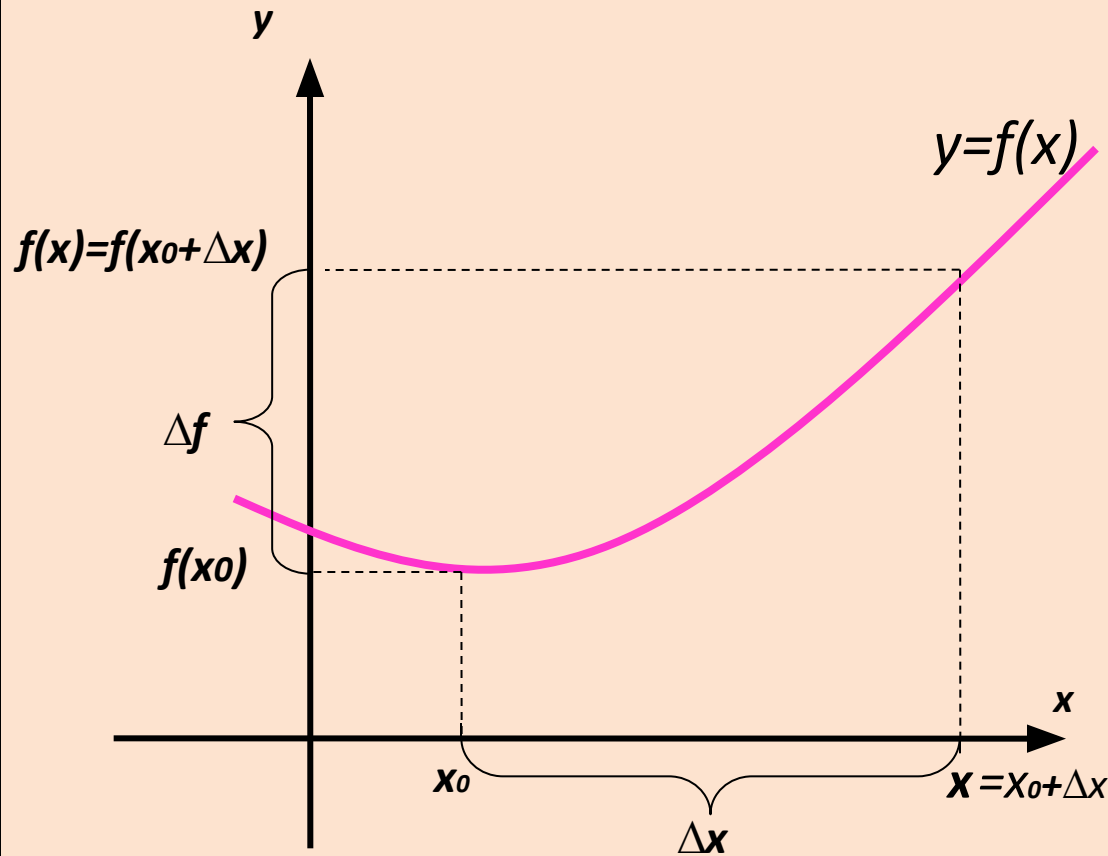


# ***ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ***

## ***1. Задачи, приводящие к понятию производной***

Составила учитель математики  
МОУ «Гимназия им. Горького А.М.»:  
Фабер Г.Н.

# Приращение функции и приращение аргумента



приращение аргумента:

$$\Delta x = x - x_0 \quad (1)$$

Приращение функции :

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad (2)$$

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \quad (3)$$

Т.е. Дана функция  $f(x)$  и

изменится на величину  $\Delta f$ .  
Расстояние между точками  $f(x_0)$  и  $f(x_0 + \Delta x)$  на графике функции  $y=f(x)$  называется приращением функции и обозначается  $\Delta f$ .  
Расстояние между точками  $x_0$  и  $x_0 + \Delta x$  на графике функции  $y=f(x)$  называется приращением аргумента и равно разности между  $x$  и  $x_0$ :

# Задача 1 (о скорости движения).

- По прямой, на которой заданы начало отсчета, единица измерения (метр) и направление, движется некоторое тело (материальная точка).
- Закон движения задан формулой  $s=s(t)$ , где  $t$  — время (в секундах),  $s(t)$  — положение тела на прямой (координата движущейся материальной точки) в момент времени  $t$  по отношению к началу отсчета (в метрах).
- Найти скорость движения тела в момент времени  $t$  (в м/с).



