

11 класс. Алгебра и начала математического анализа.

**Тема урока:**  
**«Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла»**

Учитель математики  
Кутенкова Т.В.  
ГБОУ СОШ № 527  
Санкт-Петербург



# ЦЕЛИ УРОКА:

- **- обучающие:** повторить и обобщить типы задач на вычисление площадей фигур, в том числе фигур сложной геометрической конфигурации, классифицировать задачи, систематизировать способы решения, скорретировать знания, познакомиться с историей развития интегрального исчисления;
- **- развивающая:** научить мыслить и оперировать математическими знаниями, стимулировать мышление учащихся;
- **- воспитательная:** развивать у учащихся коммуникативные компетенции (умение работать в группе, культуру общения), способствовать развитию интеллектуальной деятельности учащихся.

# ПЛАН УРОКА

- I. Блиц – опрос. Повторение основных теоретических знаний
- II. Практическое применение знаний
- III. Защита домашних задач
- IV. Постановка проблемы (обобщение)
- V. Коррекция знаний по теме
- VI. Историческая справка
- VII. Подведение итогов
- VIII. Домашнее задание

# БЛИЦ - ОПРОС

1. В чем заключается **геометрический** смысл интеграла?
2. Какую фигуру называют **криволинейной трапецией**?
3. Как найти площадь криволинейной трапеции, если  $f(x) \leq 0$  на  $[a;b]$ ?

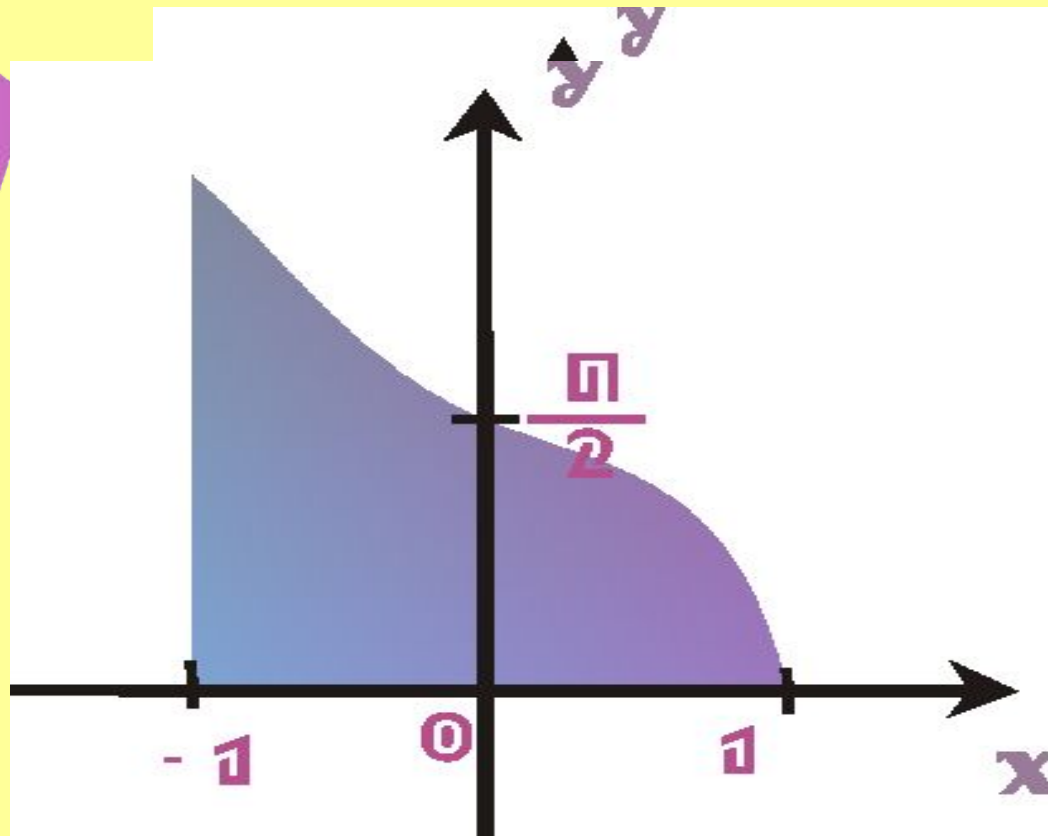
Интеграл от неотрицательной непрерывной функции  $f(x)$  на отрезке  $[a;b]$  равен площади криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, прямыми  $x=a$ ,  $x=b$ , и кривой  $y=f(x)$ .

$$S = -\int_a^b f(x) dx$$

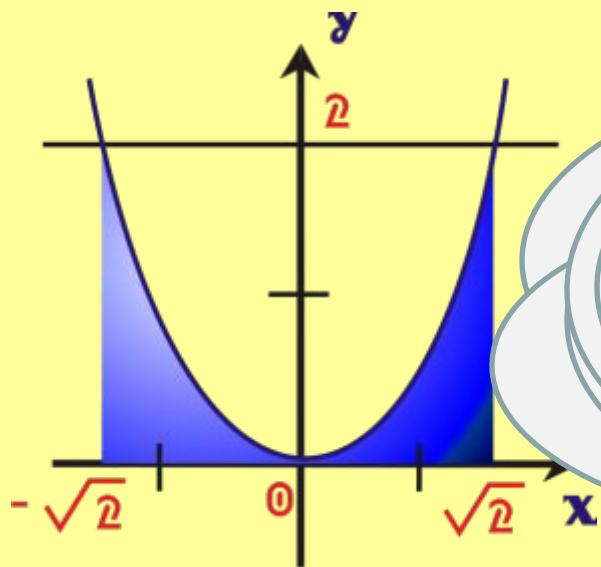
криволинейной трапецией, ограниченной осью абсцисс, прямыми  $x=a$ ,  $x=b$ , и непрерывной функцией  $f(x) \geq 0$  на  $[a;b]$ .

