

**В.Г. Петухов**

E-mail: [petukhov@mtu-net.ru](mailto:petukhov@mtu-net.ru)

Государственный космический  
научно-производственный центр  
им. М.В. Хруничева



**ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ  
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ  
С МАЛОЙ ТЯГОЙ**

# СОДЕРЖАНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ

### 1. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

### 2. ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕЖПЛАНЕТНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ

КА С ИДЕАЛЬНО РЕГУЛИРУЕМЫМ ДВИГАТЕЛЕМ МАЛОЙ ТЯГИ

### 3. ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА НА ОРБИТУ ВОКРУГ ЛУНЫ

КА С ИДЕАЛЬНО РЕГУЛИРУЕМЫМ ДВИГАТЕЛЕМ МАЛОЙ ТЯГИ

### 4. ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОВИТКОВЫХ ПЕРЕЛЕТОВ МЕЖДУ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ НЕКОМПЛАНАРНЫМИ ОРБИТАМИ

КА С ДВИГАТЕЛЕМ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ ИСТЕЧЕНИЯ

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Представлен единый методический подход к решению различных задач численной оптимизации траекторий КА с малой тягой. Основой этого подхода является формальная редукция краевой задачи принципа максимума к задаче Коши. Такая редукция достигается применением метода продолжения по параметру.

## Оптимизация перелетов КА с малой тягой:

Т.М. Энеев, В.А. Егоров, В.В. Белецкий, Г.Б. Ефимов,  
М.С. Константинов, Г.Г. Федотов, Ю.А. Захаров,  
Ю.Н. Иванов, В.В. Токарев, В.Н. Лебедев,  
В.В. Салмин, С.А. Ишков, В.В. Васильев,  
T.N. Edelbaum, F.W. Gobetz, J.P. Marec, N.X. Vinh, K.D. Mease, C.G. Sauer,  
C. Kluever, V. Coverstone-Carroll, S.N. Williams, M. Hechler и др.

## Метод продолжения:

М. Kubicek, Т.У. На и др.

## Недостатки традиционных численных методов оптимизации

- малая область сходимости;
- вычислительная неустойчивость;
- необходимость подбора начального приближения в условиях отсутствия априорной информации о решении задачи.

Часть этих явлений связана с физической сущностью задачи оптимизации (вопросы устойчивости, существования и ветвления решений). Однако, большинство численных методов вносят свои - методические - ограничения, не имеющие непосредственного отношения к свойствам математической задачи. Так, область сходимости практически всех численных методов существенно меньше области притяжения конкретной экстремальной точки в пространстве неизвестных параметров краевой задачи.

Методические сложности связаны с вычислительной неустойчивостью и с ограниченностью области сходимости численных методов решения, а в некоторых случаях - например при использовании ряда прямых методов оптимизации - с большой размерностью задачи.

## Цель разработки метода продолжения

“Регуляризация” численной оптимизации траекторий, то есть устранение, по возможности, методических недостатков численной оптимизации. В частности, была поставлена и решена задача определения оптимальной траектории при использовании тривиального начального приближения (например, пассивного движения КА по начальной орбите).

## Рассматриваемые прикладные задач оптимизации траекторий

1. Оптимизация межпланетных траекторий КА с идеально регулируемым двигателем малой тяги;
2. Оптимизация траекторий перелета к Луне КА с идеально регулируемым двигателем малой тяги в рамках ограниченной задачи трех тел;
3. Оптимизация перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами КА с двигательной установкой с постоянной скоростью истечения.

# 1. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Задача: решить систему нелинейных уравнений

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

относительно вектора  $\mathbf{z}$

Пусть  $\mathbf{z}_0$  - начальное приближение решения. Тогда

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{b}$  - вектор невязок при  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$ .

Введем в рассмотрение однопараметрическое семейство  $\mathbf{z}(\tau)$ , где  $\tau$  - скалярный параметр и рассмотрим уравнение

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = (1 - \tau)\mathbf{b} \quad (3)$$

относительно  $\mathbf{z}(\tau)$ . Очевидно, что  $\mathbf{z}(1)$  - решение уравнения (1). Продифференцируем уравнение (3) по  $\tau$  и разрешим его относительно  $d\mathbf{z}/d\tau$ :

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\mathbf{f}_z^{-1}(\mathbf{z})\mathbf{b}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \quad (4)$$

Интегрируя уравнения (4) от 0 до 1 получаем решение системы (1).

Уравнение (4) - дифференциальное уравнение метода продолжения

(формальная редукция решения системы нелинейных уравнений (1) к задаче Коши).

# Применение метода продолжения к краевой задаче оптимального управления



Уравнения оптимального движения  
(после применения принципа максимума):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= H_p, \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -H_x \end{aligned} \right\}$$



Краевые условия (пример):

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_k$$



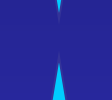
Вектор параметров краевой задачи и вектор невязок:

$$\mathbf{z} = \mathbf{p}(0), \mathbf{f} = \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_k$$



Матрица чувствительности:

$$\mathbf{f}_z = \frac{\partial \mathbf{x}(T)}{\partial \mathbf{z}}$$



Совместная система о.д.у. оптимального движения и уравнений в вариациях для вычисления вектора невязок и матрицы чувствительности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= H_p, \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -H_x, \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \partial \mathbf{x} \\ \partial \mathbf{z} \end{pmatrix} &= H_{px} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} + H_{pp} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}}, \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \partial \mathbf{p} \\ \partial \mathbf{z} \end{pmatrix} &= -H_{xx} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} - H_{xp} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} \end{aligned} \right\}$$



Расширенные начальные условия:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_k, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} = 0, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{I}$$



# Схема решения задачи оптимизации траектории КА с малой тягой методом продолжения по параметру

Редукция задачи оптимального управления к краевой задаче применением принципа максимума Л.С. Понтрягина

Вычисление вектора начальных невязок  $\mathbf{b}$  с помощью интегрирования системы о.д.у. оптимального движения при заданном начальном приближении вектора параметров краевой задачи  $\mathbf{z}_0$

МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ

Начальное приближение  $\mathbf{z}_0$

Интегрирование системы о.д.у. метода продолжения

$$\frac{dz}{d\tau} = -\mathbf{f}_z^{-1}(\mathbf{z})\mathbf{b}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

по  $\tau$  от 0 до 1

1-й вариант вычисления правых частей о.д.у. метода продолжения

2-й вариант вычисления правых частей о.д.у. метода продолжения

Совместное интегрирование систем о.д.у. оптимального движения и уравнений в вариациях при текущем значении  $\mathbf{z}(\tau)$  для определения текущих значений вектора невязок  $\mathbf{f}(\mathbf{z}, \tau)$  и матрицы чувствительности  $\mathbf{f}_z(\mathbf{z}, \tau)$

Интегрирование систем о.д.у. оптимального движения при текущем значении  $\mathbf{z}(\tau)$  для определения текущих значений вектора невязок  $\mathbf{f}(\mathbf{z}, \tau)$  и при варьированных значениях  $\mathbf{z}(\tau)$  для конечно-разностного вычисления  $\mathbf{f}_z(\mathbf{z}, \tau)$

Решение  $\mathbf{z}(1)$

## 2. ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕЖПЛАНЕТНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ КА С ИДЕАЛЬНО РЕГУЛИРУЕМЫМ ДВИГАТЕЛЕМ МАЛОЙ ТЯГИ

## 2.1. ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИИ КА С ИДЕАЛЬНО РЕГУЛИРУЕМЫМ ДВИГАТЕЛЕМ

Функционал:

$$\frac{1}{2} \int_0^T a^2 dt \quad (\text{постоянная мощность, ЯЭРДУ})$$

$$\frac{1}{2} \int_0^T N(x, t) a^2 dt \quad (\text{переменная мощность, СЭРДУ})$$

Уравнения движения:  $d^2 \mathbf{x} / dt^2 = \Omega_x + \mathbf{a}$

Начальные условия:  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(t_0), \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0(t_0) + V_\infty \mathbf{e}_\infty$

Конечные условия

1) сопровождение:  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_k(t_0 + T), \mathbf{v}(T) = \mathbf{v}_k(t_0 + T)$

2) пролет:  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_k(t_0 + T)$

где  $\mathbf{x}, \mathbf{v}$  - векторы положения и скорости КА,  $\Omega$  - силовая функция гравитационного поля,  $\mathbf{a}$  - вектор реактивного ускорения,  $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0$  - векторы положения и скорости планеты отправления,  $\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k$  - векторы положения и скорости планеты прибытия,  $V_\infty$  - гиперболический избыток скорости КА у планеты отправления,  $\mathbf{e}_\infty$  - единичный вектор ориентации гиперболического избытка  $V_\infty$ ,  $N(\mathbf{x}, t)$  - отношение текущей реактивной мощности к начальной.