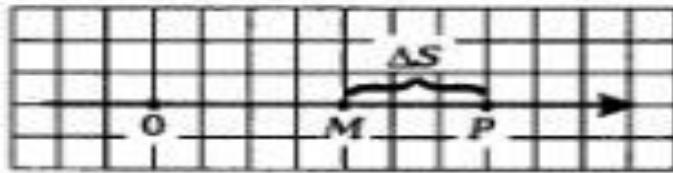


Рис. 114

Предположим, что в момент времени  $t$  тело находилось в точке  $M$  пройдя путь от начала движения  $OM = s(t)$ . Дадим аргументу  $t$  приращение  $\Delta t$  и рассмотрим момент времени  $t + \Delta t$ . Координата материальной точки стала другой, тело в этот момент будет находиться в точке  $P$ :  $OP = s(t + \Delta t)$ . Значит, за  $\Delta t$  секунд тело переместилось из точки  $M$  в точку  $P$ , т.е. прошло путь  $MP$ . Имеем:

$$MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$$

Полученную разность мы назвали в § 26 приращением функции. Путь  $\Delta s$  тело прошло за  $\Delta t$  секунд.

Нетрудно найти среднюю скорость движения тела за промежуток времени  $[t; t + \Delta t]$ :

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

А что такое скорость  $v(t)$  в момент времени  $t$  (ее называют иногда мгновенной скоростью)? Можно сказать так: это средняя скорость движения

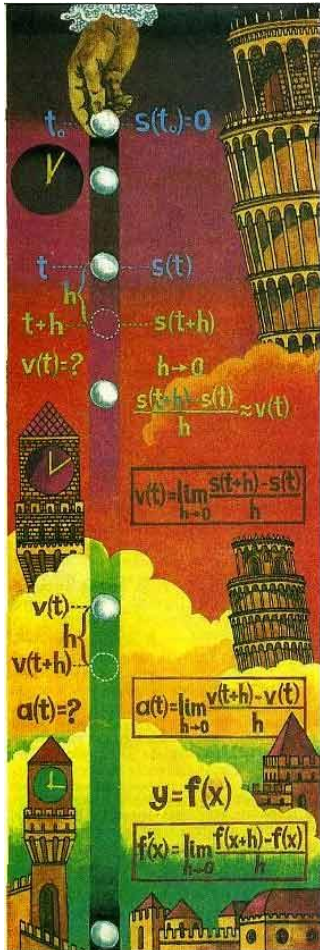
за промежуток времени  $[t; t + \Delta t]$  при условии, что  $\Delta t$  выбирается все меньше и

меньше; точнее (иными словами, при условии, что  $\Delta t \rightarrow 0$ ). Это значит, что

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Подводя итог решению задачи 1 получаем:

# Задача 2



Поднимем камешек и затем из состояния покоя отпустим его. Движение свободно падающего тела явно неравномерное. Скорость  $v$  постепенно возрастает. Но как именно выглядит зависимость  $v(t)$  ?

Фиксируем момент  $t$ , в который мы хотим знать значение скорости  $v(t)$ . Пусть  $h$  – небольшой промежуток времени, прошедший от момента  $t$ . За это время падающее тело пройдёт путь, равный  $s(t+h)-s(t)$ .

Если промежуток времени  $h$  очень мал, то приближённо  $s(t+h)-s(t) \approx v(t) \cdot h$ , или  $\frac{s(t+h) - s(t)}{h} \approx v(t)$ , причём

последнее приближённое равенство тем точнее, чем меньше  $h$ .