# ЗАДАЙТЕ АНАЛИТИЧЕСКИ ФИГУРУ

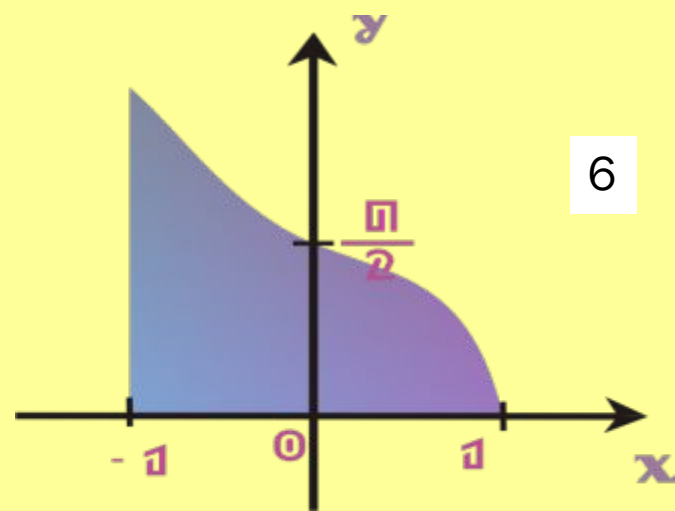
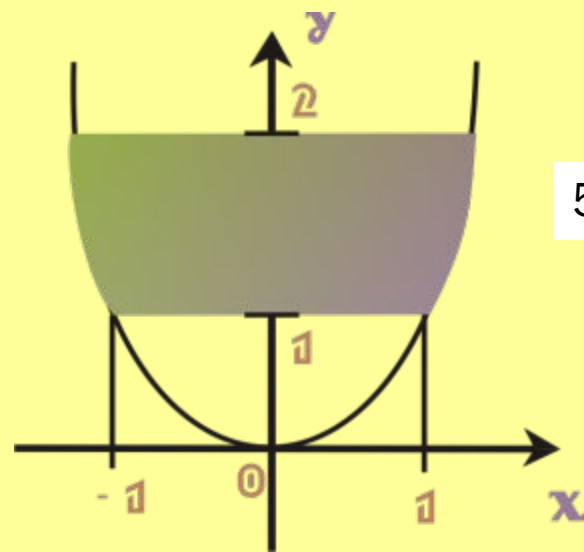
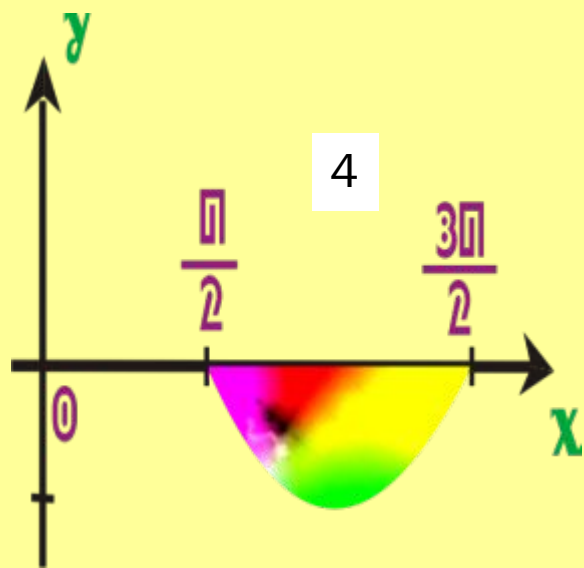
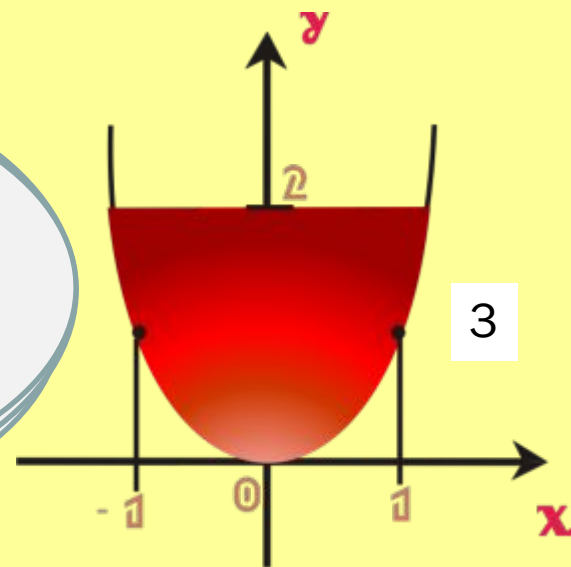
6



