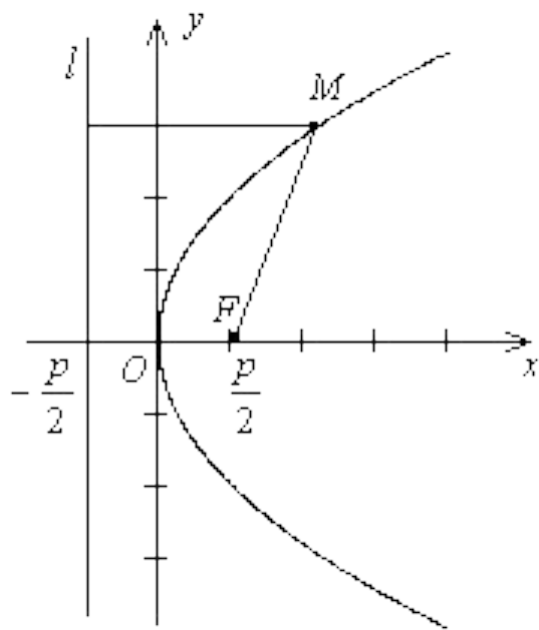


# Теоретический материал

---

Параболой называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$y^2 = 2px, \quad p > 0$$



# Теоретический материал

---

## Свойства параболы

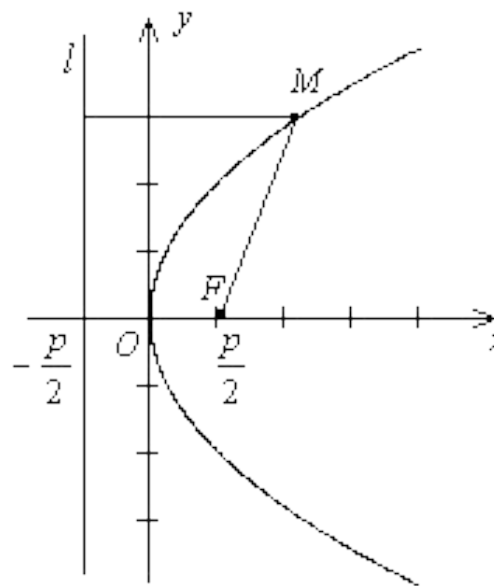
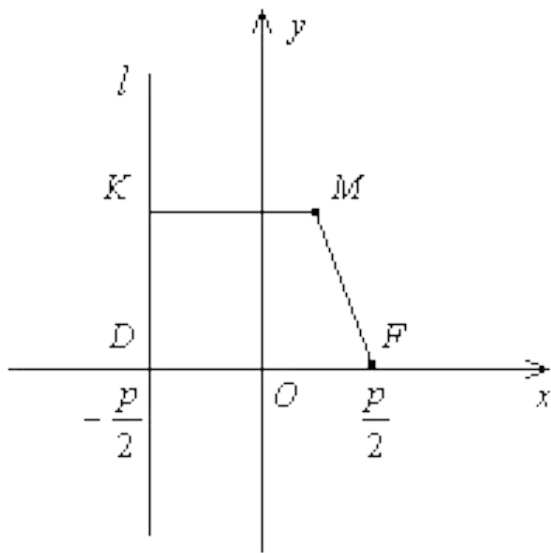
- 1) Все точки параболы лежат в правой полуплоскости.  
Точка  $O(0,0)$  лежит на параболе и называется ее вершиной.
- 2) На параболе лежат точки, сколь угодно далекие от начала координат
- 3) Ось абсцисс канонической координатной системы является единственной осью симметрии параболы.  
Ось симметрии параболы называется осью параболы.

# Теоретический материал

4) Парабола есть множество точек, равноудаленных от данной точки (фокуса параболы) и от данной прямой (директрисы параболы).

