

Кафедра математики и моделирования  
Старший преподаватель Г.В. Аверкова  
Курс «Высшая математика»

---

## Тема 8 «Вывод канонических уравнений гиперболы и параболы»

---

Исследование формы гиперболы и параболы по их  
уравнениям. График квадратного трехчлена, уравнение  
равносторонней гиперболы, асимптоты которой приняты за  
оси координат, график дробно-линейной функции.

# Цели и задачи

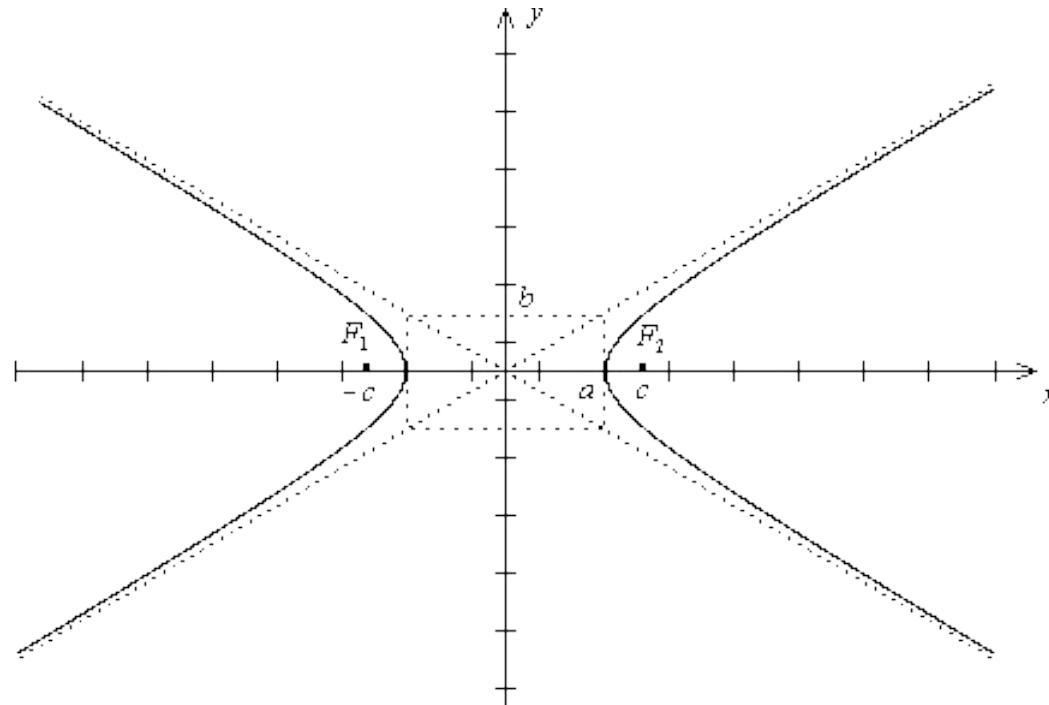
---

- Цели:
  - Рассмотреть основные понятия по теме «Вывод канонических уравнений гиперболы и параболы»
- Задачи:
  - Рассмотреть свойства гиперболы
  - Рассмотреть свойства параболы

# Теоретический материал

Гиперболой называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0$$



# Теоретический материал

---

## Свойства гиперболы

1) Параметры  $a$ ,  $b$  называются соответственно действительной и мнимой полуосами гиперболы.

Гипербола лежит вне полосы  $|x| < a$

Вершинами гиперболы являются точки  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$