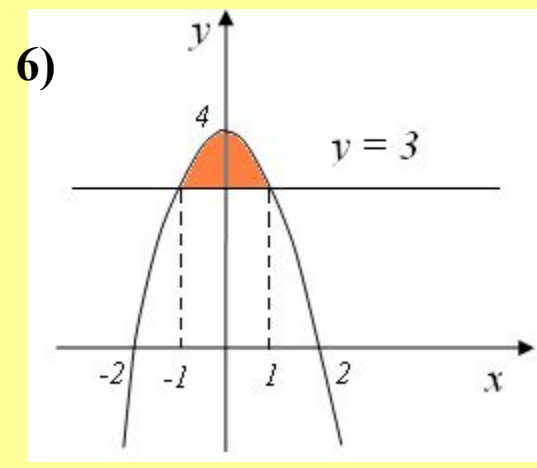
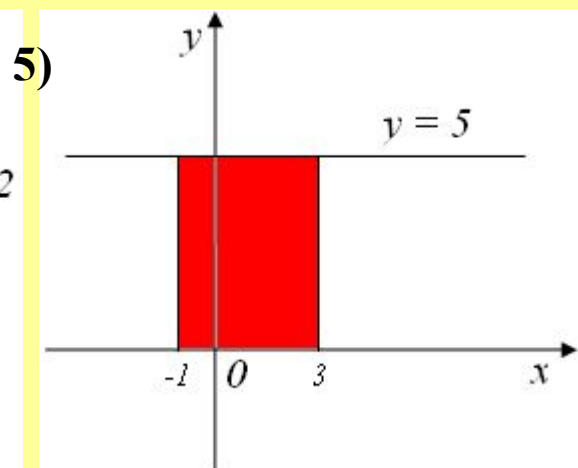
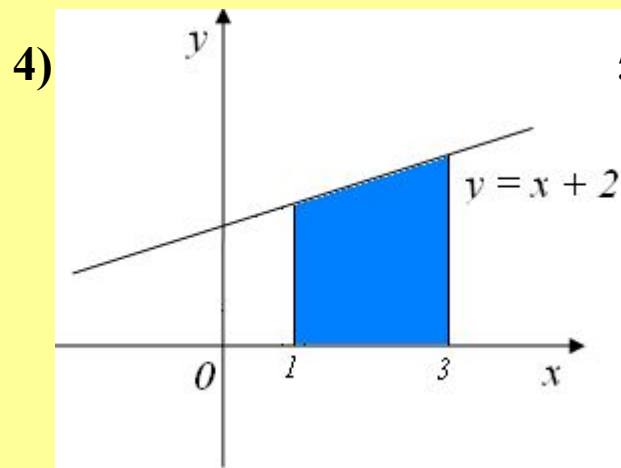
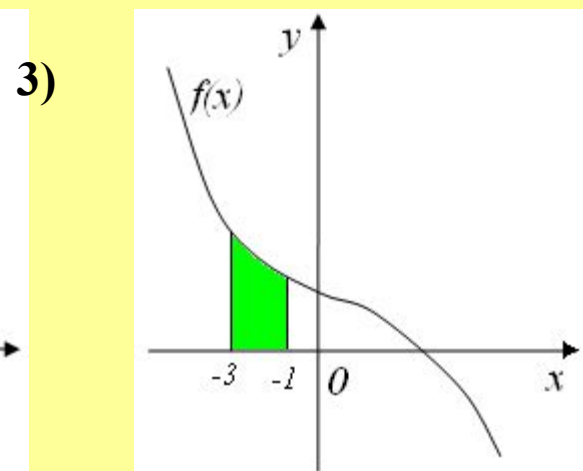
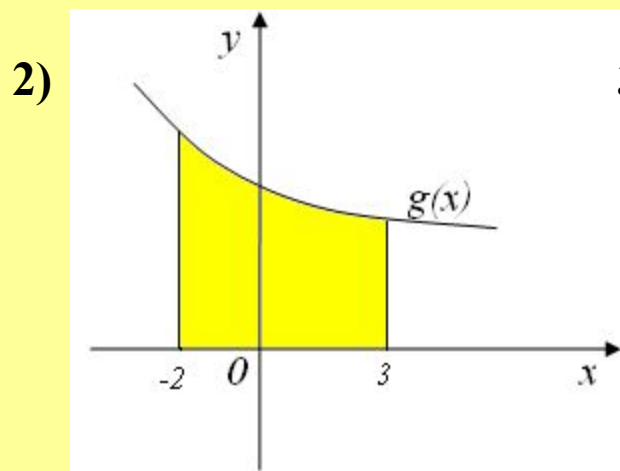
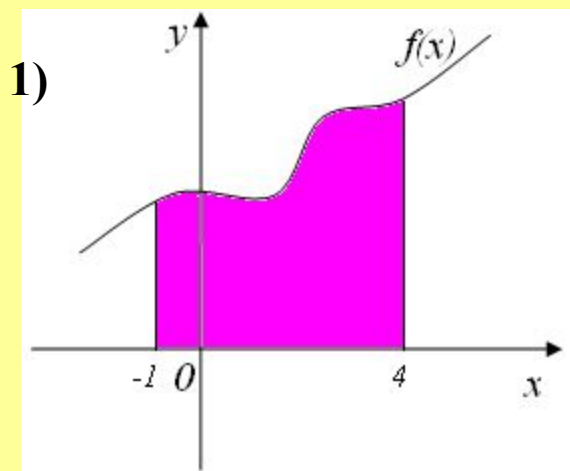
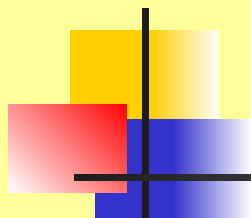
$$y = \arccos x, \quad x \in [-1, 1], \quad y \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$$



Вычислите площади фигур  
 I гр. на рис. 2  
 II гр. на рис 3  
 III гр. на рис 5  
 дий?