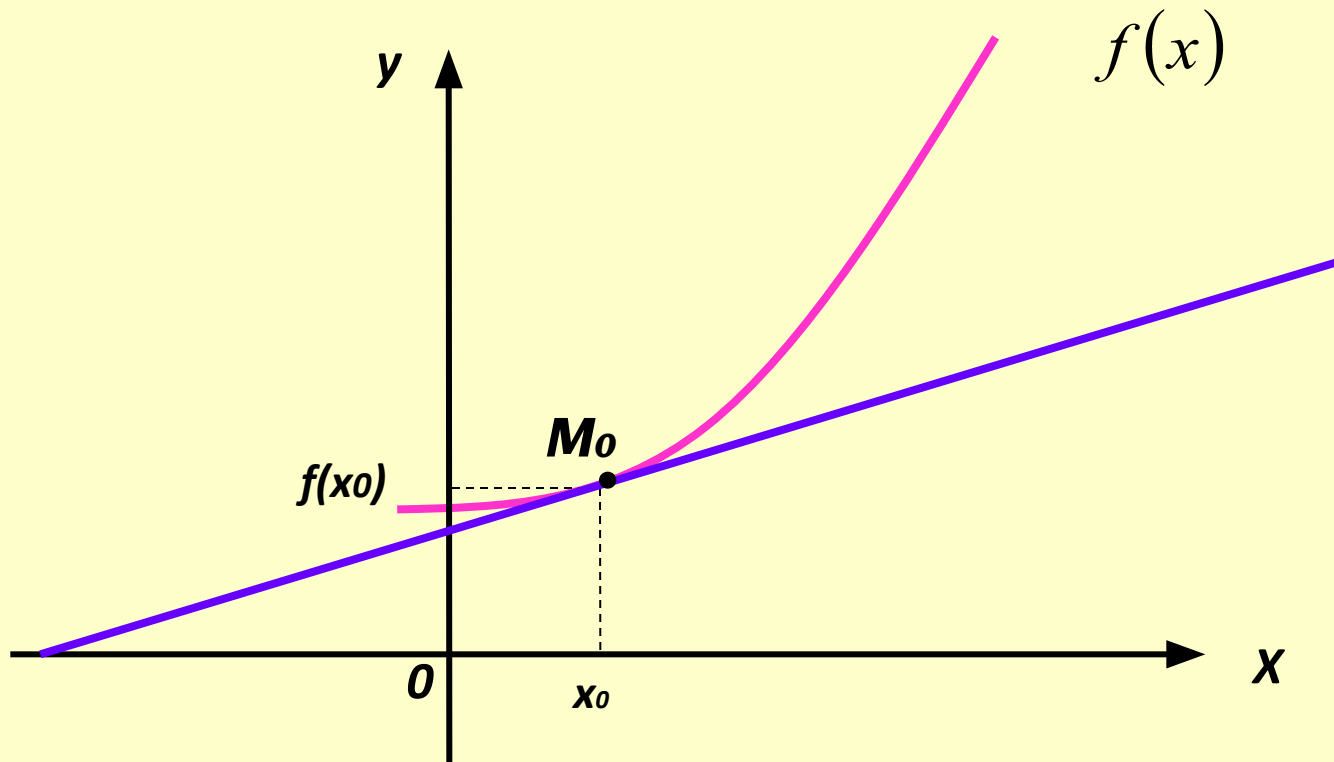
Значит величину  $v(t)$  скорости в момент  $t$  можно рассматривать как *предел*, к которому стремится отношение, выражающее среднюю скорость на интервале времени от момента  $t$  до момента  $t+h$ .

