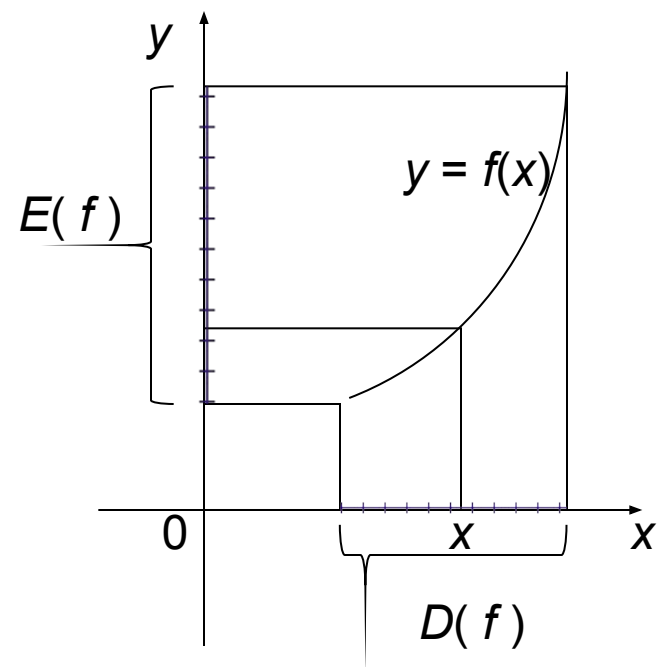


# Взаимно обратные функции

## ВЗАИМНО ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ



Если каждому значению  $x$  из некоторого множества действительных чисел поставлено в соответствие по определённому правилу  $f$  число  $y$ , то, говорят, что на этом множестве определена функция.

**Прямая** Задача.

$$y = f(x), x - !$$

Найти значение **y** при заданном значении **x**.

Дано:  $y = 2x + 3$

Найти:  $y(5)$

Решение:

$$y(5) = 2 \cdot 5 + 3 = 13$$

Ответ:  $y(5) = 13$

**Обратная** Задача.

$$y = f(x), y - !$$

Найти значение **x** при заданном значении **y**.

Дано:  $y = 2x + 3, y(x) = 42$

Найти:  $x$

Решение:

$$42 = 2x + 3$$

$$2x = 39$$

$$x = 19,5$$

Ответ:  $y(19,5) = 42$

Дано:  $v(t) = v_0 - gt$

Найти:  **$t - ?$**

Решение:

$$v_0 - gt = v$$

$$gt = v_0 - v$$

$$t = \frac{v_0 - v}{g} \quad , \text{ т.е. } \quad t(v) = \frac{v_0 - v}{g}$$

Обратимая функция

Обратная функция к  **$v(t)$**

Если функция  $y = f(x)$  принимает каждое своё значение  $y$  только при одном значении  $x$ , то эту функцию называют обратимой.

$$y = 2x + 2$$

$$y = 2 + \frac{1}{x}$$

$$y = x^3$$

The diagram shows the equation  $y = x^2$  at the top. Two arrows point downwards from this equation to two separate equations:  $x_1 = \sqrt{y}$  on the left and  $x_2 = -\sqrt{y}$  on the right.

Пусть  $y = f(x)$  – обратимая функция. Тогда каждому  $y$  из множества значений функции соответствует одно определённое число  $x$  из области её определения, такое, что  $f(x) = y$ . Это соответствие определяет функцию  $x$  от  $y$ , которую обозначим  $x = g(y)$ . Поменяем местами  $x$  и  $y$ :  $y = g(x)$ .

Функцию  $y = g(x)$  называют **обратной** к функции  $y = f(x)$ .

Дано:  $y = \frac{1}{x-2}$

Найти функцию, обратную данной  $y = f^{-1}(x)$ .