# Выразите с помощью интеграла площади фигур, изображенных на рисунках:



## Вычислите интегралы:

1).  $\int_2^5 x dx$

**10,5**

2).  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

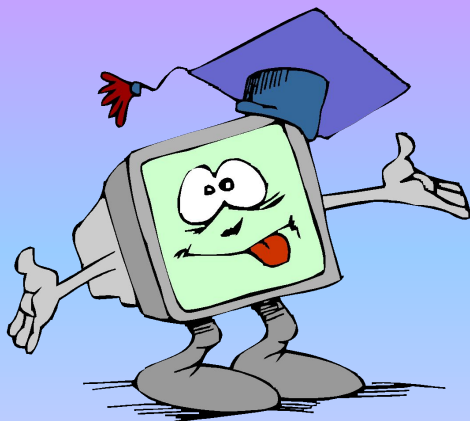
**1**

3).  $\int_0^4 x^3 dx$

**64**

4).  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\cos^2 x} dx$

**1**





## ЗАЩИТА ДОМАШНИХ ЗАДАЧ

- × **Задание I группы.** Вычислить площадь фигуры, расположенной между линиями  
 $y = x^2 - 2x$ ,  $y = 4 - x^2$ .
- × **Задание II группы.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  
 $y = x^2 / 2$ ,  $y = 2x$ .
- × **Задание III группы.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной синусоидой, косинусоидой на отрезке  $[\pi/4; 5\pi/4]$ .

# ЗАДАЧА I ГРУППЫ

График функции  $y=x^2-2x$  – парабола

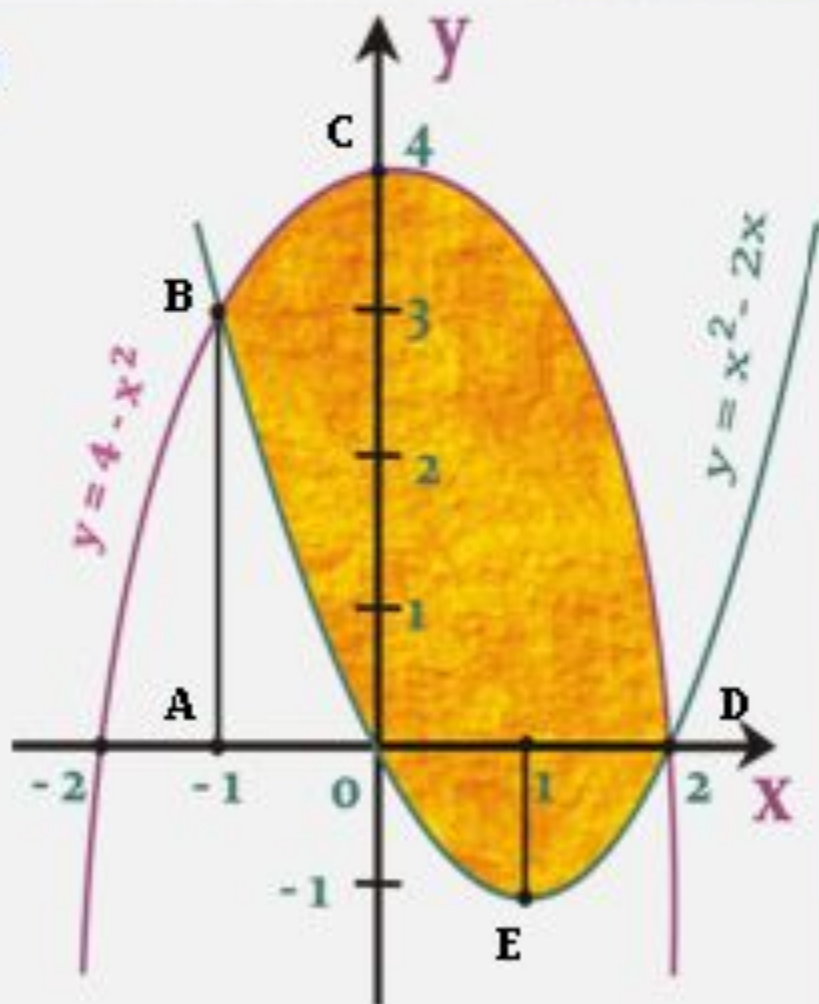
X	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3

График функции  $y=4-x^2$  – парабола

x	-2	-1	0	1	2
y	0	3	4	3	0

Точки пересечения **B(-1;3)**, **D(2;0)**

**$S_{\text{ф}} = S_{\text{ABCD}} - S_{\text{ABO}} + S_{\text{OED}}$**   
Вычислим площадь каждой фигуры.



$$S_{ABCD} = \int_{-1}^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-1}^2 = 9$$

$$S_{ABO} = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right) \Big|_{-1}^0 = 1\frac{1}{3}$$

$$S_{ODE} = -\int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^2 = 1\frac{1}{3}$$

$$S_{\phi} = 9 - 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = 9(\text{кв.ед.})$$

