Теория множеств

Теоремы теории множеств

Задание

- Старейший математик среди шахматистов и старейший шахматист среди математиков – это один и тот же человек или (возможно) разные?
- Лучший математик среди шахматистов и лучший шахматист среди математиков – это один и тот же человек или (возможно) разные?
- Каждый десятый математик – шахматист, а каждый шестой шахматист – математик. Кого больше – шахматистов или математиков и во сколько раз?

Пример доказательства

Доказать, что для произвольных множеств A и B если $A \subset B$, то $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Необходимо доказать, что $\overline{B} \subset \overline{A}$, поэтому структура доказательства будет иметь вид «Пусть $a \in \overline{B}$, тогда…,…, тогда $a \in \overline{A}$».

Пусть $a \in \overline{B}$, тогда по определению дополнения $a \in U \setminus B$. Из определения разности множеств из того, что $a \in U \setminus B$, следует, что a U и $a \notin B$. По условию задачи известно, что $A \subset B$, т.е., что все элементы множества A есть в множестве B. Так как $a \notin B$, то элемента a в множестве B нет, а следовательно его нет и в множестве A. Если элемента a нет в множестве A, то можно записать, что $a \notin A$. Итак, мы установили, что $a \in U$ и $a \notin A$, а это значит, что $a \in \overline{A}$.

Аналогично доказывается обратное утверждение если $\overline{B} \subset \overline{A}$, то $A \subset B$.

Доказать,

- относительно данного универсального множества **U** дополнение *A* любого множества *A*, если $A \subset \mathbf{U}$, единственно.
- Для доказательства единственности дополнения *A* множества $A \subset \mathbf{U}$ предположим, что существует два множества *B* и *C*, каждое из которых удовлетворяет требованиям дополнения множества *A*, т.е. их пересечение с *A* пусто, а объединение с *A* дает **U**:
  - а) $B \cap A = \varnothing$; б) $C \cap A = \varnothing$; в) $B \cup A = \mathbf{U}$; г) $C \cup A = \mathbf{U}$.
- Очевидно, что $B = B \cap U$. С учетом условия г) $B = B \cap (C \cup A)$ =. Так как

$B \cap (C \cup A) = (B \cap C) \cup (B \cap A)$, то с учетом условия а) $B = (B \cap C) \cup \varnothing = B \cap C$.

- Аналогично, исходя из условий в), б) получим:
  - $C = C \cap U = C \cap (B \cup A) = (C \cap B) \cup (C \cap A) = (C \cap B) \cup \varnothing = C \cap B$.
- Итак, мы получили, что $B = B \cap C$ и $C = C \cap B$. Так как $C \cap B = B \cap C$ (коммутативность операции пересечения), то $B = C$, что и требовалось доказать.

Основные законы теории множеств

- 1. Коммутативность операций $\cup$ и $\cap$:
- а) $A\cup B=B\cup A$ б) $A \cap B=B \cap A$
- 2. Ассоциативность операций $\cup$ и $\cap$:
- а) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B) \cup C$ б) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B) \cap C$
- 3. Законы идемпотентности операций $\cup$ и $\cap$:
- а) $A\cup A=A$ б) $A\cap A=A$
- 4. Законы дистрибутивности:
- а) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B) \cap (A\cup C)$ б) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B) \cup (A\cap C)$
- 5. Законы поглощения:
- а) $A\cup(A\cap B)=A$ б) $A\cap(A\cup B)=A$
- 6. Законы де Моргана:
- а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- 7. Законы пустого и универсального множеств:
- $A\cup\varnothing=A$ $\quad A\cap\varnothing=\varnothing$ $\quad A\cap \overline{A}=\varnothing$
- $A\cup \mathbf{U}=\mathbf{U}$ $\quad A\cap\mathbf{U}=A$ $\quad A\cup\overline{A}=\mathbf{U}$
- $\overline{\mathbf{U}}=\varnothing$ $\overline{\varnothing}=\mathbf{U}$
- 8. Закон двойного отрицания:
- $\overline{\overline{A}} = A$

Доказать, что:

- $A \subset A$;
- если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$;
- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$;
- $A \cap B \subset B \subset A \cup B$;
- $A \setminus B \subset A$.

