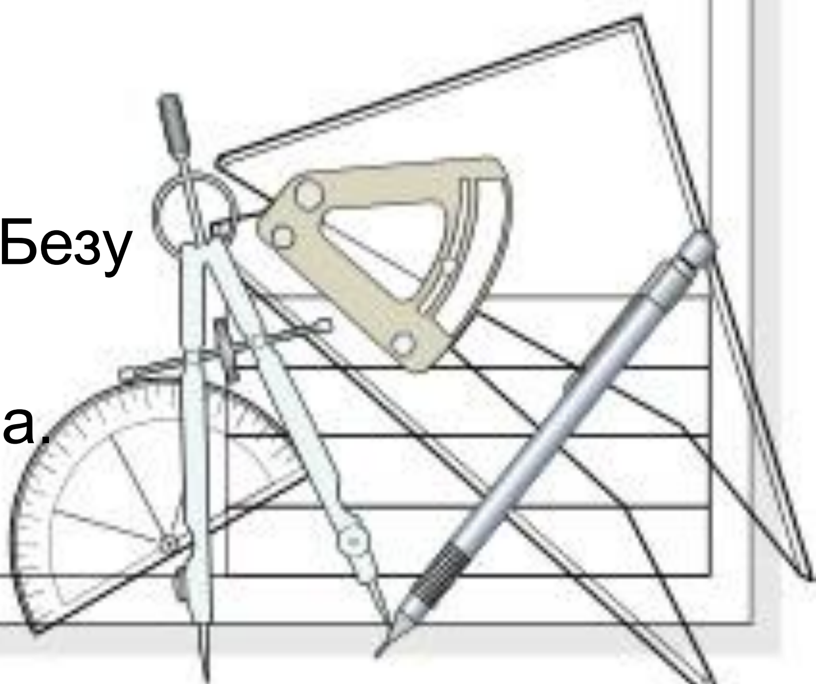
Многочлены.
Решение олимпиадных задач по теме «Многочлены»

Теория

1) Понятие многочлена. Многочлен n-ой степени.
2) Разложения многочлена на множители.
3) Схема Горнера
4) Умножения многочленов
5) Деление многочленов
6) Алгоритм Евклида
7) Основная теорема Алгебры.
8) Корни многочлена. Теорема Безу
9) Следствие из Теоремы Безу
10) Теорема о корнях многочлена.



Многочлен $ax + b$, где $a \neq 0$, a, b − числа, x − переменная, называется многочленом первой степени.

Многочлен ax^2+bx+c, где $a \neq 0$, a, b, c − числа, x − переменная, называется многочленом второй степени (квадратным трёхчленом, квадратичной функцией).

Многочлен ax^3+bx^2+cx+d, где $a \neq 0$, a, b, c, d − числа, x − переменная, называется многочленом третьей степени.

Многочлен: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, где $a_n \neq 0$, $a_k = 0,1,2,..,n$-числа, x-переменная, называется многочленом n-ной степени.

a_n-старший коэффициент, **a_0**-свободный член.

Действительное число a называется корнем многочлена $P_n(x)$, если $P_n(a) = 0$.

Число α-k-кратный корень многочлена $f(x)$, если $f(x)=(x-\alpha)^k\varphi(x)$, $\varphi(\alpha)\neq 0$.

Необходимые теоретические выдержки для разложения многочлена на множители.

Теорема. Любой многочлен степени n вида $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, представляется произведением постоянного множителя при старшей степени a_n и n линейных множителей $(x-x_i)$, i=1, 2, …, n, то есть $P_n(x)= a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1)$, причём x_i, i=1, 2, …, n являются корнями многочлена.

Схема Горнера.

Если $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, $g(x)=x-c$, то при делении *f(x)* на *g(x)* частное *q(x)* имеет вид $g(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}$, где $b_0=0$, $b_k=cb_{k-1}+a_k$, $k=1,2\ldots,n-1$. Остаток r находится по формуле $r=cb_{n-1}+a_n$

Умножение многочленов.
$P_n(x)Q_m(x)$

Пусть $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ два многочлена степени n и m сответственно.

$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$,

$Q_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0$,

Предположим, что $n\geq m$.

$P_n(x)Q_m(x)=(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0)(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0)=$
$a_nx^n(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0)+a_{n-1}x^{n-1}(b_mx^m+$
$+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0)+\ldots+a_0(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0)$.