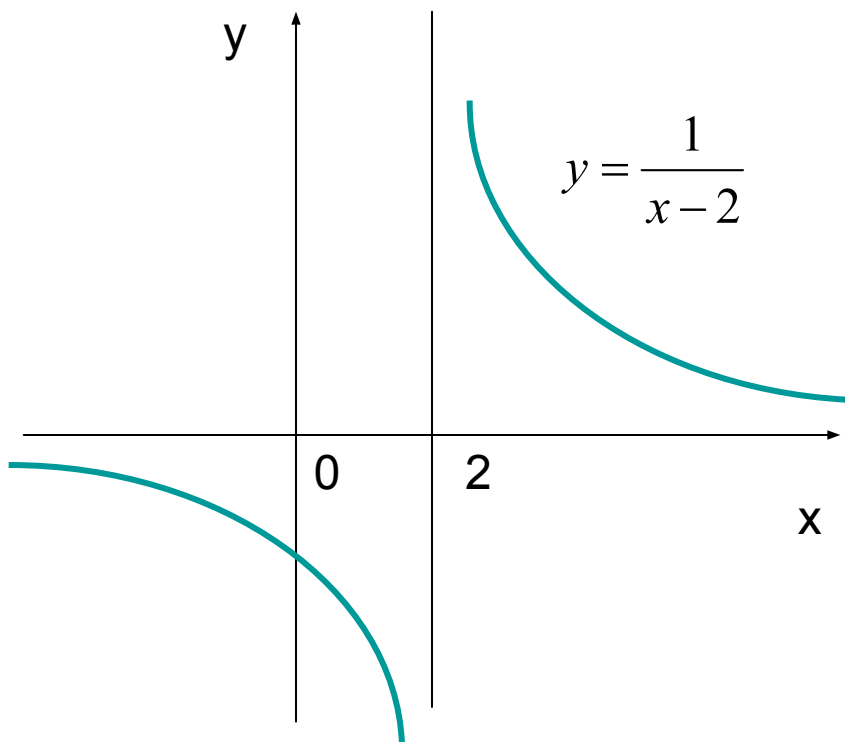
Решение:

$$\frac{1}{x-2} = y$$

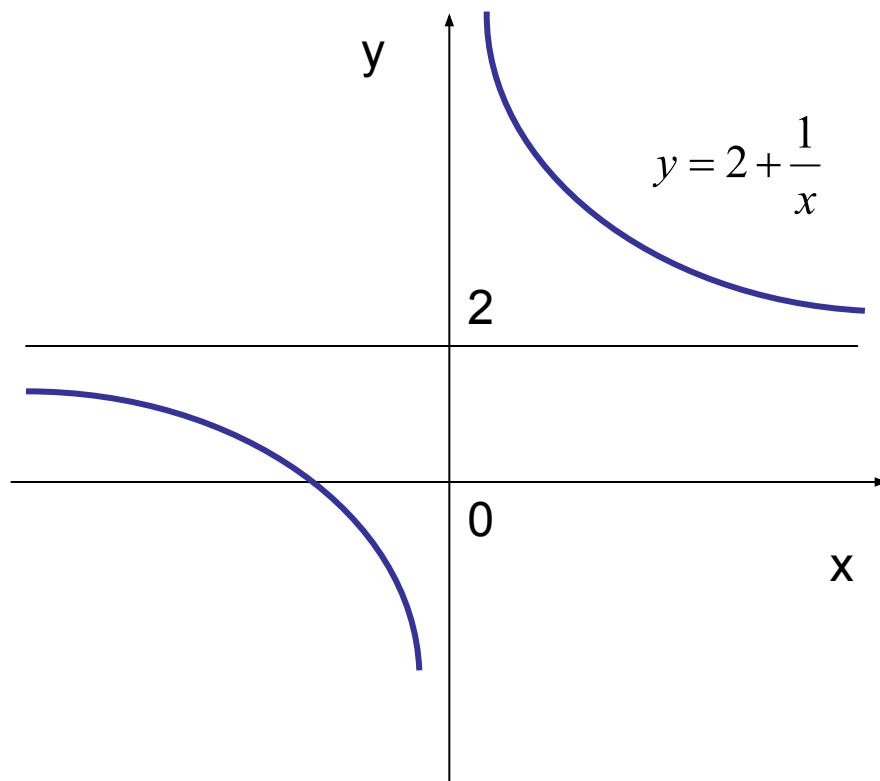
$$x-2 = \frac{1}{y}$$

$$x = 2 + \frac{1}{y} \quad \Longrightarrow \quad y = 2 + \frac{1}{x}$$

Ответ:  $f^{-1}(x) = 2 + \frac{1}{x}$



1.  $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$
2.  $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$



1.  $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
2.  $E(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