Сказанное записывают в виде

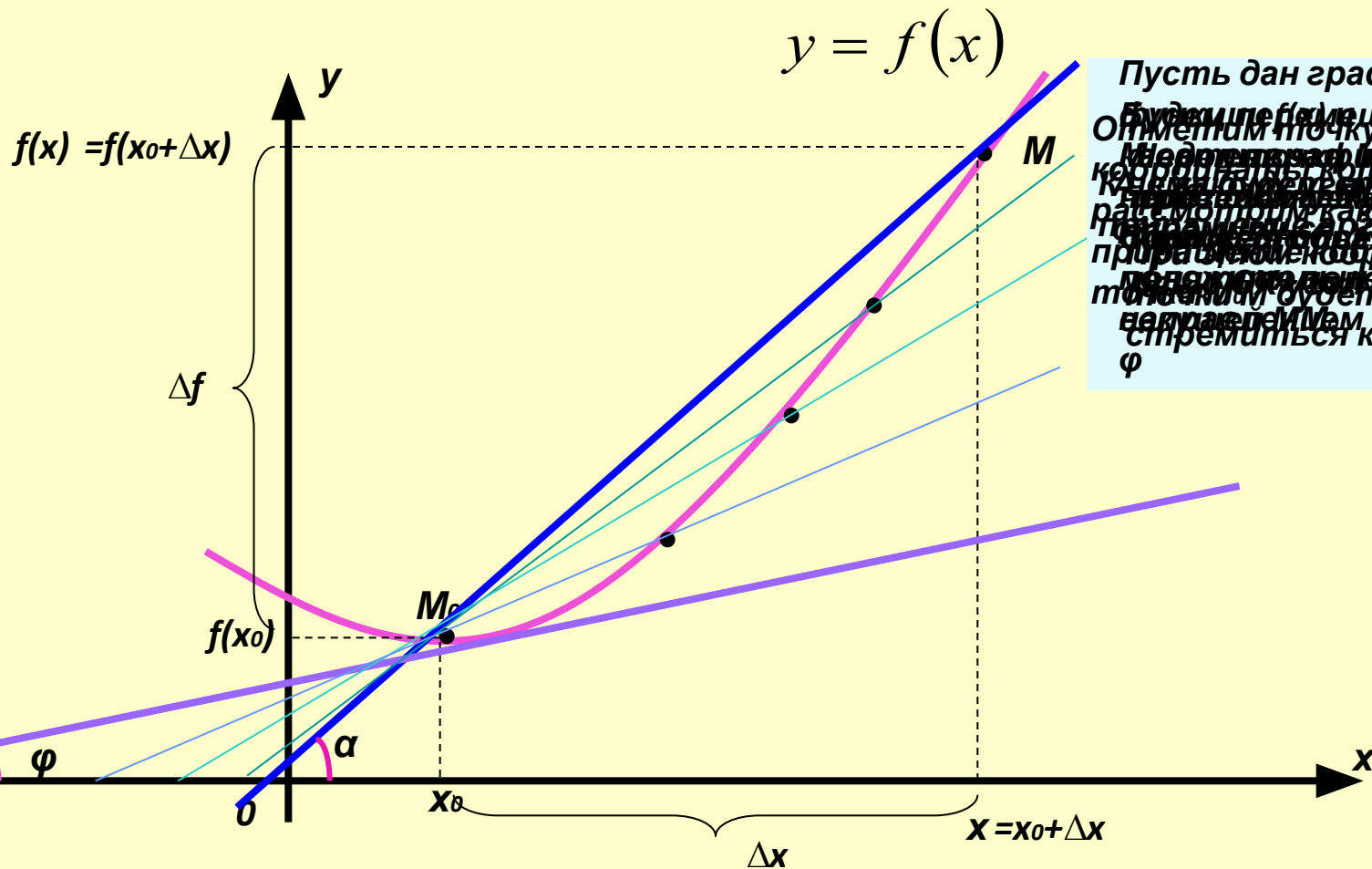
$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

# Тема: Задача, приводимая к понятию “производная”

Прямая, проходящая через точку  $M_0(x_0; f(x_0))$ , с отрезком которой почти сливается график функции  $f(x)$ , называют касательной к графику в точке  $x_0$



# Задача: Определить положение касательной ( $\text{tg}\varphi$ )



Пусть дан график функции  $y = f(x)$ . Будем увеличивать точку  $M$  по графику, приближая ее к точке  $M_0$ . Каким образом будет изменяться угол  $\alpha$ ? Приравняв координату  $x$  точки  $M$  к координате  $x_0$  оси  $Ox$  угол  $\varphi$  стремится к  $\varphi$ .