Деление многочленов.

$$f(x) = 2x^5 + x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 10x - 2, \quad g(x) = x^3 - 2x + 7.$$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2x^5 & +x^4 & -5x^3 & +12x^2 & +10x & -2 & x^3 - 2x + 7 \\ \cline{7-7}
2x^5 & & -4x^3 & +14x^2 & & & 2x^2 + x - 1 = q(x) \\ \cline{1-4}
& x^4 & -x^3 & -2x^2 & +10x & -2 & \\
& x^4 & & -2x^2 & +7x & & \\ \cline{2-6}
& & -x^3 & & +3x & -2 & \\
& & -x^3 & & +2x & -7 & \\ \cline{3-6}
& & & & x & +5 = r(x) &
\end{array}$$

Делитель многочлена f(x) - многочлен g(x), такой, что f(x) = g(x)q(x)+r(x).

Историческая справка. Алгоритм Евклида.

Древнегреческие математики называли этот алгоритм «взаимное вычитание». Этот алгоритм не был открыт Евклидом, так как упоминание о нём имеется уже в Топике

Аристотеля. В «Началах Евклида» он описан дважды — в VII книге для нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел и в X книге для нахождения наибольшей общей меры

двух однородных величин. В обоих случаях дано геометрическое описание алгоритма, для нахождения «общей меры» двух отрезков.

Историками математики было выдвинуто предположение, что именно с помощью алгоритма Евклида (процедуры последовательного взаимного вычитания) в древнегреческой математике впервые было открыто существование несоизмеримых величин (стороны и диагонали квадрата, или стороны и диагонали правильного пятиугольника). Впрочем, это предположение не имеет достаточных документальных подтверждений.

Евклид

Аристотель

Алгоритм Евклида (алгоритм последовательного деления) нахождения наибольшего общего делителя многочленов f(x) и g(x)

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x),$$
$$g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x),$$
$$r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$r_{k-3}(x) = r_{k-2}(x)q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x),$$
$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x),$$
$$r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x).$$

Тогда $r_k(x)$- наибольший общий делитель f(x) и g(x).

Основная теорема алгебры.

Всякий многочлен степени n имеет по крайней мере один корень (комплексный или действительный).

Теорема Безу. Корни многочлена.

При делении P(x) на (x-α) в остатке может получится лишь некоторое число r (если r=0, то деление выполняется без остатка). Так как степень двучлена (x-α) равна 1, то степень остатка должна быть меньше 1. $P(x)= (x-\alpha)\, Q(x)+r \quad (1)$

Чтобы найти значение r, положим в тождестве (1) x= α. При этом двучлен x-α обращается в нуль, получаем, что $P(\alpha)=r$.

Следствие из теоремы Безу.
Если число α является корнем многочлена P(x), то этот многочлен делится на x-α без остатка.

По теореме Безу остаток от деления P(x) на x-α равен P(α), а по условию P(α)=0. Отсюда видно, что задача решения уравнения P(x)=0 равносильна задаче выделения делителей многочлена P, имеющих первую степень (линейных делителей).

Если многочлен P(x) имеет попарно различные корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то он делится без остатка на произведение $(x- \alpha_1)\ldots(x- \alpha_n)$

Проведём доказательство с помощью математической индукции по числу корней. При n=1 утверждение доказано в следствии из Теоремы Безу. Пусть оно уже доказано для случая, когда число корней равно k, и пусть P(x) имеет k+1 попарно различных корней: α1, α2,…, αk, αk+1. По предположению индукции многочлен делится на произведении (x- α1)…(x- αk): P(x)=(x- α1)…(x- αk)Q(x). При этом αk+1 - корень многочлена P(x), т.е. P(αk+1) =0. Значит, подставляя αk+1 вместо x, получаем верное равенство. P(αk+1)= (αk+1 –α1)…(αk+1 –αk)Q(αk+1)=0. Но αk+1 по условию отлично от чисел α1,…, αk, и => ни одно из чисел αk+1 –α1,…, αk+1 –αk ≠0. Значит Q(αk+1)=0, т.е. αk+1 – корень многочлена Q(x). По следствию из Теоремы Безу Q(x) делится на x-αk+1 без остатка, Q(x)= (x- αk+1) Q1(x), и поэтому P(x)= (x- α1)…(x- αk) Q(x)= (x- α1)…(x- αk)(x-αk+1) Q1(x). Это и значит, что P(x)делится на (x- α1)…(x- αk+1). Итак, доказано, что теорема верна при k=1, а из ее справедливости при n=k вытекает, что она верна и при n=k+1. теорема верна при любом случае корней.

Задачи

1) Задача №1 (на нахождение корней)
2) Задача №2
3) Задача №3 (нахождение корней 3хчлена)
4) Задача №4
5) Задача №5 (нахождение параметра)
6) Задача №6
7) Задача №7
8) Задача №8(нахождение неизвестных по условию на корни и одно из неизвестных)

Найдите какие-нибудь четыре попарно различных натуральных числа a, b, c, d, для которых числа $a^2+2cd+b^2$ и $c^2+2ab+d^2$ являются полными квадратами.