Определить

- какой знак из множества $\{=, \neq, \subset, \supset\}$ можно поставить вместо символа «?», чтобы полученное утверждение было верным.
  - $\{1, 3\}$ **?** $\{1, 2, 3\}$,
  - $\{2, 3, 4\}$ **?** $\{1, 2, 3\}$,
  - $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$ **?** $\{1, 2, 3\}$,
  - $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ **?** $\{1, 2, 3\}$,
  - $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$ **?** $\{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$,
  - $\{(2, 1), (3, 2)\}$ **?** $\{(1, 2), (2, 3)\}$,
  - $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ **?** $\{\{2, 1\}, \{3, 2\}, \{1, 3\}\}$,
  - $\{1, 2, 3\}$ **?** $\{x | x$ делитель $6\}$,
  - $\varnothing$ **?** $\{\varnothing\}$.

Определить

- Какие из равенств верны для любых множеств *A*, *B* и *C*, привести подробное доказательство верных равенств.
  - $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;
  - $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;
  - $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup B$;
  - $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap B$;
  - $A\setminus(\mathrm{B}\cup \mathrm{C})=(\mathrm{A}\setminus \mathrm{B})\cap(A\setminus C)$;
  - $A\setminus(\mathrm{B}\cap \mathrm{C})=(\mathrm{A}\setminus \mathrm{B})\cup(A\setminus C)$.

Доказать

1. $A \cup B \subset C \Leftrightarrow A \subset C$ и $B \subset C$,
2. $A \subset B \cap C \Leftrightarrow A \subset B$ и $A \subset C$,
3. $A \subset B \cup C \Leftrightarrow A \cap B \subset C$,
4. $A \subset B \Rightarrow C \setminus B \subset C \setminus A$,
5. $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$,
6. $A = B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = \mathbf{U}$,
7. $A \Delta (A \Delta B) = B$,
8. $A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B)$,
9. $A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$,

Доказать

10. $A\setminus B = A \Delta (A \cap B)$,
11. $A \Delta B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$,
12. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cup B = A \Delta B$,
13. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
14. $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A = A$,
15. $A \cap (B\setminus A) = \varnothing$,
16. $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$.

Задачи

- Среди математиков каждый седьмой - философ, а среди философов каждый девятый - математик. Кого больше, философов или математиков?
- В гимназии все ученики знают хотя бы один из древних язы- ков — греческий или латынь, а некоторые — оба языка. 85% всех ребят знают греческий язык и 75% знают латынь. Какая часть учащихся знает оба языка?
- Какие трехзначные числа можно составить из цифр 3, 7 и 1 при условии, что в записи не должно быть одинаковых цифр? Сколько таких чисел?

Задачи

- Даны 1985 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причём объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех этих 1985 множеств?
- Собрались 12 волейболистов и 9 теннисистов, а всего – 16 человек. Сколько из них играют и в волейбол, и в теннис?
- Множество А содержит 5 элементов, множество В – 4 элемента, а их пересечение содержит 2 элемента. Сколько элементов содержит объединение множеств А и В?

Задание

- Из 100 студентов педагогику сдали 28 человек, математику - 30 человек, философию - 42 человека, педагогику и математику - 8, математику и философию - 5, педагогику и философию - 10, все три экзамена - 3 человека. Сколько человек не сдало ни одного экзамена?
- Дано множество A = {1, 2, 3, {1}, {1, 2}}. Укажите, какие из следующих объектов являются элементами множества A, и какие - подмножествами: 2; {2}; {1, 2}; {1, 3}; {1, {1}}; {{1}}; {1, {2}}, {1,2,{1, 2}}.

Задания

- В Союзе писателей 32 человека, из них 17 поэтов и 19 прозаиков. Сколько человек пишут и стихи и прозу?
- Из группы студентов на занятия физкультурой ходят 20 человек, а в секции - 18, причем 15 человек одновременно ходят и в секции и на занятия по физкультуре. Сколько студентов освобождены от занятий спортом, если всего в группе 25 человек?
- Составьте множество двухзначных чисел, в записи которых используются лишь цифры 2, 5 и 8. Найдите пересечение этого множества со множеством четных чисел.