Секущая, поворачиваясь вокруг точки  $M_0$ , приближается к положению касательной

Предельным положением секущей  $M_0M$ , когда  $M$  неограниченно приближается к  $M_0$ , является касательная

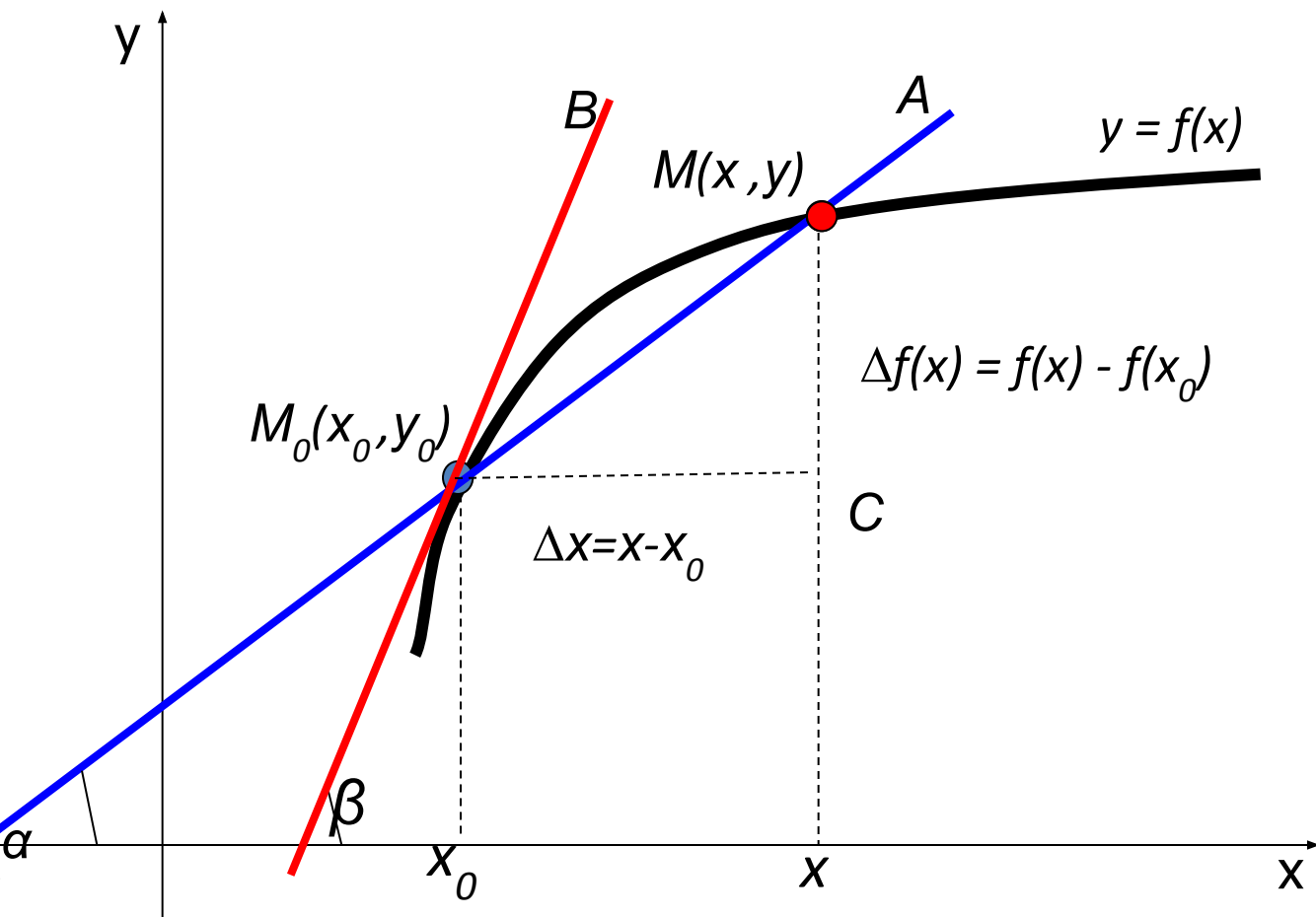
$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$$

$$\alpha \rightarrow \varphi$$

$$k = \text{tg}\varphi = \lim_{\alpha \rightarrow \varphi} \text{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



# Задача о касательной к графику функции



# Задача о мгновенной величине тока

Обозначим через  $q = q(t)$  количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время  $t$ .