## 2.2. УРАВНЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ (СЛУЧАЙ ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ)



Гамильтониан:

$$H = -\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \mathbf{p}_x^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{p}_v^T \Omega_x + \mathbf{p}_v^T \mathbf{a}$$



Оптимальное управление:

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_v$$



Оптимальный гамильтониан:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \mathbf{p}_v^T \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_x^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{p}_v^T \Omega_x$$



Уравнения оптимального движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} &= \Omega_x + \mathbf{p}_v, \\ \frac{d^2 \mathbf{p}_v}{dt^2} &= \Omega_{xx} \mathbf{p}_v. \end{aligned} \right\}$$



Вектор невязок:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(T; \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0) - \mathbf{x}_k \\ \mathbf{v}(T; \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0) - \mathbf{v}_k \end{pmatrix} \quad (\text{сопровождение})$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(T; \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0) - \mathbf{x}_k \\ \mathbf{p}_v(T; \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0) \end{pmatrix} \quad (\text{пролет})$$



Вектор параметров краевой задачи и  
вектор начальных невязок:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_0 \end{pmatrix} : \quad \mathbf{z} = \mathbf{z}_0 \quad \mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b}$$

### 2.3. УРАВНЕНИЯ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ

Погружение краевой задачи  
в однопараметрическое семейство:

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = (1 - \tau)\mathbf{b}$$

Начальное значение вектора параметров  
краевой задачи и ее решение:

$$\mathbf{z}|_{\tau=0} = \mathbf{z}_0, \quad \mathbf{z}|_{\tau=1} = \tilde{\mathbf{z}}$$

Дифференциальное уравнение метода  
продолжения:

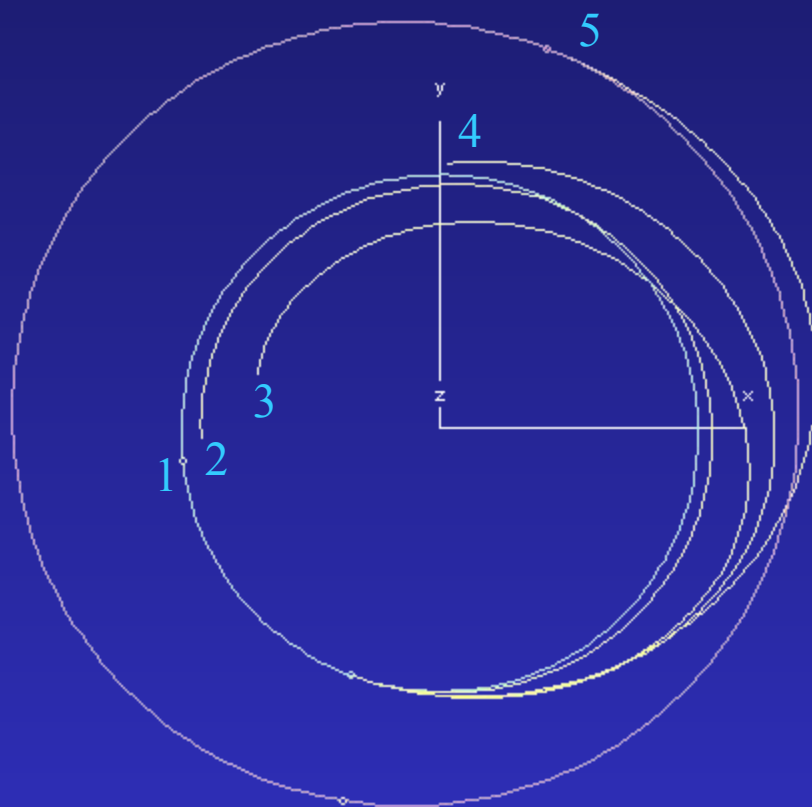
$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\mathbf{f}'_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\mathbf{b}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

Система дифференциальных уравнений для определения правой части  
уравнения метода продолжения и расширенные начальные условия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} &= \Omega_{\mathbf{x}} + \mathbf{p}_{\mathbf{v}}, \\ \frac{d^2 \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{dt^2} &= \Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathbf{p}_{\mathbf{v}}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} \right) &= \Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} + \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} \right) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathbf{p}_{\mathbf{v}}) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} + \Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} \right) &= \Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} + \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} \right) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathbf{p}_{\mathbf{v}}) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} + \Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}}. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0(0), \quad \frac{d\mathbf{x}(0)}{dt} = \mathbf{v}_0(0) + V_{\infty} \frac{\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{p_{\mathbf{v}}}, \\ \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} &= 0, \quad \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} = V_{\infty} \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{p}_{\mathbf{v}} \mathbf{p}_{\mathbf{v}}^T}{p_{\mathbf{v}}^2} \right) \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} &= \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} = \mathbf{I} \end{aligned} \right\}$$

## 2.4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ, ВЫЧИСЛЯЕМАЯ АЛГОРИТМОМ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПАССИВНОГО ДВИЖЕНИЯ В КАЧЕСТВЕ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ



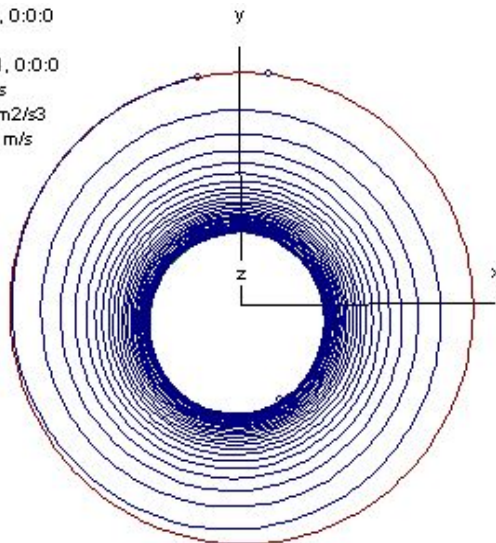
Земля-Марс, сопровождение,  
дата старта 1 июня 2000,  $V_{\infty} = 0$  м/с,  
 $T=300$  сут

- 1 - траектория пассивного движения ( $\tau_1 = 0$ )
- 2-4 - промежуточные траектории ( $0 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4 < 1$ )
- 5 - конечная (оптимальная) траектория ( $\tau_5 = 1$ )

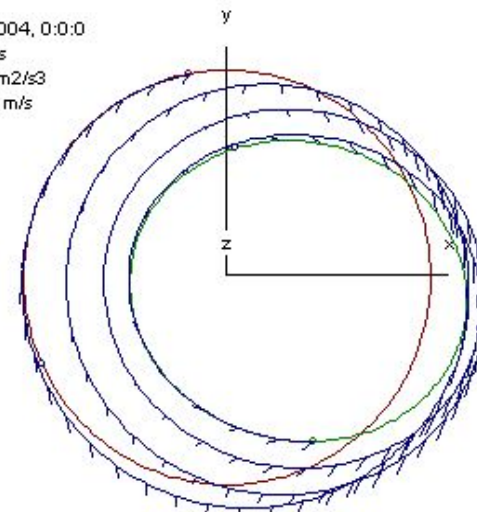
## 2.5. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

### ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ К МЕРКУРИЮ И АСТЕРОИДАМ ЗЕМНОЙ ГРУППЫ

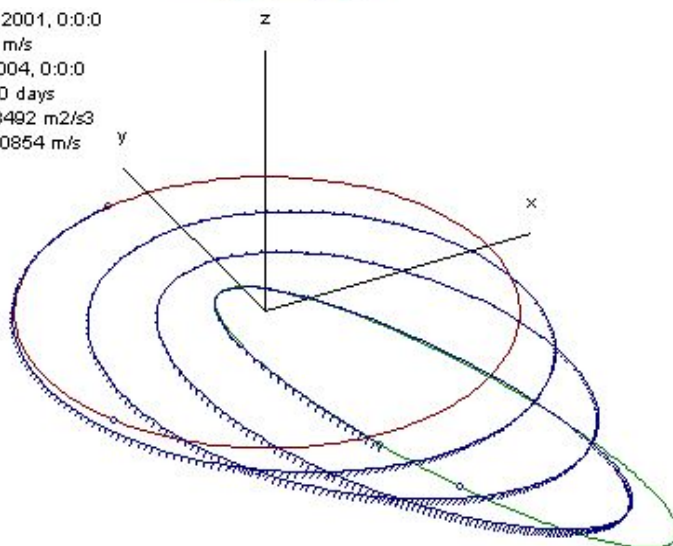
Departure: Earth at 1 Jan 2001, 0:0:0  
 Departure velocity 0.0 m/s  
 Arrival: Mercury at 15 Dec 2011, 0:0:0  
 Transfer duration: 4000.00 days  
 Performance index: 1.3066 m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>  
 Characteristic velocity: 19776 m/s



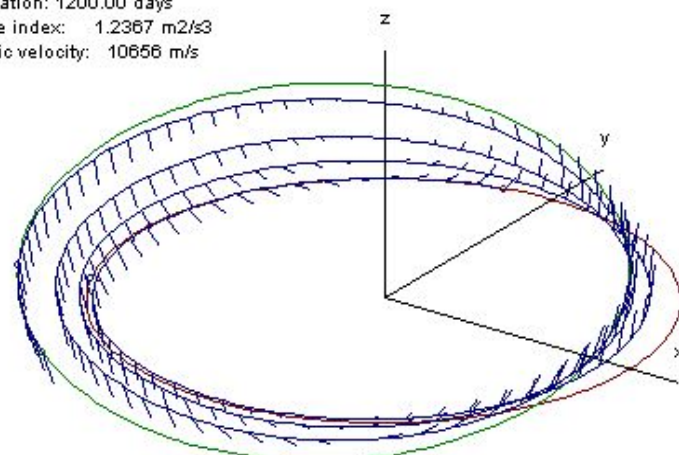
Departure: Earth at 1 Jan 2001, 0:0:0  
 Departure velocity 0.0 m/s  
 Arrival: Ra-Shalom at 15 Apr 2004, 0:0:0  
 Transfer duration: 1200.00 days  
 Performance index: 1.8496 m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>  
 Characteristic velocity: 12842 m/s



Departure: Earth at 1 Jan 2001, 0:0:0  
 Departure velocity 0.0 m/s  
 Arrival: Icarus at 15 Apr 2004, 0:0:0  
 Transfer duration: 1200.00 days  
 Performance index: 4.3492 m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>  
 Characteristic velocity: 20854 m/s