# ЗАДАЧА II ГРУППЫ

График функции  $y=x^2$  - парабола

<b>X</b>	<b>±2</b>	<b>±1</b>	<b>0</b>
у	4	1	0

График функции  $y=\frac{1}{2}x^2$  - парабола

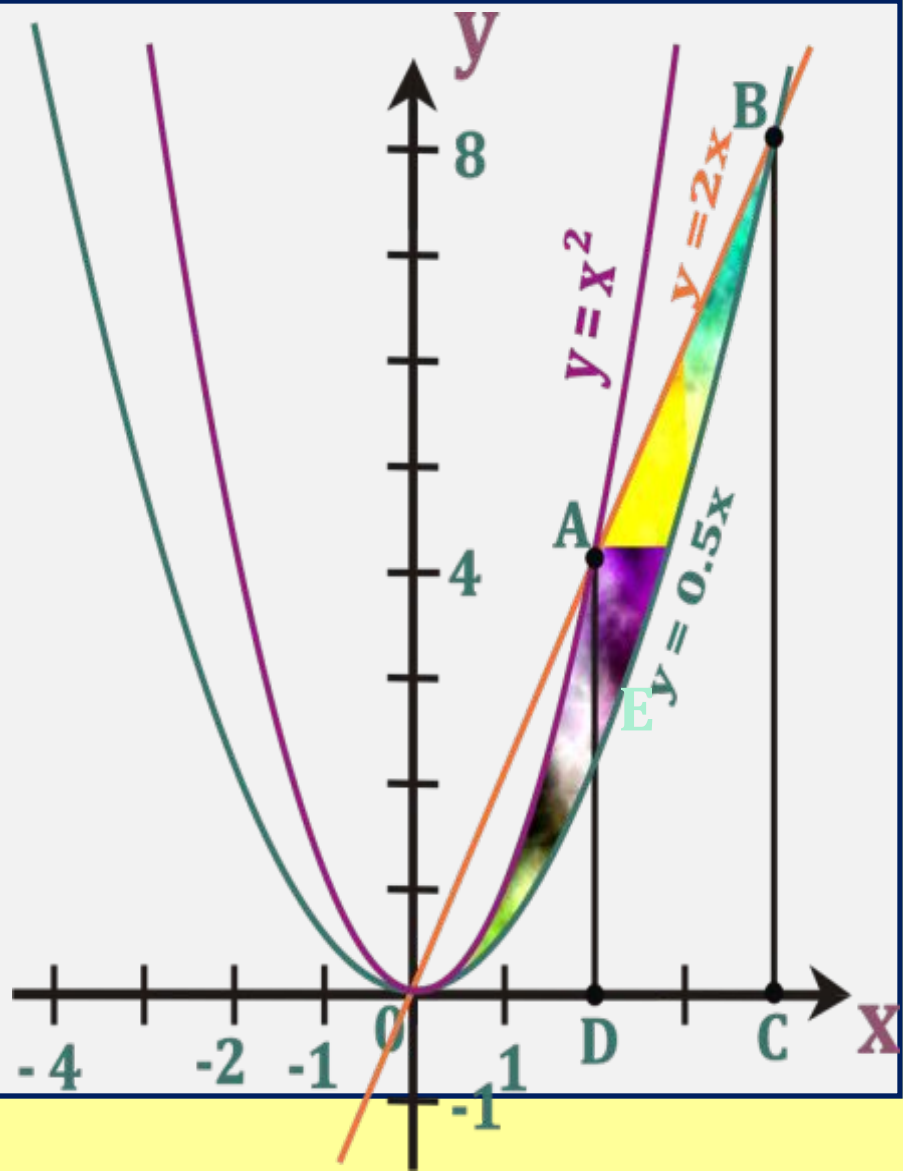
<b>X</b>	<b>±4</b>	<b>±2</b>	<b>±1</b>	<b>0</b>
у	8	2	0,5	0