2) Гипербола лежит в вертикальных углах, образованных

прямыми  $y = \pm \frac{b}{a}x$  и содержащих точки оси Ох

Данные прямые называются асимптотами гиперболы

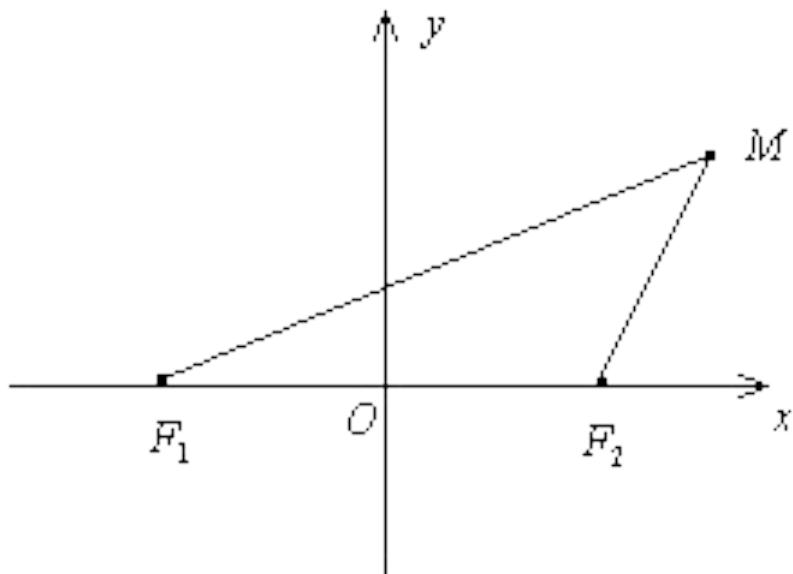
# Теоретический материал

---

- 3) Координатные оси Ох и Оу канонической системы координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат – ее центром симметрии
- 4) На гиперболе лежат точки, сколь угодно далекие от начала координат
- 5) Гипербола есть множество точек, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух данных точек (фокусов) постоянна (равна заданному числу)

# Теоретический материал

Точки  $F_1(c, 0)$ ,  $F_2(-c, 0)$ , где  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , называются соответственно правым и левым фокусами гиперболы. Величина  $2c$  называется фокусным расстоянием.



# Теоретический материал

---

6) Гипербола есть множество точек плоскости, отношение расстояний от которых до данной точки (фокуса гиперболы) и до данной прямой (одноименной с фокусом директрисы) постоянно (равно эксцентриситету гиперболы)

Число  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  называется эксцентриситетом гиперболы

Правой и левой директрисой гиперболы называются прямые

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

# Теоретический материал

---

## 7) Оптическое свойство гиперболы

Если поместить в один из фокусов гиперболы с зеркальной «поверхностью» точечный источник света, то все лучи после отражения от «поверхности» видятся исходящими из другого фокуса

Гипербола       $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

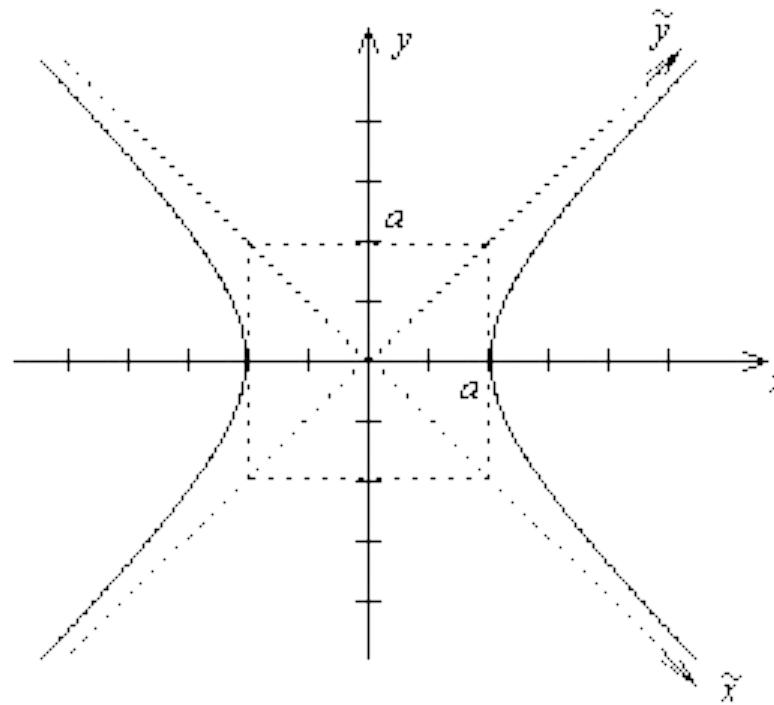
называется сопряженной к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

# Теоретический материал

## Равносторонняя гипербола

Если действительная и мнимая полуоси гиперболы равны, то гипербола называется равносторонней.