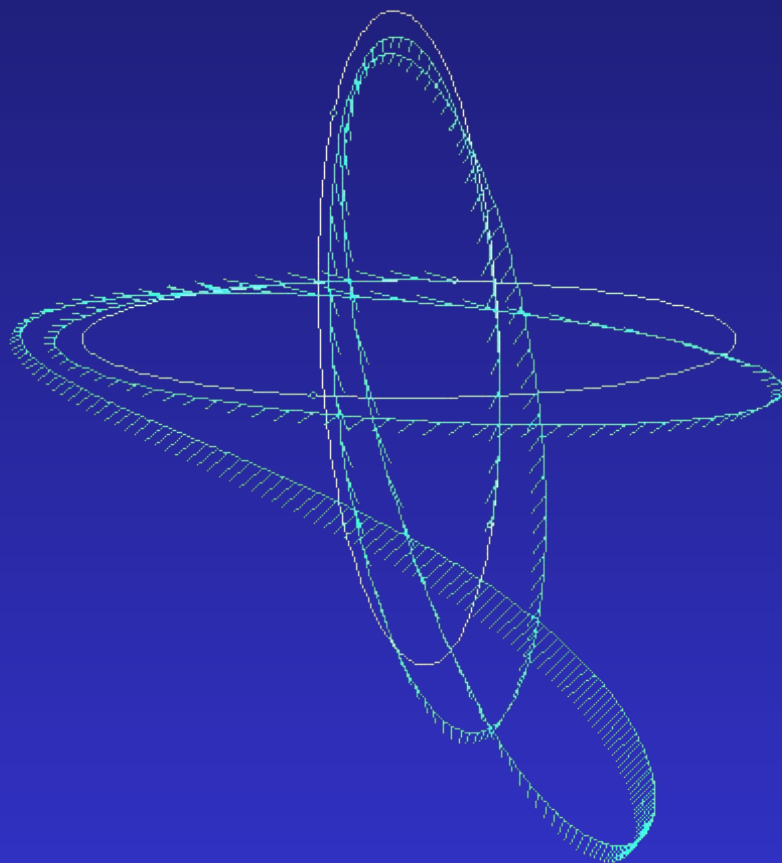


Departure: Earth at 1 Jan 2001, 0:0:0  
 Departure velocity 0.0 m/s  
 Arrival: Xanthus at 15 Apr 2004, 0:0:0  
 Transfer duration: 1200.00 days  
 Performance index: 1.2367 m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>  
 Characteristic velocity: 10656 m/s