$Y=2x$

<b>x</b>	<b>0</b>	<b>4</b>
у	0	8

$$S_{\phi} = S_{OAE} + S_{EAB} =$$

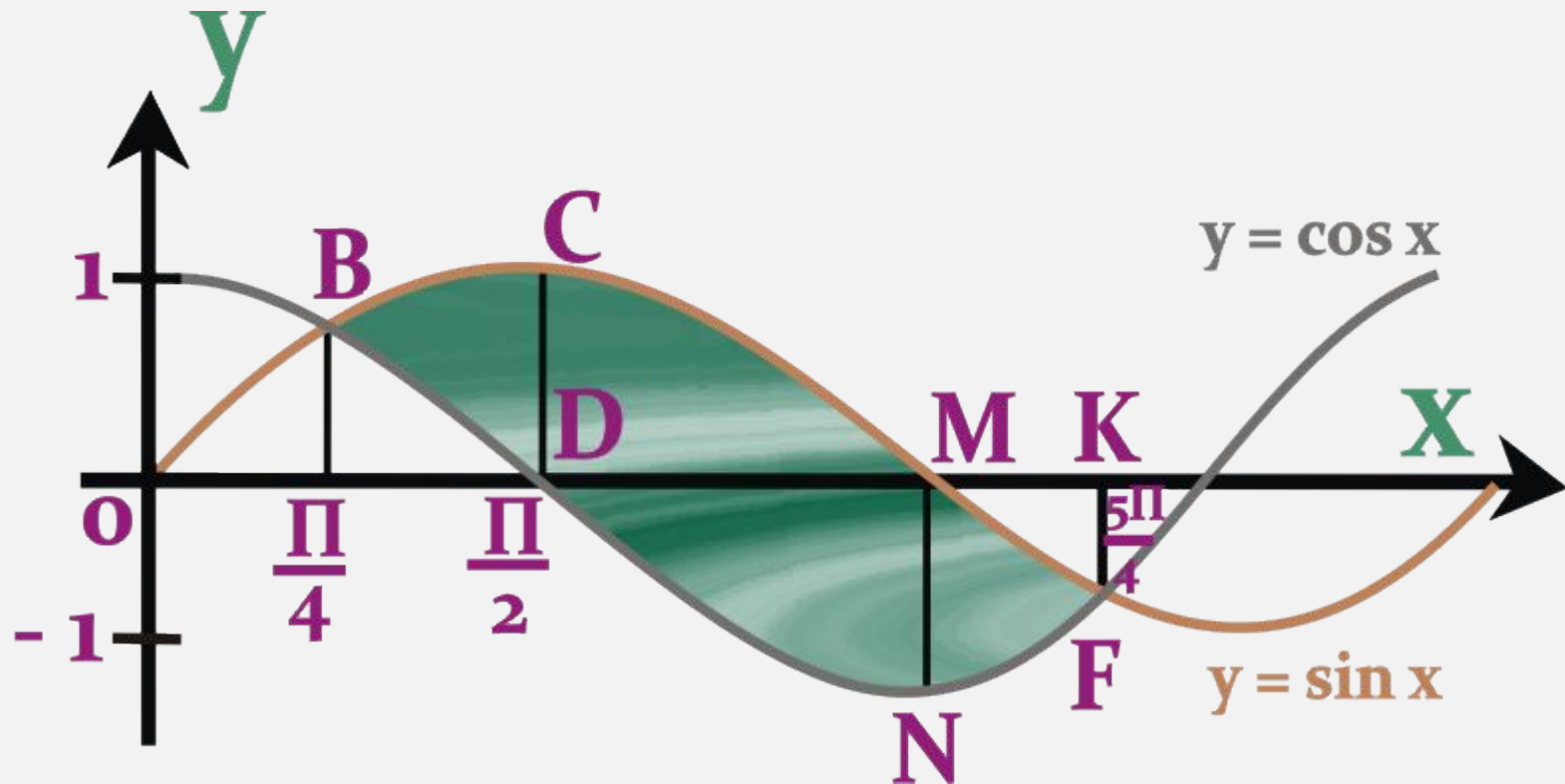
$$(S_{OAD} - S_{OED}) + (S_{ДАВС} - S_{ДЕВС})$$



Выполним вычисления, применив  
свойство  
аддитивности интеграла

$$\begin{aligned} S_{\phi} &= \int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 dx + \frac{1}{2} (4 + 8)2 - \\ &- \int_2^4 \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{2} \left( \int_0^2 x^2 dx - \int_2^4 x^2 dx \right) + 12 = \\ &= \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 - \frac{x^3}{6} \Big|_2^4 + 12 = 10 \frac{2}{3} \text{ (кв.ед.)} \end{aligned}$$

# ЗАДАЧА III ГРУППЫ



$$\begin{aligned}
 S_{\phi} &= S_{BCD} + S_{DCM} + S_{DMN} + S_{MNF} = \\
 &= S_{ABCD} - S_{ABD} + S_{DCM} + S_{DMN} + S_{MNFK} - S_{MKF}
 \end{aligned}$$

# Выполним вычисления, применив свойство аддитивности интеграла

$$S_{\phi} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx -$$

$$- \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx - \int_{\pi}^{5\pi/4} \cos x dx + \int_{\pi}^{5\pi/4} \sin x dx =$$

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx = -(\cos x + \sin x) \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}$$

# ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ (ОБОБЩЕНИЕ)

**Проблема: Как с помощью интеграла вычислить площадь фигуры, не являющейся криволинейной трапецией?**

Решение проблемы

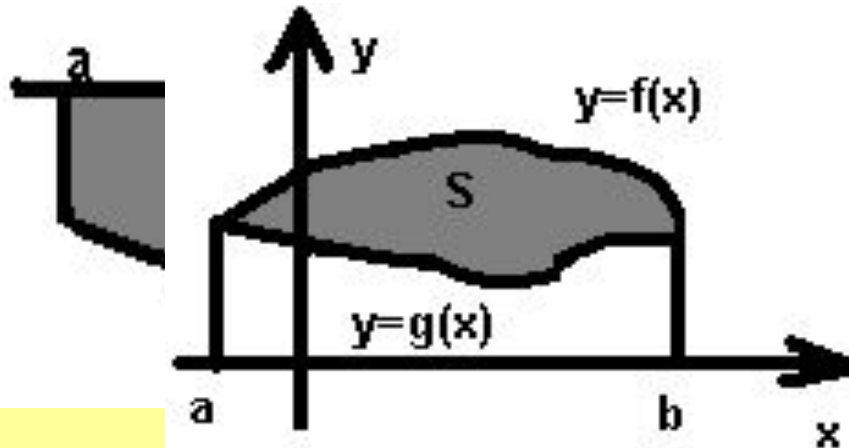
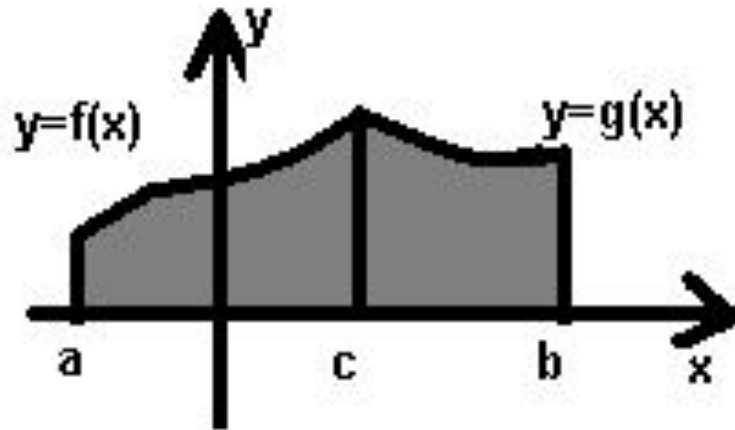