Предположим, что $ab=cd$. Тогда $a^2+2cd+b^2=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $c^2+2ab+d^2=c^2+2cd+d^2=(c+d)^2$. Таким образом, достаточно найти четыре различных натуральных числа a, b, c и d, для которых $ab=cd$. Для этого найдем число n, разлагающееся в произведение двух множителей различными способами. Например, таким числом является $n=6$; в этом случае можно взять $a=1$, $b=6$, $c=2$, $d=3$.

Ответ: 1,2,3,6

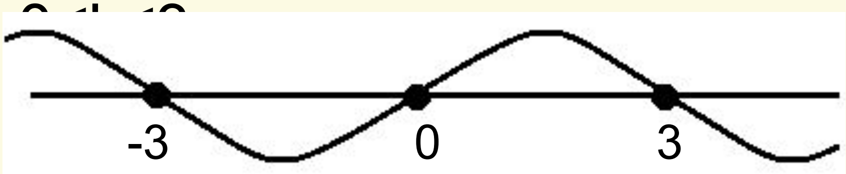
Найти все целые неотрицательные значения n и k, удовлетворяющие уравнению $5n^4+k^5=81k$

$5n^4+k^5=81k$, $n \in Z$, $k \in Z$, $k \geq 0$, $n \geq 0$.*

$5n^4=81k-k^5$

$5n^4= k(3-k)(3+k)(9+k^2)$

Т.к $5n^4 \geq 0$, то $k(3-k)(3+k)(9+k^2) \geq 0$



$0 \leq k \leq 3$

Если $k=0$, $5n^4=0$, $n=0$.

Если $k=1$, $5n^4=80$, $n^4=16$, $n=2$; $n=-2$(не удовл. условию*)

Если $k=2$, $5n^4=162-32$, $5n^4=130$, $n^4=26$ ø

Если $k=3$, $5n^4=0$, $n=0$. Ответ:$k=0,n=0;k=1,n=2;k=3,n=3$.

Квадратный трёхчлен $f(x)=x^2+px=q$ имеет 2 различных целых корня. Один из корней трёхчлена и его значение при $x=11$ являются простыми числами. Найти корни трёхчлена.

Пусть x_1 и x_2- корни многочлена, $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)$

а) пусть $x_1=2$-простой корень

$f(11)=(11-x_1)(11-x_2)$-простой по условию(противоречие)

$f(11)= g(11-x_2)$ - составное

б) пусть x1-нечётное

$f(11)=(11-x_1)(11-x_2)$-простое, $(11-x_1)(11-x_2)=2$

$$\begin{cases} 11-x_1=1 \\ 11-x_2=2 \end{cases} \quad \begin{cases} 11-x_1=-1 \\ 11-x_2=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} 11-x_1=2 \\ 11-x_2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 11-x_1=-2 \\ 11-x_2=-1 \end{cases}$$

$$x_1=10 \quad x_1=12 \quad x_1=9 \quad x_1=13$$

$$x_2=9 \quad x_2=13 \quad x_2=10 \quad x_2=12$$

$\boxed{\text{Ответ: } x_1=13, x_2=12.}$

Найдите целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению $x^4-2y^2=1$.

Знаки *x* и *y* можно выбирать произвольно, поэтому будем искать только неотрицательные решения. Ясно, что *x* - нечётное число, $x=2t+1$. Перепишем уравнение в виде $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)=2t(2t+2)(4t^2+4t+2)=2y^2$.

Теперь видно, что *y* - чётное число, $y=2u$. Получаем уравнение на неотрицательные *t*, *u*:

2) $t(t+1)(2t(t+1)+1)=u^2$.

Числа t, $t+1$ и $2t(t+1)+1$ попарно взаимно просты, а их произведение - полный квадрат. Значит, каждое из них также является полным квадратом. Это возможно только при $t=0$ (единственная пара последовательных полных квадратов - это 0 и 1). Тогда и $u=0$. Значит, $x=\pm1$, $y=0$.

$\boxed{\text{Ответ: } x=1,\ y=0 \text{ или } x=-1,\ y=0.}$

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых все корни уравнения $3ax^2(3a^3 -12a^{2-}1)x- a(a- 4)= 0$ удовлетворяют неравенству х |х|≤1.

1) Пусть 3а = 0, т.е. а = 0, тогда получаем линейное уравнение –х= 0, которое имеет единственный корень х = 0, причем 0є[-1;1]. Значение а = 0 удовлетворяет условию задачи.