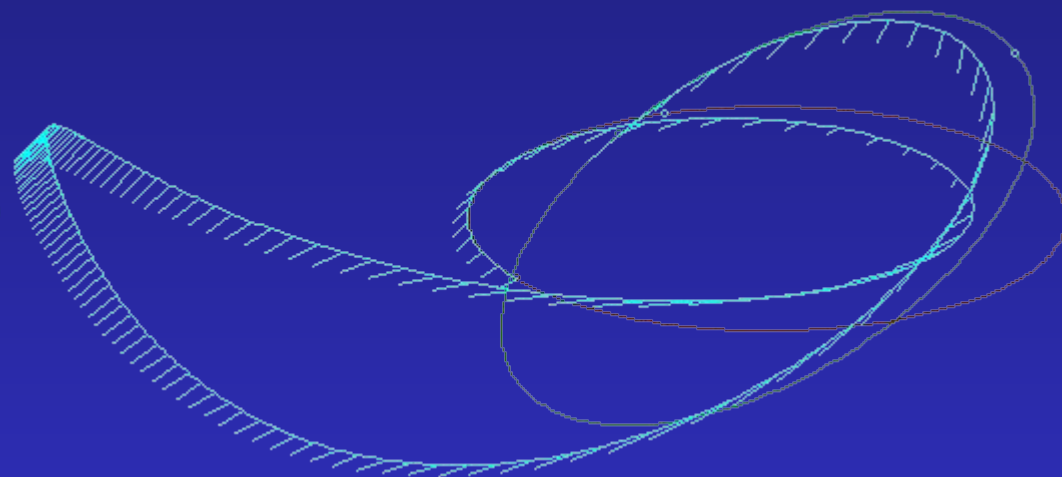


## ПРИМЕРЫ ПОВОРОТА ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ

Поворот плоскости  
круговой орбиты на  $90^\circ$

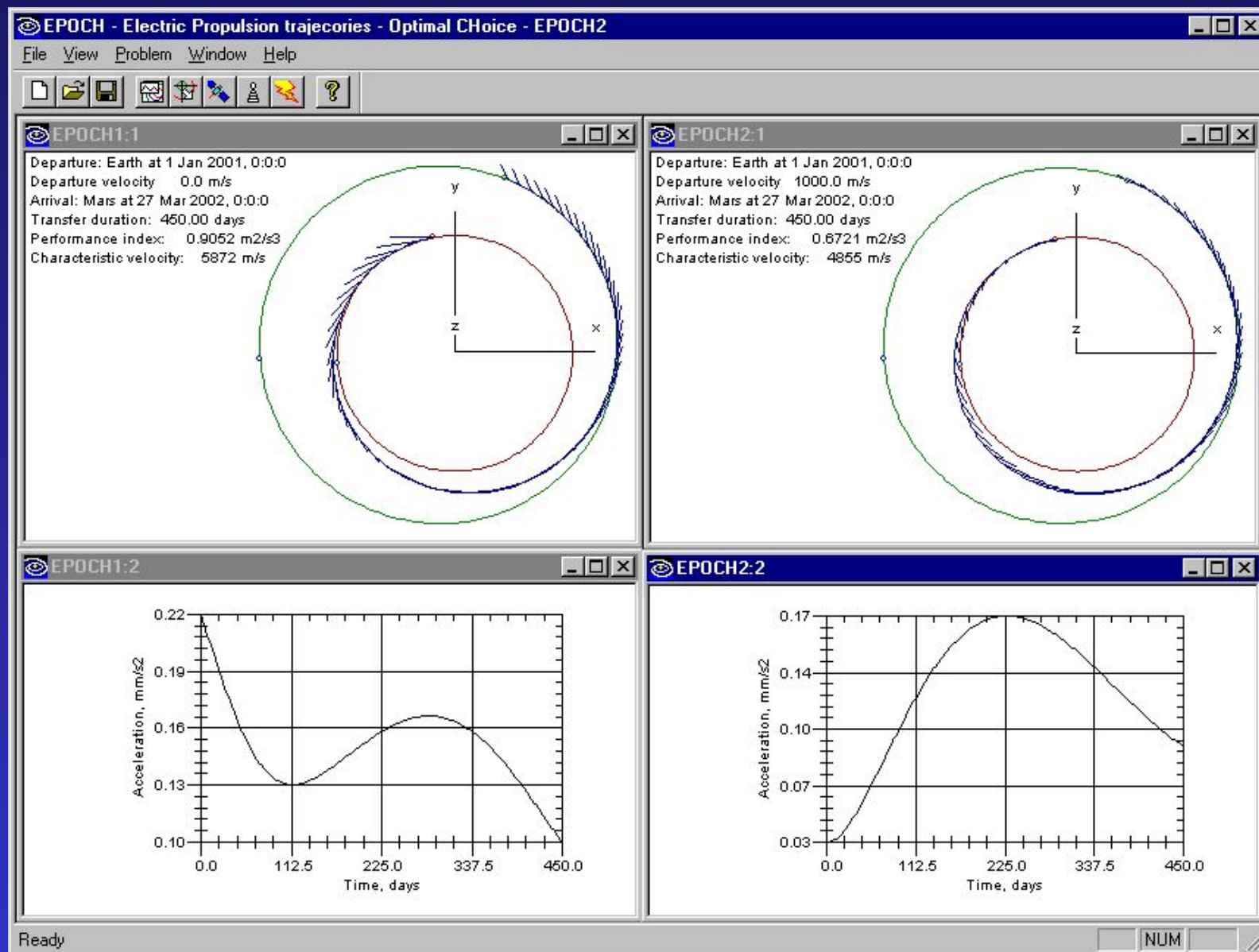


Поворот плоскости  
круговой орбиты на  $120^\circ$

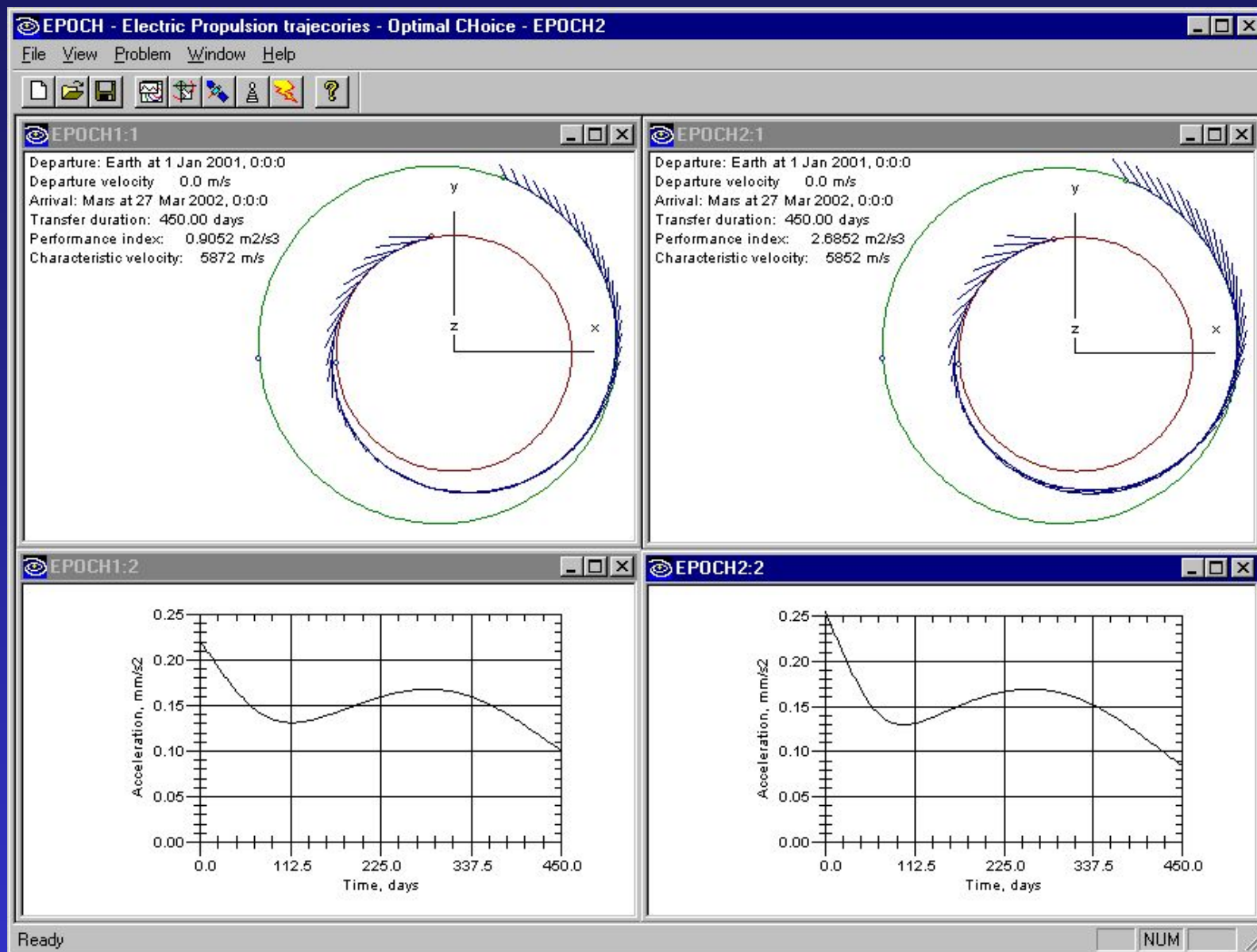




## ПРИМЕР: ВЛИЯНИЕ ОТЛЕТНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ИЗБЫТКА СКОРОСТИ



## ПРИМЕР: ТРАЕКТОРИЯ КА С ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТЬЮ И С СОЛНЕЧНОЙ ЭРДУ



## 2.7. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ГРАВИТАЦИОННОМУ ПАРАМЕТРУ

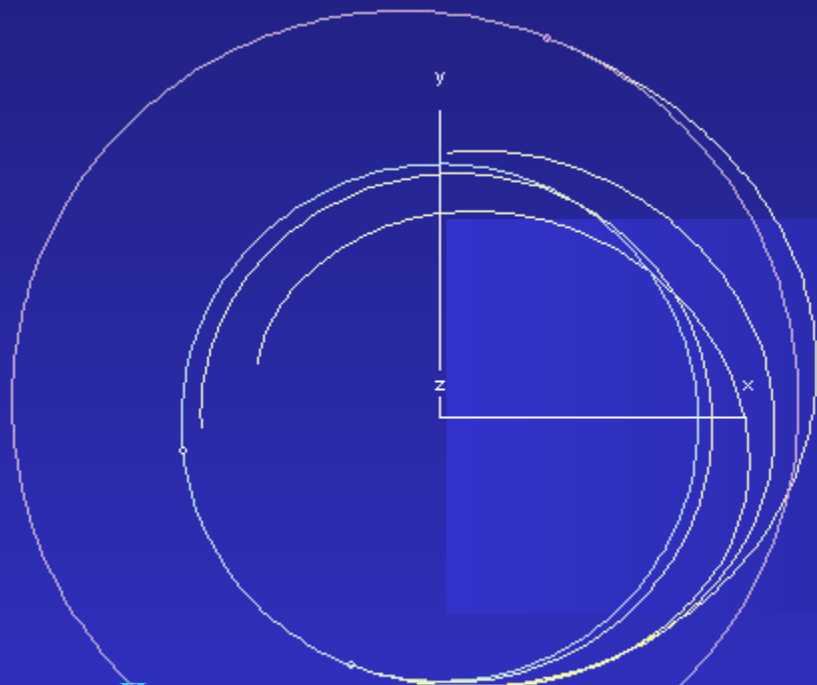
**Причины отказов метода продолжения:** вырожденность матрицы чувствительности (ветвление решений)

Для межпланетных перелетов бифуркации оптимальных решений чаще всего связаны с изменением числа целых витков вокруг Солнца

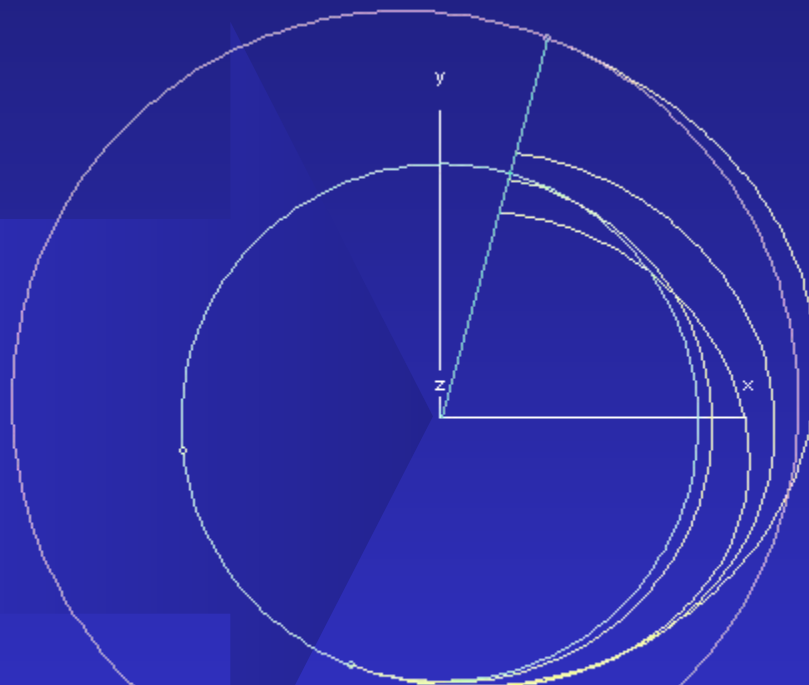


Если угловая дальность перелета в процессе продолжения будет оставаться постоянной, то путь продолжения в параметрическом пространстве не будет пересекать границ областей оптимальных решений различного типа, следовательно не будет вырождаться матрица чувствительности

Цель модификации метода - зафиксировать угловую дальность перелета в процессе продолжения



Последовательность вычисления траекторий при использовании базового метода продолжения

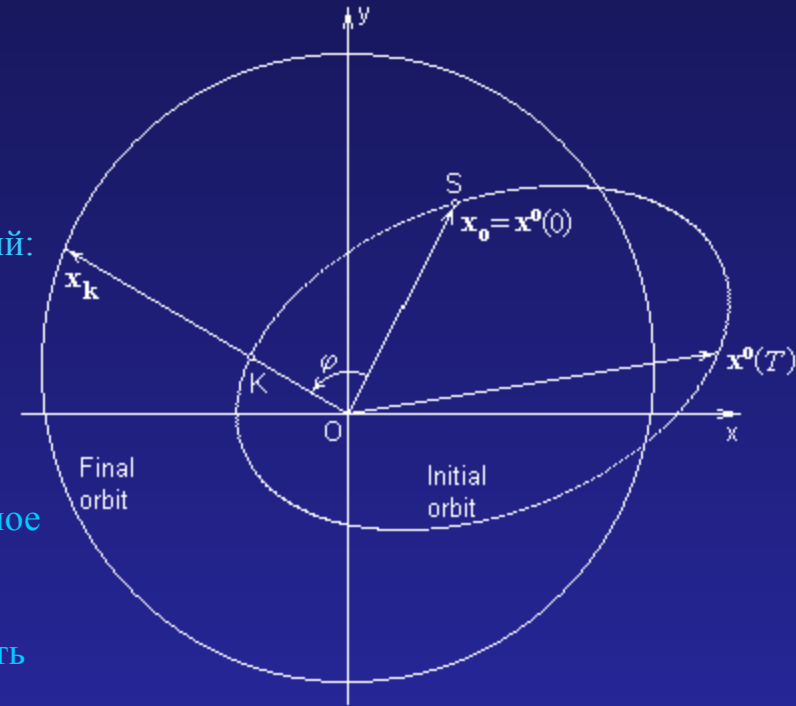


Последовательность вычисления траекторий при использовании метода продолжения по гравитационному параметру

Пусть  $x_0(0)$ ,  $x_0(T)$  - положение планеты старта при  $t=0$  и  $t=T$ ;  $x_k$  - положение планеты-цели при  $t=T$ . Будем считать гравитационный параметр Солнца линейной функцией параметра продолжения  $\tau$ , и начальное значение этого гравитационного параметра  $\mu_0$  выберем из следующих условий:

- 1) угловые дальности перелета при  $\tau=0$  и  $\tau=1$  равны;
- 2) при  $\tau=1$  гравитационный параметр Солнца равен действительному физическому значению (1 для уравнений в безразмерных координатах)

В качестве начального приближения рассматривается пассивное движение КА по орбите планеты старта. Пусть начальная истинная аномалия КА в точке старта S равна  $v_0$ , а конечная в точке K  $v_k = v_0 + \phi$  ( $\phi$  - угол между  $x_0$  и проекцией  $x_k$  на плоскость начальной орбиты).