**Задачи на вычисление площадей фигур с помощью интеграла можно классифицировать по виду геометрических фигур, площади которых необходимо вычислить**

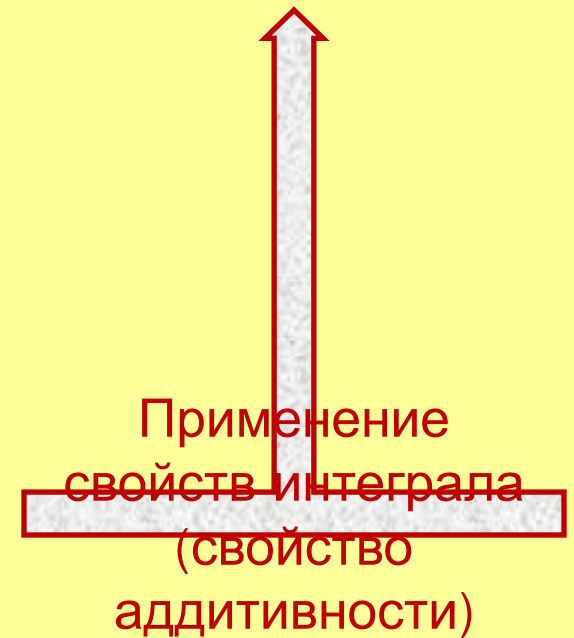
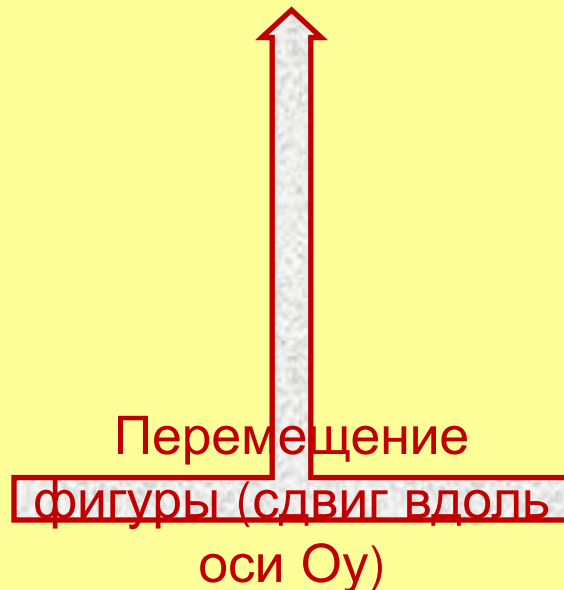


# КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ

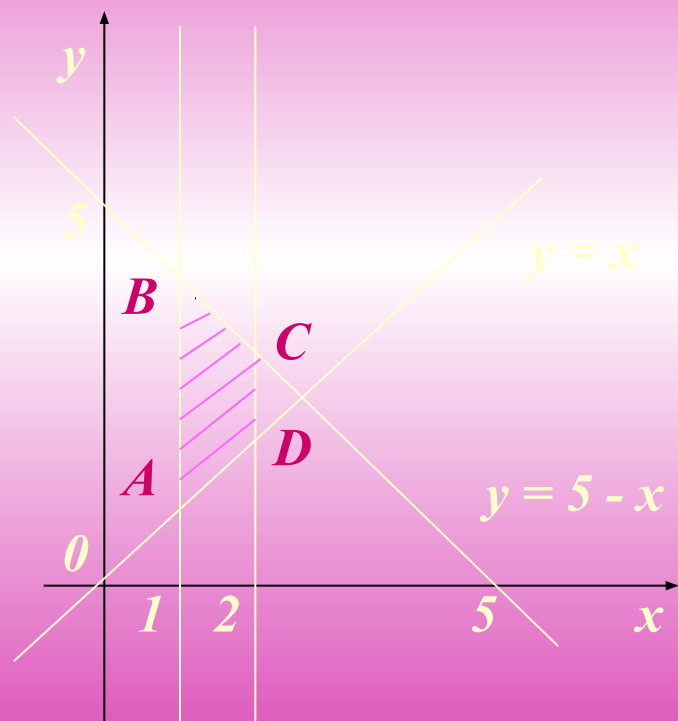
- Фигура, полученная отсечением от криволинейной трапеции
- Фигура, ограниченная функцией  $f(x) \leq 0$
- Фигура, ограниченная функциями  $y=f(x)$  и  $y=g(x)$  на отрезке  $x=a, x=b$
- Фигура, ограниченная функциями, заданными на различных промежутках



# ЧТО ПОМОЖЕТ УПРОСТИТЬ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР?



Пример. Вычислите площадь фигуры,  
ограниченной линиями  
 $y = x$ ,  $y = 5 - x$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ .



$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \int_1^2 ((5 - x) - x) dx = \\ &= \int_1^2 (5 - 2x) dx = (5x - x^2) \Big|_1^2 = \\ &= (5 \cdot 2 - 2^2) - (5 \cdot 1 - 1^2) = 2 \end{aligned}$$

Ответ : 2

# Немного истории

«Интеграл» придумал **Якоб Бернулли** (1690г.)