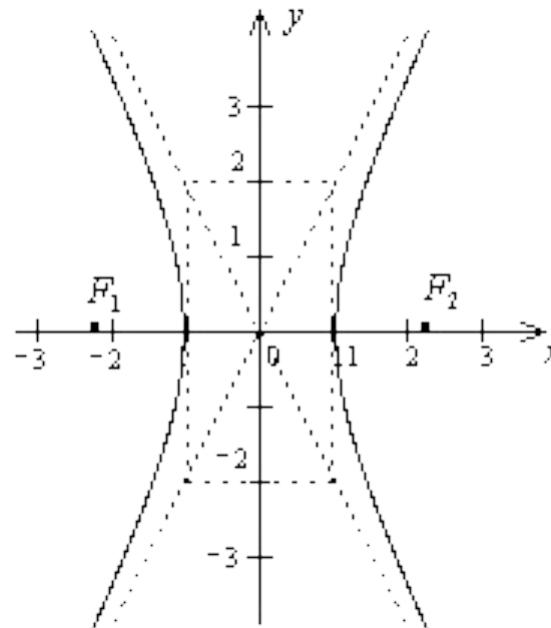


# Теоретический материал

## Исследование формы гиперболы по ее уравнению

Пример 1

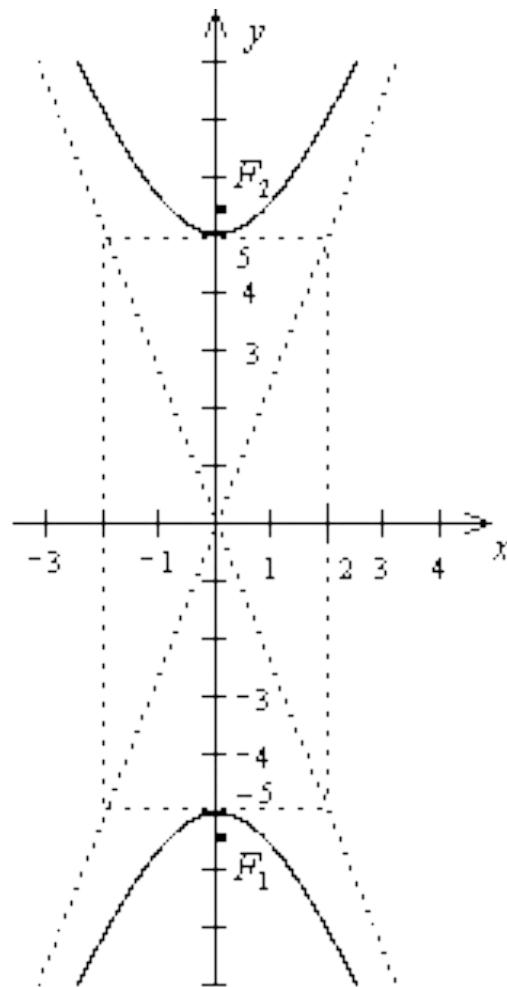
$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$$



# Теоретический материал

Пример 2

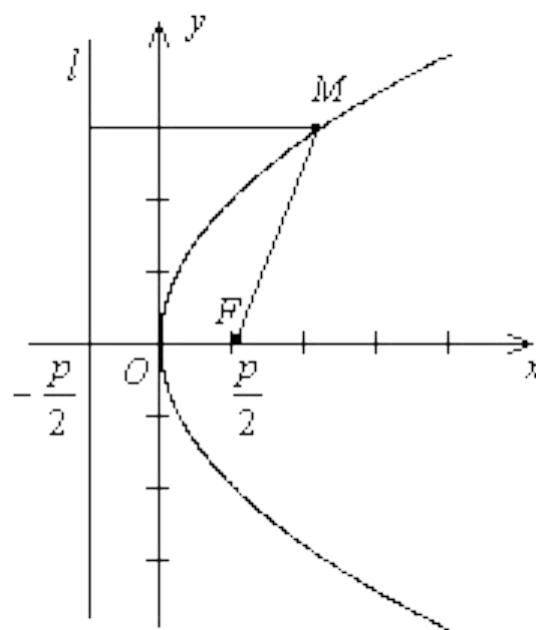
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = -1$$



# Теоретический материал

Параболой называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$y^2 = 2px, \quad p > 0$$



# Теоретический материал

---

## Свойства параболы

1) Все точки параболы лежат в правой полуплоскости.