2)При а≠0 получаем квадратное уравнение, дискриминант которого равен

$D=(3a^3-12a^2-1)^2+ 12a^2(a- 4)=(3t-1)^2-12t=(3t-1)^2$, где $t= a^3- 4a^2$.

а)Тогда найдём корни

$$x=\frac{-(3t-1)-(3t+1)}{6a} = \frac{-t}{a} = 4a-a^2,$$

$$x=\frac{-(3t-1)-(3t+1)}{6a} = \frac{-t}{a} = \frac{1}{3a}$$

б)Теперь поставим условия для корней

$$\begin{cases} -1\le 4a-a^2\le 1 \\ -1\le \dfrac{1}{3a} \le 1 \end{cases}$$

Решим систему

Ответ{0} $\cup$ [2+√3;2+√5]

Существуют ли рациональные числа x, y, u, v, которые удовлетворяют уравнению $(x+y\sqrt{2})^6+(u-v\sqrt{2})^6=7+5\sqrt{2}$?

$(x+y\sqrt{2})^6=x^6+6x^5(y\sqrt{2})+15x^4(y\sqrt{2})^2+20x^3(y\sqrt{2})^3+15x^2(y\sqrt{2})^4$
$+6x(y\sqrt{2})^5+(y\sqrt{2})^6=A+B\sqrt{2}$.
$(u-v\sqrt{2})^6=u^6-6u^5(v\sqrt{2})+15u^4(v\sqrt{2})^2-20u^3(v\sqrt{2})^3+15u^2(v\sqrt{2})^4-$
$6u(v\sqrt{2})^5+(v\sqrt{2})^6=A-B\sqrt{2}$, то выполняется
$(x-y\sqrt{2})^6+(u-v\sqrt{2})^6= 7-5\sqrt{2}$

Но $7-5\sqrt{2}<0$, а левая часть положительна. Противоречие. Следовательно, исходного равенства быть не может.

Ответ: таких чисел нет.

При каких целых n число $n^2 - 7n + 10$ простое?

Разложим многочлен $x^2 - 7x + 10$ на множители: $x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$. Отсюда при любом целом n число $n^2 - 7n + 10$ делится на $n - 5$ и на $n - 2$. Оно может быть простым только в том случае, если одно из чисел $n - 5$ и $n - 2$ равно 1 или -1, а другое – простое:

если $n - 5 = 1$, то $n = 6$, $n - 2 = 4$, $n^2 - 7n + 10 = 4$ – составное;

если $n - 5 = -1$, то $n = 4$, $n - 2 = 2$, $n^2 - 7n + 10 = -2$ – простое;

если $n - 2 = 1$, то $n = 3$, $n - 5 = -2$, $n^2 - 7n + 10 = -2$ – простое;

если $n - 2 = -1$, то $n = 1$, $n - 5 = -4$, $n^2 - 7n + 10 = 4$ – составное.

Ответ: при $n = 3$ и $n = 4$.

*Даны три уравнения с действительными коэффициентами. **1) $x^2-(a+b)x+8=0$; 2) $x^2-x(b+1)+c=0$; 3) $x^4-b(b+1)x^2+c=0$.** Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Корни 1го уравнения больше единицы. Также, корни 1го уравнения являются корнями 3го и хотя бы один корень 1го уравнения удовлетворяет 2ому уравнению. Найти числа a,b,c, если известно, что b>3.*

Обозначим корни первого уравнения x_1 и x_2. Причем пусть за x_1 обозначен тот, который является корнем уравнения 2.
Заметим, что если x_1 является корнем уравнения 3, то и $-x_1$ является корнем уравнения 3. $-x_1$ не может равняться x_2, поскольку и x_1, и x_2 положительны. Значит, у уравнения 3 мы нашли уже 4 корня: x_1, $-x_1$, x_2 и $-x_2$. У многочлена 4 степени больше корней и не может быть.
Заметим, что x_1 - корень уравнения 2. А значит, он является квадратом двух из корней уравнения 3. Поэтому $x_1=x_1^2$ либо $x_1=x_2^2$. Из первого уравнения следует, что $x_1=0$ или 1. Но этого быть не может, т.к. x_1 больше 1. Значит, $x_1=x_2^2$.

Из теоремы Виета для первого уравнения следует, что $x_1x_2=8$. Поэтому $x_2^3=8$. Откуда получаем, что $x_1=4$; $x_2=2$.

Отсюда понятно, что a+b=6.
Корни уравнения 3 - это ±2 и ±4. Поэтому корни уравнения 2 это 4 и 16. Поэтому c=64; а b(b+1)=20. Получаем b=4 или b=-5 (не подходит, так как b>3).

Ответ: a=2;b=4;c=64.