# Свойства обратных функций.

1. Область определения обратной функции  $f^{-1}$  совпадает с множеством значений исходной  $f$ , а множество значений обратной функции  $f^{-1}$  совпадает с областью определения исходной функции  $f$ :

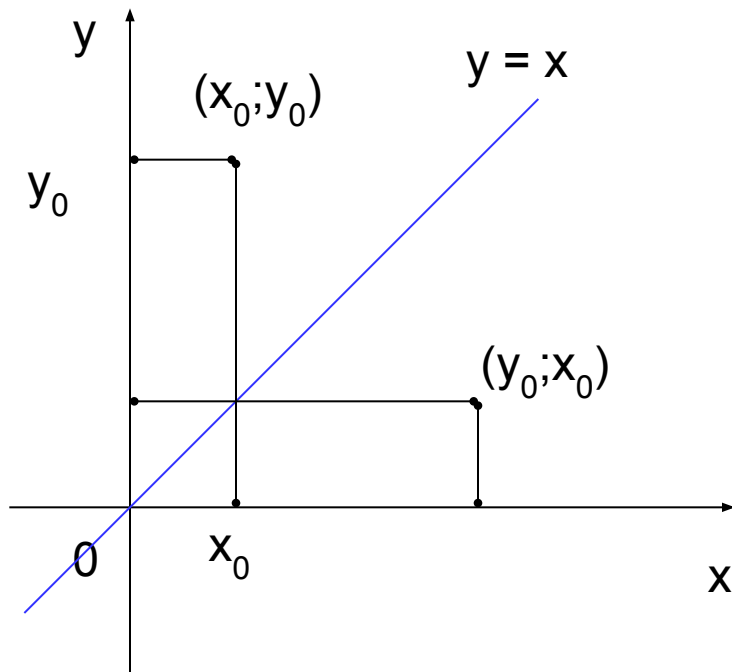
$$D(f^{-1}) = E(f), E(f^{-1}) = D(f).$$

2. Монотонная функция является обратимой:

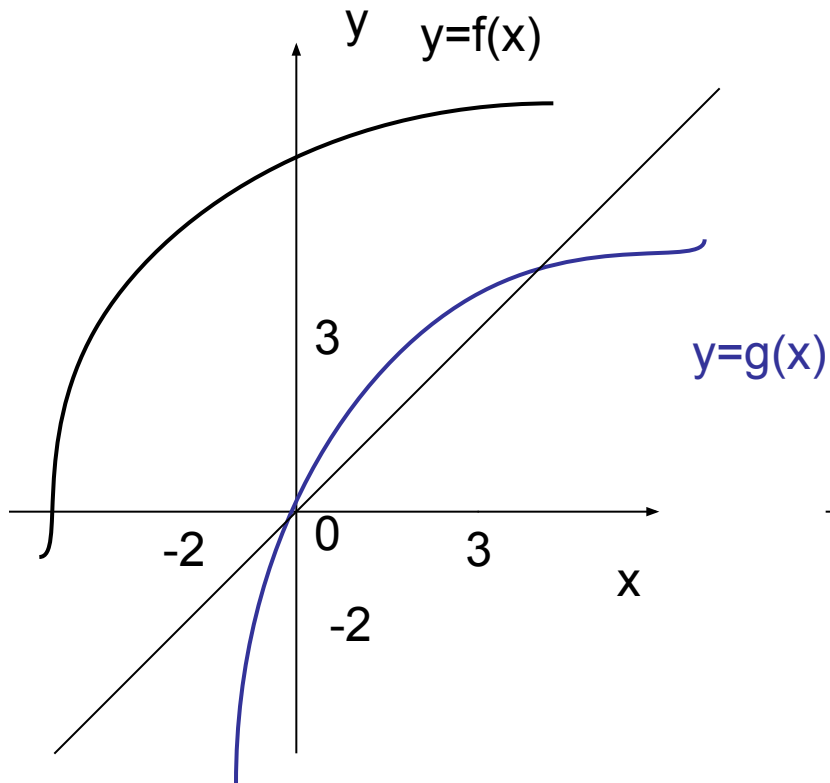
если функция  $f$  возрастает, то обратная к ней функция  $f^{-1}$  также возрастает;

если функция  $f$  убывает, то обратная к ней функция  $f^{-1}$  также убывает.