Точка  $O(0,0)$  лежит на параболе и называется ее вершиной.

2) На параболе лежат точки, сколь угодно далекие от начала координат

3) Ось абсцисс канонической координатной системы является единственной осью симметрии параболы.

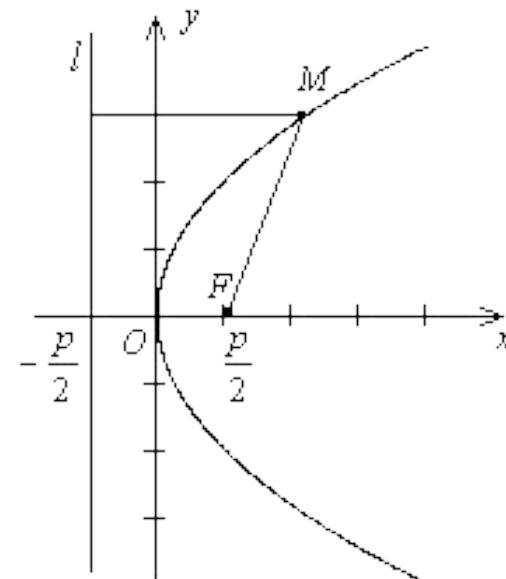
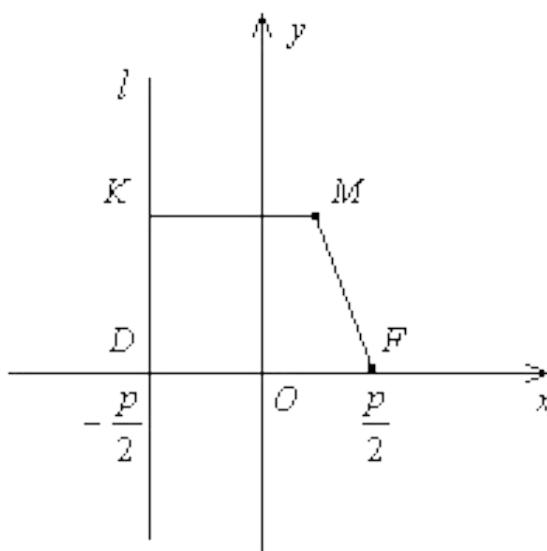
Ось симметрии параболы называется осью параболы.

# Теоретический материал

4) Парабола есть множество точек, равноудаленных от данной точки (фокуса параболы) и от данной прямой (директрисы параболы).

Точка  $F(p/2, 0)$  - фокус параболы

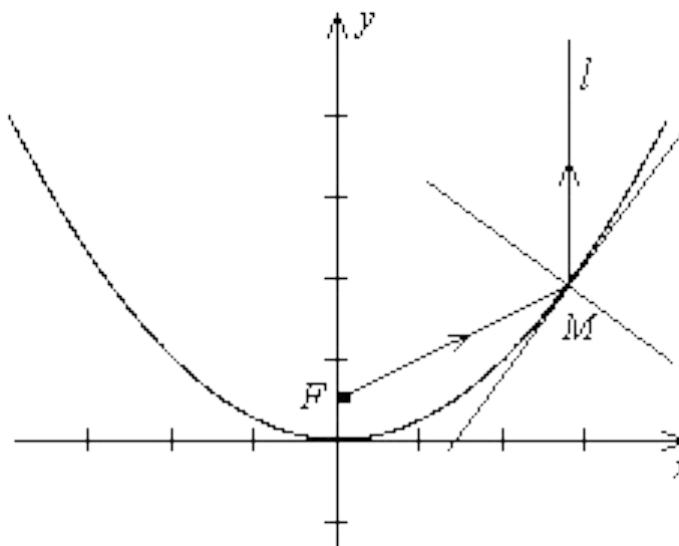
Прямая  $x = -\frac{p}{2}$  - директриса параболы