Пусть  $\Delta t$  – некоторый промежуток времени,  $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$  – количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени от момента  $t$  до момента  $t + \Delta t$ . Тогда отношение  $\frac{\Delta q}{\Delta t}$  называют средней силой тока.

Мгновенной силой тока в момент времени  $t$  называется предел отношения приращения количества электричества  $\Delta q$  ко времени  $\Delta t$ , при условии, что  $\Delta t \rightarrow 0$ .

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$



# Выводы

Различные задачи привели в процессе решения к одной и той же математической модели – пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Значит, эту математическую модель надо специально изучить, т.е.:

- 1) Присвоить ей новый термин.
- 2) Ввести для неё обозначение.
- 3) Исследовать свойства новой модели.
- 4) Определить возможности применения нового понятия - производная

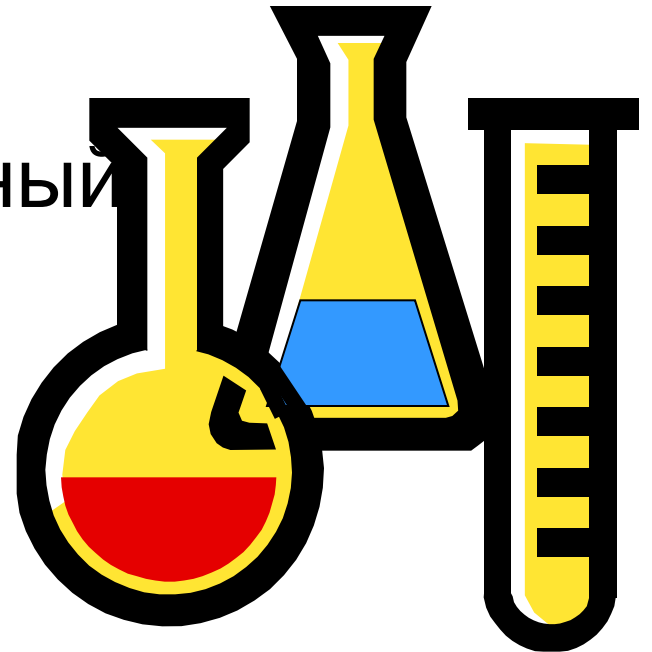
# Задача о скорости химической реакции

Средняя скорость растворения соли в воде за промежуток времени  $[t_0; t_1]$  (масса соли, растворившейся в воде изменяется по закону  $x = f(t)$ ) определяется по формуле

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Скорость растворения в данный момент времени

$$v(t_0) = f'(t_0)$$



# Определение производной

*Производной функции  $f$  в точке  $x_0$  называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при последнем стремящимся к нулю:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

**Возвращаясь к рассмотренным задачам, важно подчеркнуть следующее:**

- а) мгновенная скорость** неравномерного движения есть производная от пути по времени;
- б) угловой коэффициент касательной** к графику функции в точке  $(x_0; f(x))$  есть производная функции  $f(x)$  в точке  $x = x_0$ ;
- в) мгновенная сила тока**  $I(t)$  в момент  $t$  есть производная от количества электричества  $q(t)$  по времени;
- Г) скорость химической реакции** в данный момент времени  $t$  есть производная от количества вещества  $y(t)$ , участвующего в реакции, по времени  $t$ .

# А л г о р и т м

$$1) \quad \Delta x = x - x_0$$

$$2) \quad \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$3) \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$4) \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

## А ЭТО ЗНАЧИТ:

*«...нет ни одной области в математике,  
которая когда-либо не окажется  
применимой к явлениям  
действительного мира...»* Н.И.

*Лобачевский*

- Аппарат производной можно использовать при решении геометрических задач, задач из естественных и гуманитарных наук, экономических задач оптимизационного характера.
- И, конечно, не обойтись без производной при исследовании функции и построении графиков, решении уравнений и неравенств



# Основные формулы

- Средняя скорость  $v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

- Мгновенная скорость

- $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp}$  или  $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

- Скорость изменения функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Значение производной в точке

- $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k = \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\alpha \rightarrow \varphi} \operatorname{tg} \alpha =$