Решение уравнения Кеплера дает соответствующие значения средних аномалий  $M_0$  и  $M_k$  ( $M = E - e \cdot \sin E$ , где  $E = 2 \cdot \arctg \{ [(1-e)/(1+e)]^{0.5} \cdot \tg(v/2) \}$  - эксцентрисическая аномалия). Средняя аномалия - линейная функция времени на кеплеровской орбите:  $M = M_0 + n \cdot (t - t_0)$ , где  $n = (\mu_0/a^3)^{0.5}$  - среднее движение. Следовательно, должно выполняться:  $M_k + 2\pi N_{rev} = nT + M_0$ . Отсюда начальное значение гравитационного параметра Солнца

$$\mu_0 = [ (M_k + 2\pi N_{rev} - M_0) / T ]^2 a^3,$$

а текущее

$$\mu(\tau) = \mu_0 + (1 - \mu_0) \tau.$$

Форма и размеры граничных орбит должны быть инвариантны относительно  $\tau$ , отсюда

$$v(t, \tau) = \mu(\tau)^{0.5} v(t, 1).$$

Уравнения движения:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{x}} + \mathbf{p}_{\mathbf{v}}, \quad \ddot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}} = \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}}\mathbf{p}_{\mathbf{v}}$$

Краевые условия:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mu^{1/2}(\tau)\mathbf{v}_0,$$

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_k, \quad \dot{\mathbf{x}}(T) = \mu^{1/2}(\tau)\mathbf{v}_k.$$

Функция невязок:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}(T) - \mu^{1/2}(\tau)\mathbf{v}_k \end{pmatrix}$$

Параметры краевой задачи:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{p}_{\mathbf{v}}(0), d\mathbf{p}_{\mathbf{v}}(0)/dt)^T = (\mathbf{p}_{\mathbf{v}0}, \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0})^T$$

Уравнение метода продолжения:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\mathbf{f}'_z(\mathbf{z}) \left( \mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} \right), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$$

где

$$\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{z}_0)$$

$$\mathbf{f}'_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}(T)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} & \frac{\partial \mathbf{x}(T)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}(T)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} \right) & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}(T)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}} \right) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \tau} - \frac{1}{2\mu^{1/2}(\tau)} \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \mathbf{v}_k \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} \right) = \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{z}},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{z}} \right) = \mu(\tau) \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathbf{p}_{\mathbf{v}}) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} + \Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{z}} \right],$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \Omega_{\mathbf{x}} + \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \tau},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathbf{p}_{\mathbf{v}} + \mu(\tau) \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathbf{p}_{\mathbf{v}}) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} + \Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \tau} \right],$$

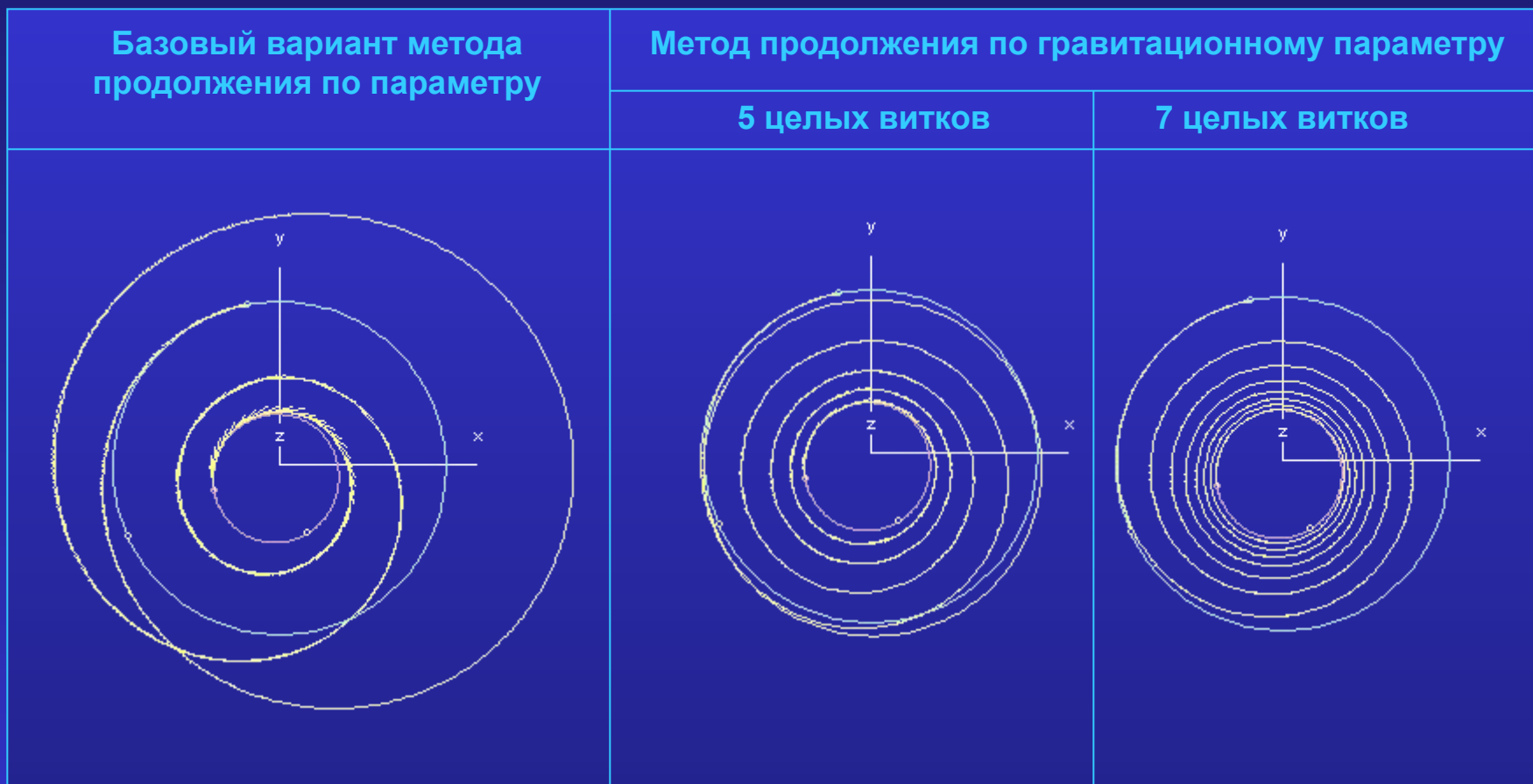
$$\frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(0)}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(0)}{\partial \tau} = \frac{1}{2\mu^{1/2}(\tau)} \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \mathbf{v}_0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}}(0)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}} = \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}(0)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}0}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}}(0)}{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}0}} = \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}(0)}{\partial \tau} = \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}}(0)}{\partial \tau} = 0.$$

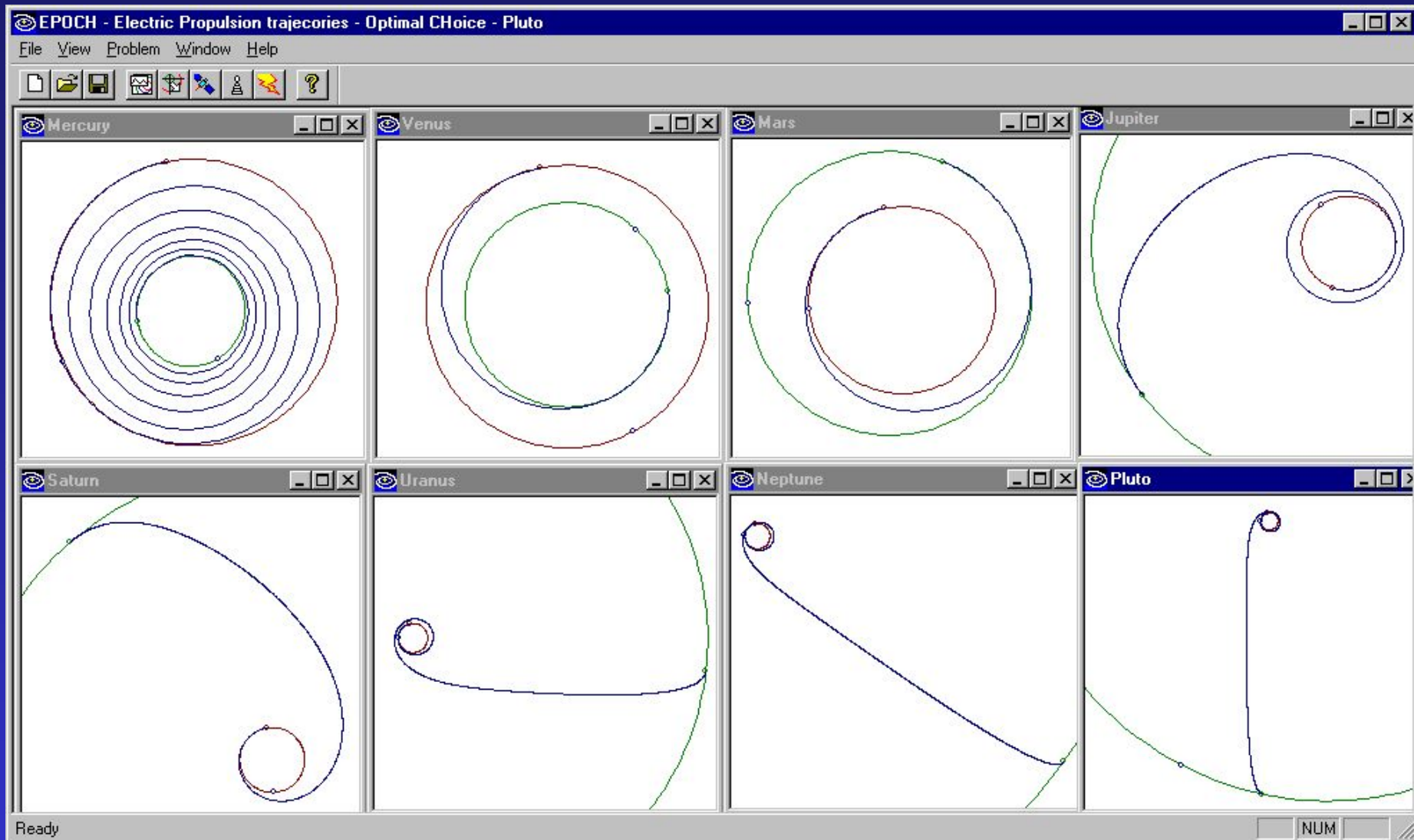
# Численный пример: сопровождение Меркурия

Постоянная мощность, дата старта 1 января 2001 г., время перелета 1200 суток

*Все решения получены с использованием нулевого начального приближения*



## ПРИМЕРЫ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ К ПЛАНЕТАМ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ



# 3. ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА НА ОРБИТУ ВОКРУГ ЛУНЫ

## КА С ИДЕАЛЬНО РЕГУЛИРУЕМЫМ ДВИГАТЕЛЕМ МАЛОЙ ТЯГИ

Рассматривается задача перелета КА с идеально регулируемым двигателем малой тяги с геоцентрической орбиты на орбиту спутника Луны.