# Теоретический материал

## 5) Оптическое свойство параболы

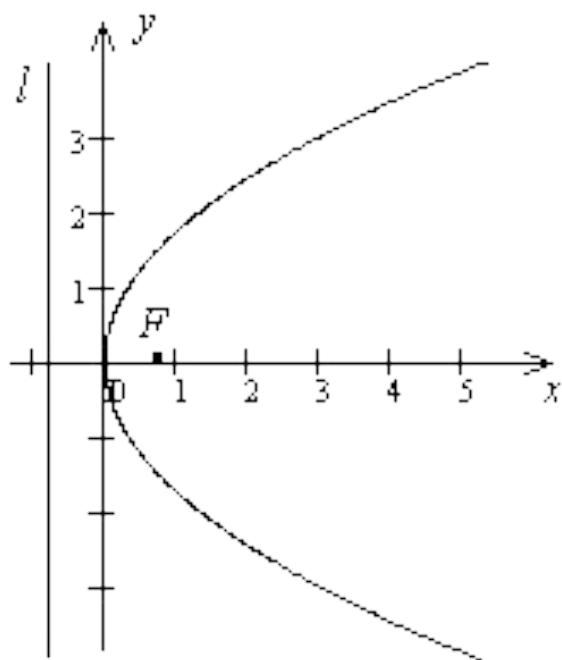
Если в фокус параболы с зеркальной «поверхностью» помещен точечный источник света, то все лучи, отраженные от зеркальной «поверхности» параболы, будут направлены параллельно оси параболы



# Теоретический материал

Пример 3

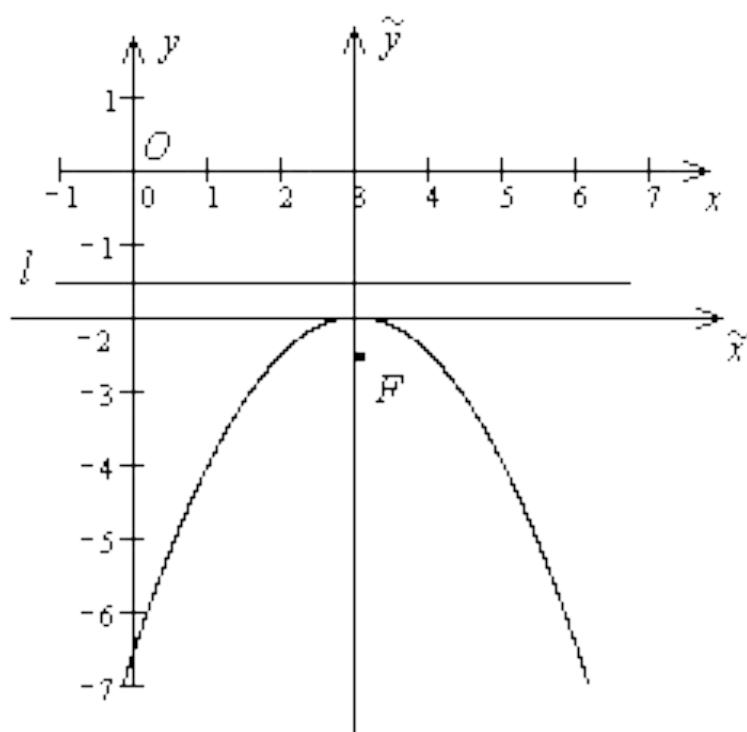
$$y^2 = 3x$$



# Теоретический материал

Пример 4

$$(x-3)^2 = -10(y+2)$$



# Ключевые понятия

---

- Гипербола
- Парабола
- Эксцентриситет
- Фокус
- Директриса
- Асимптоты

# Контрольные вопросы

- Определение гиперболы
- Свойства гиперболы
- Эксцентриситет гиперболы
- Директрисы и фокусы гиперболы
- Определение параболы и свойства
- Директриса и фокус параболы
- Альтернативные определения гиперболы и параболы

# Дополнительная литература

---