«восстанавливать» от латинского *integro*  
«целый» от латинского *integer*



«Примитивная функция»,

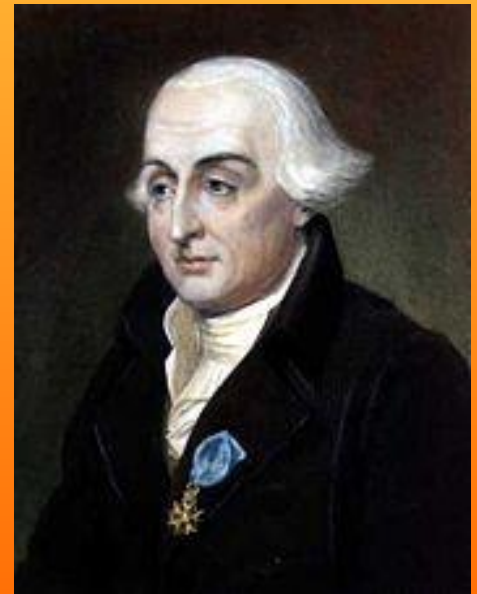
от латинского

*primitivus* – начальный,

ввел

**Жозеф Луи Лагранж**

(1797г.)



# Интеграл в древности

Первым известным методом для расчёта интегралов является метод исчерпания Евдокса (примерно 370 до н. э.), который пытался найти площади и объёмы, разрывая их на бесконечное множество частей, для которых площадь или объём уже известен.



Архимед



Евдокс Книдский

Этот метод был подхвачен и развит Архимедом, и использовался для расчёта площадей парабол и приближенного расчёта площади круга.

# Исаак Ньютон

## (1643-1727)



Наиболее полное изложение  
дифференциального и  
интегрального исчислений  
содержится в  
**«Методе флюксий...»**  
(1670–1671, опубликовано в 1736).

Переменные величины - **флюенты**  
(первообразная или  
неопределенный интеграл)

Скорость изменения флюент –  
**флюксии (производная)**

# Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646-1716)



$\int y dx$  - впервые использован  
Лейбницем в конце  
XVII века

Символ образовался из буквы  
S — сокращения слова  
*summa* (сумма)

# Определенный интеграл

И. НЬЮТОН

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$$

где  $F'(x) = f(x)$

Г. ЛЕЙБНИЦ

$$\int_b^a f(x)dx = \sum_{i \in [a,b]} f(x_i)dx_i$$

Формула Ньютона - Лейбница

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



- Таким образом, уже Архимед успешно находил площади фигур, несмотря на то, что в математике его времени не было понятия интеграла
- Но лишь интегральное исчисление дает общий метод решения всех подобных задач
- Недаром даже поэты воспевали интеграл

«Смысл - там, где змеи интеграла,  
Меж цифр и букв, меж  $d$  и  $f$ »  
В. Я. Брюсов

# ИТОГИ УРОКА

Что планировали

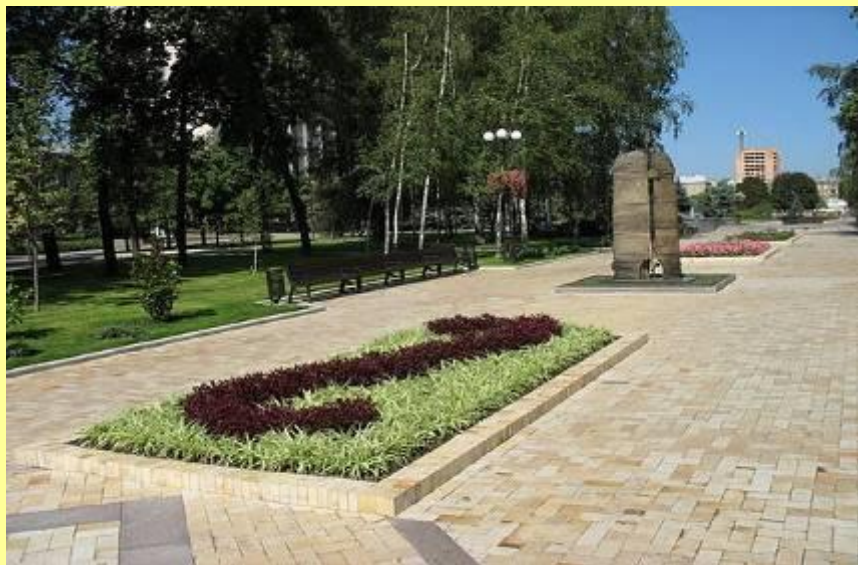
Обобщить знания по теме «Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла»

Что сделали

1. Классифицировали задачи
2. Систематизировали способы решения
3. Скорректировали знания
4. Совершили экскурс в историю
5. Подготовились к контрольной работе по данной теме.



## Символ интеграла в жизни



# ЛИСТ САМООЦЕНКИ

	<b>Навыки и умения</b>	<b>отметка</b>
1.	Построение графиков функций	
2.	Выделение площади искомой фигуры	
3.	Определение общих точек графиков функций и пределов интегрирования	
4.	Выражение площади искомой фигуры через площади криволинейных трапеций или других фигур	
5.	Применение свойств фигур для упрощения решения	



---

**СПАСИБО ЗА УРОК!**

**Домашнее задание:**

- 1. п.58;***
  - 2. № 1017, 1018***
-