Траектория перелета разбивается на 4 участка:

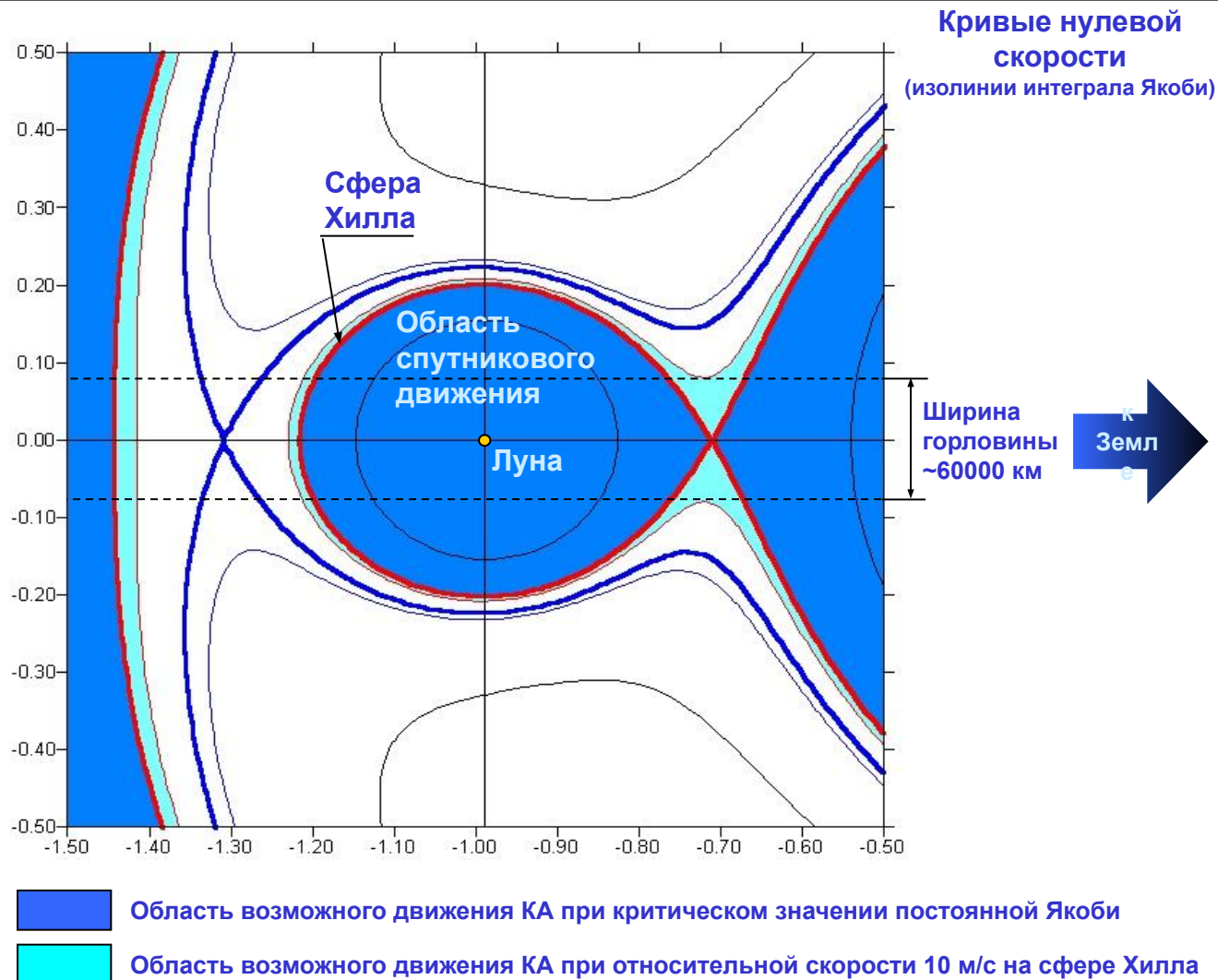
- 1) Траектория геоцентрической спиральной раскрутки с начальной орбиты до некоторой промежуточной геоцентрической орбиты;
- 2) Траектория сопровождения точки либрации  $L_2$  системы Земля-Луна;
- 3) Траектория перелета из точки  $L_2$  на некоторую промежуточную селеноцентрическую орбиту;
- 4) Траектория селеноцентрической скрутки до целевой орбиты.

1-й и 4-й участок могут отсутствовать в случае достаточно высоких начальной геоцентрической и конечной селеноцентрической орбит.

Траектории 2-го и 3-го участков определяются с помощью метода продолжения по параметру.