Точка  $F(p/2, 0)$  - фокус параболы

Прямая  $x = -\frac{p}{2}$  - директриса параболы

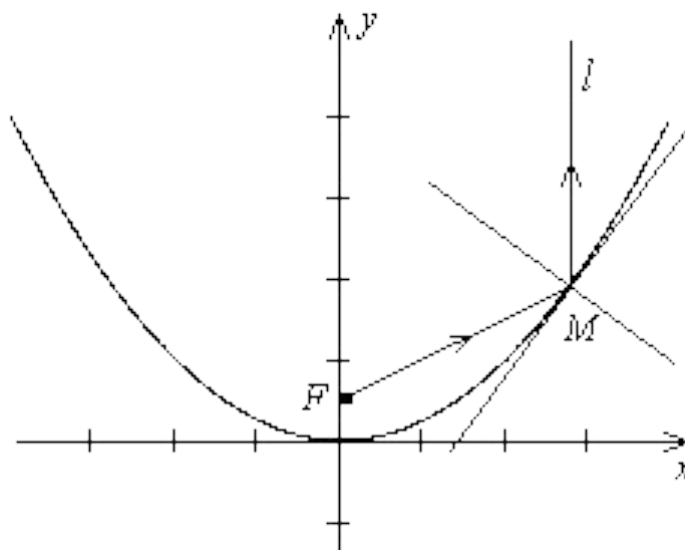


# Теоретический материал

---

## 5) Оптическое свойство параболы

Если в фокус параболы с зеркальной «поверхностью» помещен точечный источник света, то все лучи, отраженные от зеркальной «поверхности» параболы, будут направлены параллельно оси параболы

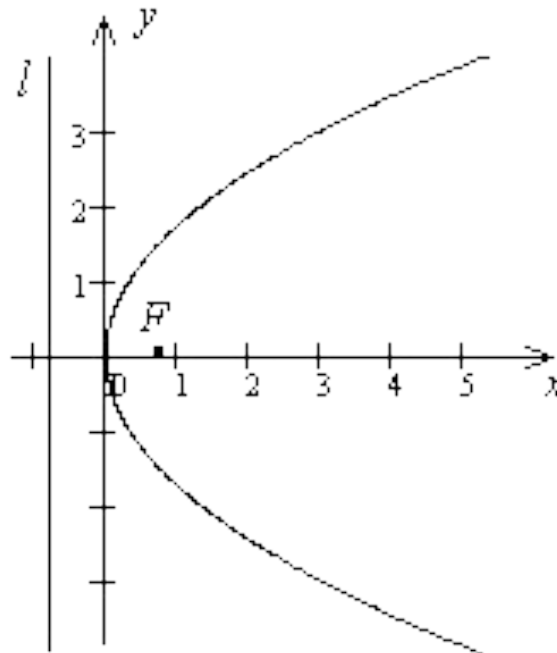


# Теоретический материал

---

Пример 3

$$y^2 = 3x$$



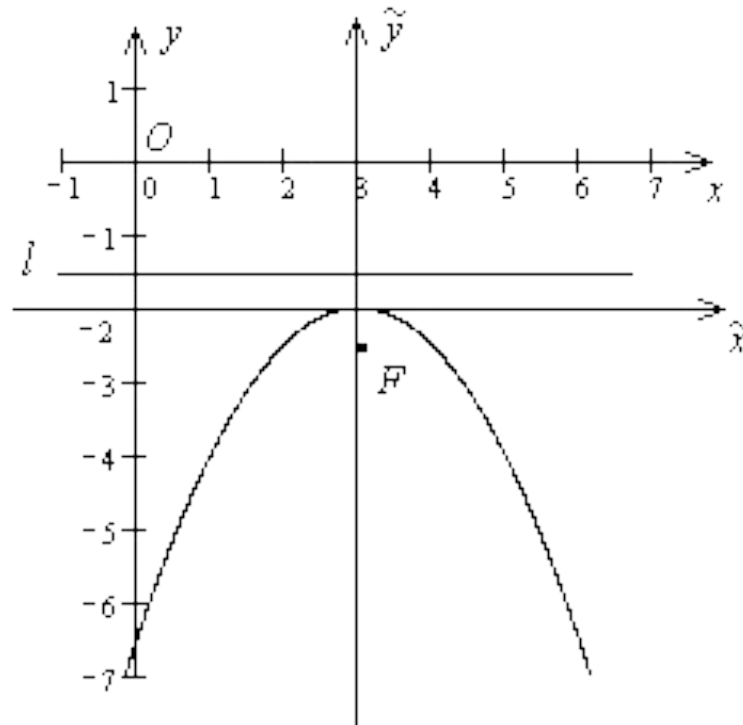


# Теоретический материал

---

Пример 4

$$(x-3)^2 = -10(y+2)$$



# Ключевые понятия

---

- Гипербола
- Парабола
- Эксцентриситет
- Фокус
- Директриса
- Асимптоты

# Контрольные вопросы

---

- Определение гиперболы
- Свойства гиперболы
- Эксцентриситет гиперболы
- Директрисы и фокусы гиперболы
- Определение параболы и свойства
- Директриса и фокус параболы
- Альтернативные определения гиперболы и параболы

# Дополнительная литература

---