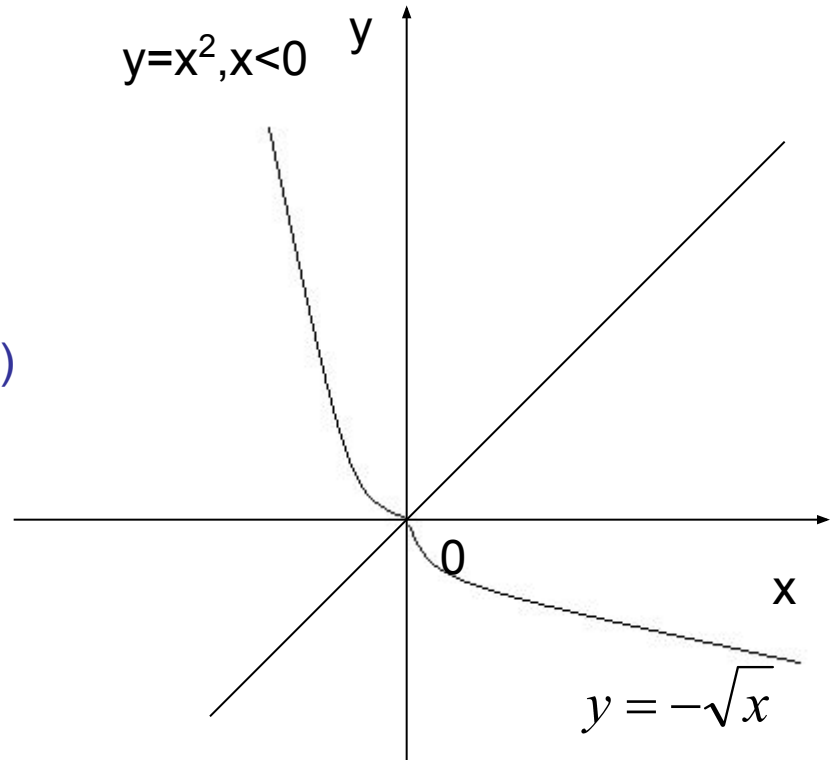
3. Если функция имеет обратную, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой  $y = x$ .





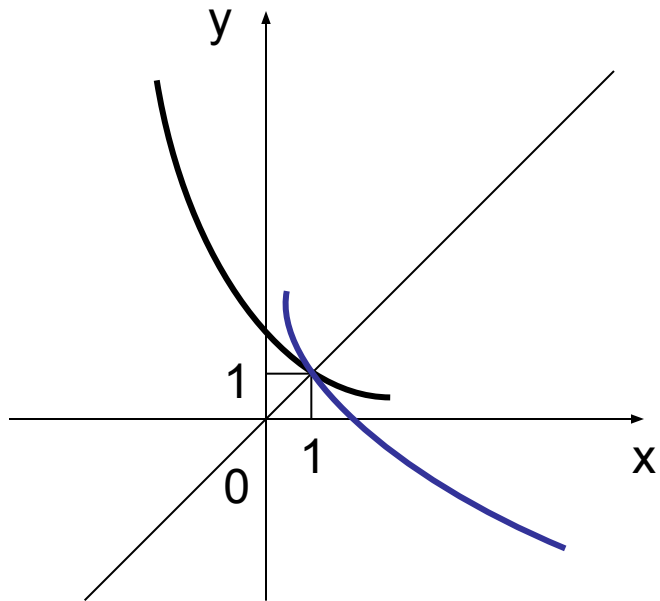


- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| 1. $D(f)=\mathbb{R}$ | 1. $D(g)=\mathbb{R}$ |
| 2. $E(f)=\mathbb{R}$ | 2. $E(g)=\mathbb{R}$ |
| 3. возрастающая      | 3. возрастающая      |



- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| 1. $D(y)=(-\infty; 0]$ | 1. $D(y)=[0; +\infty)$ |
| 2. $E(y)=[0; +\infty)$ | 2. $E(y)=(-\infty; 0]$ |
| 3. убывающая           | 3. убывающая           |

Построить график функции, обратной данной.



Дано:  $y = x^3$

Построить функцию,  
обратную к данной.

Решение:  $x^3 = y$

$$x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$$