## ОБОСНОВАНИЕ РАЗБИЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ НА УЧАСТКИ

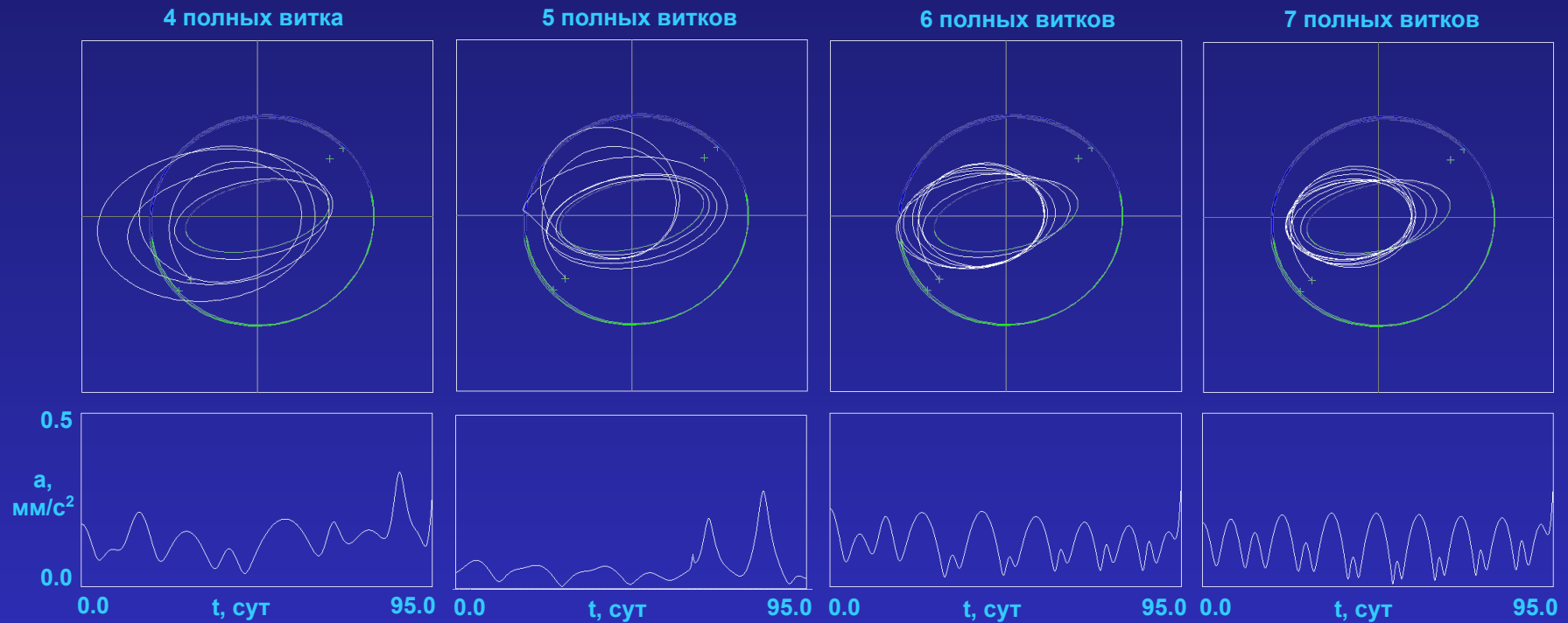


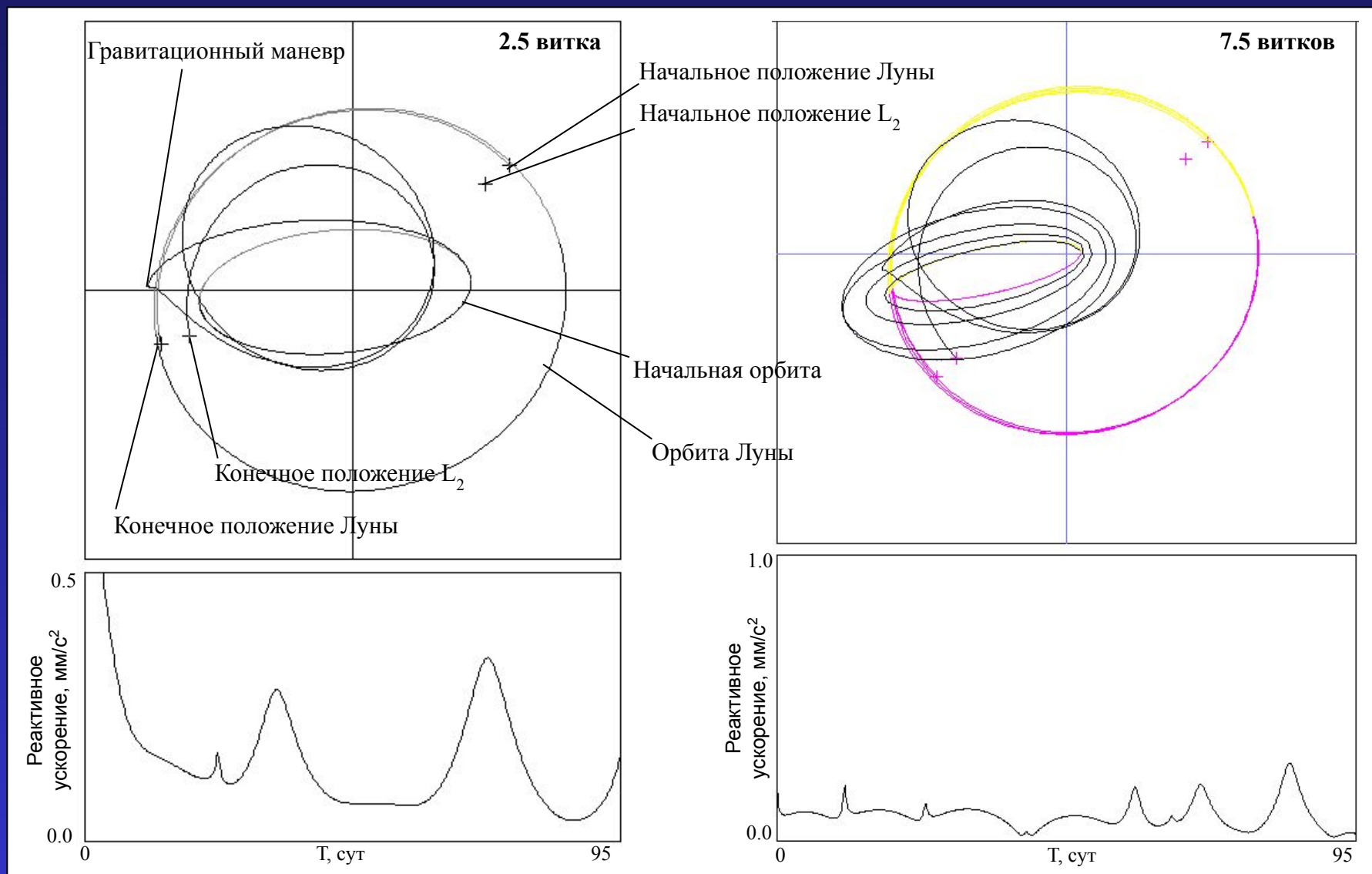
1. Характерная длительность пребывания КА, движущегося по гиперболической траектории, в сфере действия Луны: ~1 сутки.
2. Характерное изменение скорости КА за счет работы двигателей малой тяги при реактивном ускорении  $\sim 0.1 \text{ мм/с}^2$ :  $\sim 10 \text{ м/с}$ .
3. Ширина горловины в окрестности точки либрации, соответствующей избытку относительной скорости КА на сфере Хилла в  $10 \text{ м/с}$ :  $\sim 60000 \text{ км}$ .

Для реализации захвата КА в область спутниковых движений с использованием двигателей малой тяги его скорость относительно точки либрации при пересечении сферы Хилла не должна превышать  $\sim 10 \text{ м/с}$ , а удаление от точки либрации не должно превышать  $\sim 30000 \text{ км}$ .

ТРАЕКТОРИИ СОПРОВОЖДЕНИЯ  $L_2$ 

Модельная задача перелета с круговой околоземной орбиты  
(высота 250000 км, наклонение  $63^\circ$ , долгота восходящего узла  $12^\circ$ ,  
аргумент широты  $0^\circ$ ; дата старта 5 января 2001 г.)



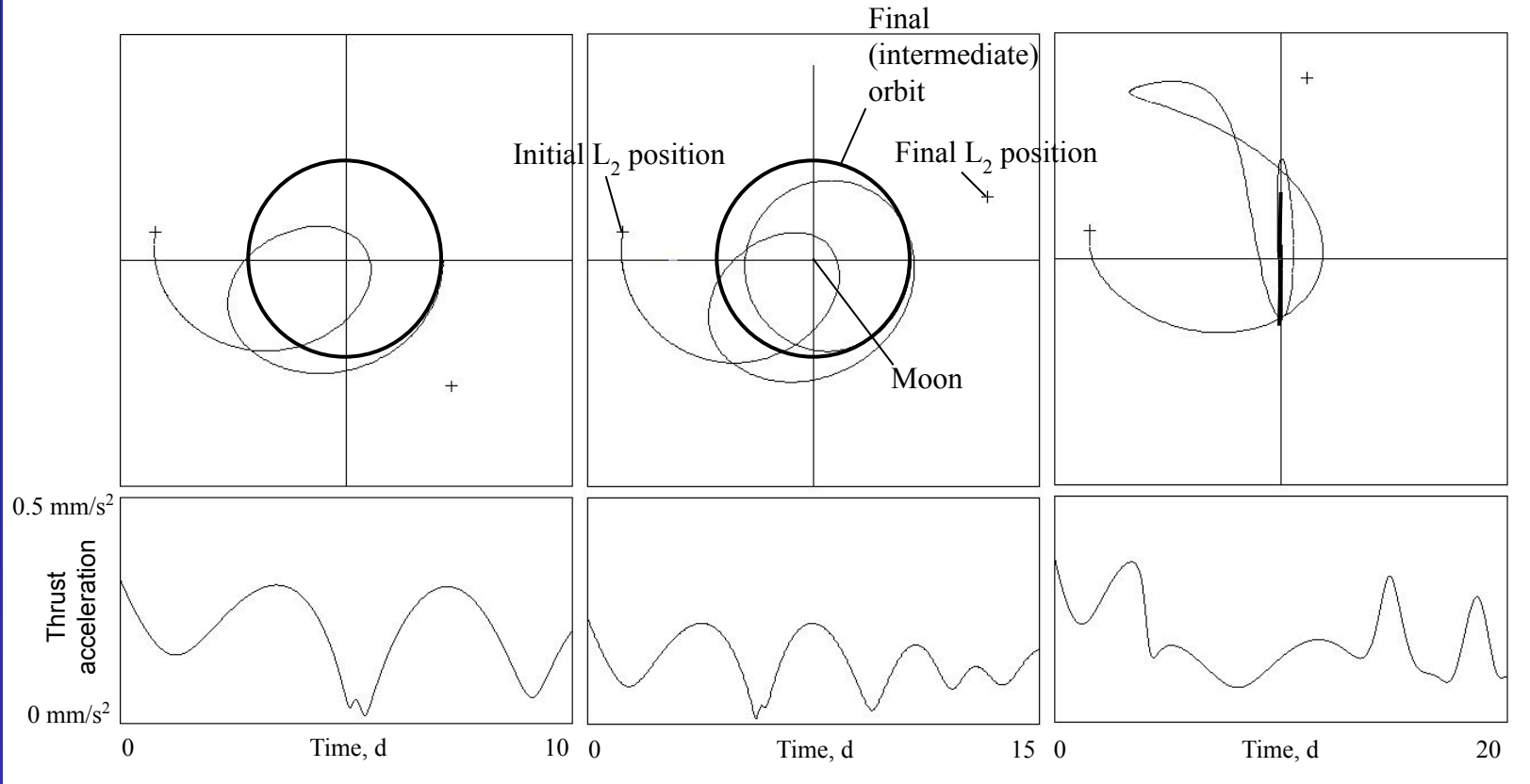
ТРАЕКТОРИИ СОПРОВОЖДЕНИЯ  $L_2$  С ГРАВИТАЦИОННЫМ МАНЕВРОМ У ЛУНЫ

ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА ИЗ  $L_2$  НА КРУГОВУЮ ОРБИТУ ВОКРУГ ЛУНЫ

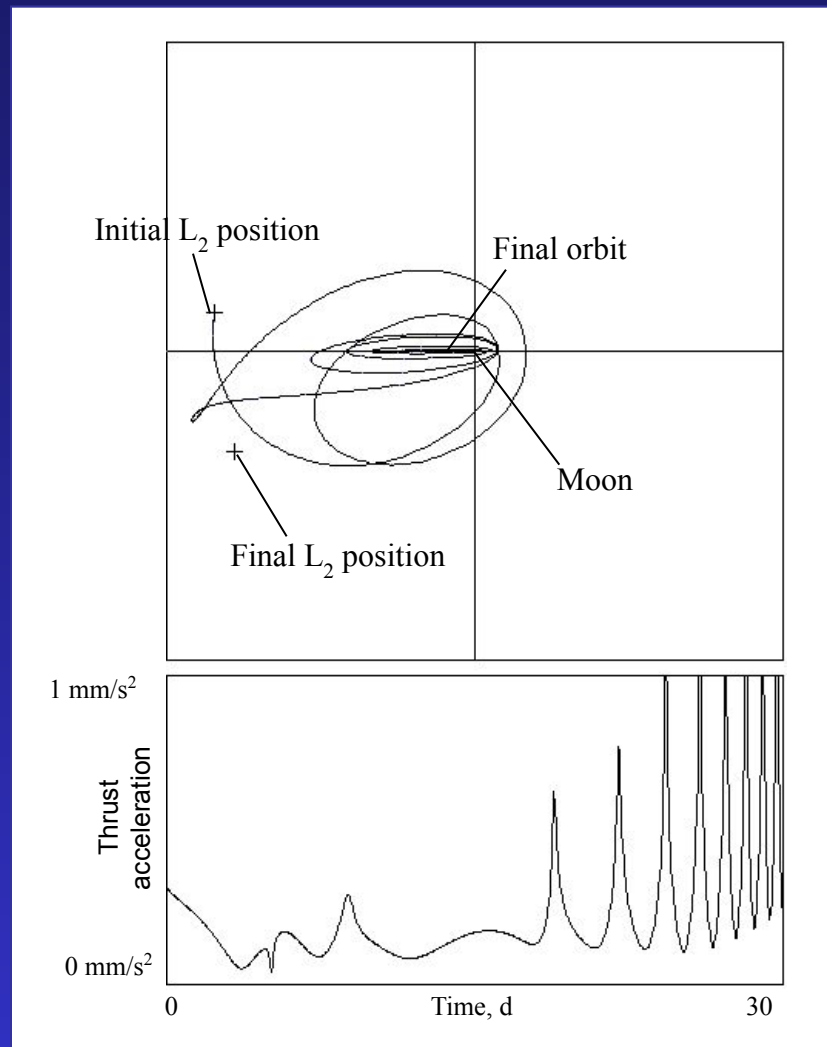
Final orbit:  $r = 30000$  km,  $i = 0^\circ$ .  
Transfer: 1.5 orbits,  $T = 10$  days

Final orbit:  $r = 30000$  km,  $i = 0^\circ$ .  
Transfer: 2.5 orbits,  $T = 15$  days

Final orbit:  $r = 20000$  km,  $i = 90^\circ$ .  
Transfer: 2.5 orbits,  $T = 20$  days

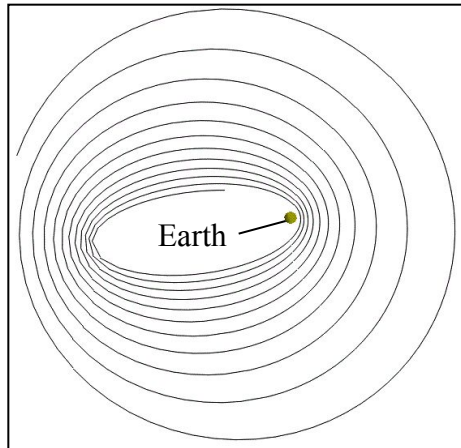


## ТРАЕКТОРИЯ ПЕРЕЛЕТА ИЗ $L_2$ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКУЮ ОРБИТУ ВОКРУГ ЛУНЫ ( $i=90^\circ$ , $h_p=300$ км, $h_a=10000$ км, 10.5 витков)

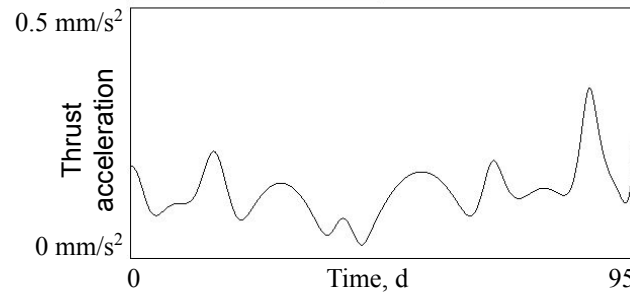
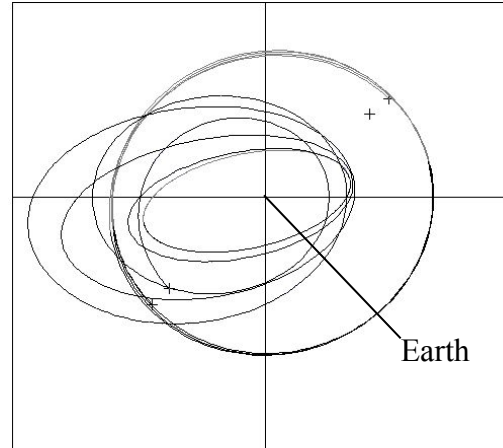


## УЧАСТКИ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОКОЛОЗЕМНОЙ ОРБИТЫ НА КРУГОВУЮ ОРБИТУ ВОКРУГ ЛУНЫ

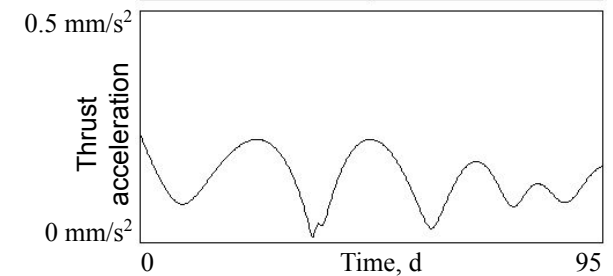
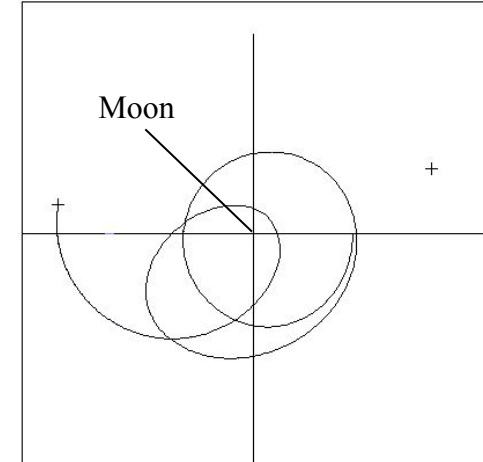
Геоцентрическая  
спиральная раскрутка



Траектория сопровождения  $L_2$



Перелет из  $L_2$  на круговую  
экваториальную 30000-км  
орбиту вокруг Луны



## 4. ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОВИТКОВЫХ ПЕРЕЛЕТОВ МЕЖДУ НЕКОМПЛАНАРНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ

Уравнения орбитального движения КА записываются в равноденственных элементах, не имеющих особенностей при нулевом наклонении и эксцентриситете. Задача оптимального управления редуцируется к двухточечной краевой задаче применением принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Эта краевая задача, в свою очередь, формально редуцируется к задаче Коши с помощью метода продолжения по параметру. Для вычисления правых частей дифференциальных уравнений метода продолжения необходимо проинтегрировать систему дифференциальных уравнений оптимального движения (П-систему) и вычислить частные производные от конечного фазового вектора П-системы по начальным значениям сопряженных переменных.

При численном интегрировании П-системы ее правые части численно осредняются по истинной долготе КА. Частные производные от конечного фазового вектора П-системы по начальным значениям сопряженных переменных определяются по конечно-разностным соотношениям.

В результате первого интегрирования П-системы формируется вектор невязок решения краевой задачи. Для определения матрицы чувствительности с помощью конечных разностей требуется 6 дополнительных интегрирований П-системы. В результате, после решения системы линейных алгебраических уравнений формируется вектор правых частей системы дифференциальных уравнений метода продолжения.

Система дифференциальных уравнений метода продолжения численно интегрируется по параметру продолжения от 0 до 1, в результате чего определяется оптимальное решение.



## 4.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Компоненты реактивного ускорения в орбитальной системе координат:

$$a_{\tau} = \delta \frac{P}{m} \cos \vartheta \cos \psi \quad a_r = \delta \frac{P}{m} \sin \vartheta \cos \psi \quad a_n = \delta \frac{P}{m} \sin \psi$$

$\delta$  - функция выключения двигателя,  $P$  - реактивная тяга,  $m$  - масса КА,  $\vartheta$  - тангаж,  $\psi$  - рысканье

Система равноденственных орбитальных элементов:

$$h = \frac{P}{\mu} \quad e_x = e \cos(\Omega + \omega) \quad e_y = e \sin(\Omega + \omega) \quad i_x = \tan \frac{i}{2} \cos \Omega \quad i_y = \tan \frac{i}{2} \sin \Omega \quad F = \nu + \omega + \Omega$$

$\mu$  - гравитационный параметр центрального тела;  $p, e, \omega, \nu, i, \Omega$  - классические кеплеровские элементы.

Уравнения

движения

в равноденственных

элементах:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \delta \frac{P}{m \xi} \cdot h \cos \vartheta \cos \psi, \\ \frac{de_x}{dt} &= \delta \frac{P}{m \xi} \left\{ \xi \sin F \sin \vartheta \cos \psi + [(\xi + 1) \cos F + e_x] \cos \vartheta \cos \psi - e_y \eta \sin \psi \right\}, \\ \frac{de_y}{dt} &= \delta \frac{P}{m \xi} \left\{ -\xi \cos F \sin \vartheta \cos \psi + [(\xi + 1) \sin F + e_x] \cos \vartheta \cos \psi + e_x \eta \sin \psi \right\}, \\ \frac{di_x}{dt} &= \delta \frac{P}{m \xi} \cdot \frac{1}{2} \bar{\varphi} \cos F \sin \psi, \\ \frac{di_y}{dt} &= \delta \frac{P}{m \xi} \cdot \frac{1}{2} \bar{\varphi} \sin F \sin \psi, \\ \frac{dF}{dt} &= \frac{\xi^2}{h^3} + \delta \frac{P}{m \xi} \cdot \xi \eta \sin \psi, \\ \frac{dm}{dt} &= -\delta \frac{P}{w}, \end{aligned} \right\}$$

$$\xi = 1 + e_x \cos F + e_y \sin F$$

$$\eta = i_x \sin F - i_y \cos F$$

$$\bar{\varphi} = 1 + i_x^2 + i_y^2$$

$w$  - скорость истечения

Краевые условия:  $t = 0: h = h_0, e_x = e_{x0}, e_y = e_{y0}, i_x = i_{x0}, i_y = i_{y0}, m = m_0 \quad t = T: h = h_k, e_x = e_{xk}, e_y = e_{yk}, i_x = i_{xk}, i_y = i_{yk}$

## 4.2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Функционал:

$$J = \int_0^T \delta \frac{P}{w} dt \rightarrow \min$$

Гамильтониан:

$$H = -\delta \frac{P}{w} (1 + p_m) + \frac{\xi^2}{h^3} p_F + \delta \frac{P}{m \xi} (A_\tau \cos \vartheta \cos \psi + A_r \sin \vartheta \cos \psi + A_n \sin \psi)$$

$$A_\tau = h p_h + [(\xi + 1) \cos F + e_x] p_{ex} + [(\xi + 1) \sin F + e_y] p_{ey}$$

$$A_r = \xi (\sin F \cdot p_{ex} - \cos F \cdot p_{ey})$$

$$A_n = \eta (-e_y p_{ex} + e_x p_{ey}) + \frac{1}{2} \Phi (\cos F \cdot p_{ix} + \sin F \cdot p_{iy}) + \xi \eta \cdot p_F$$

Оптимальное управление:

$$\cos \vartheta = \frac{A_r}{A_\tau^2 + A_r^2} \quad \cos \psi = \frac{A_\tau^2 + A_r^2}{A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2} \quad \delta = \begin{cases} 1, \psi_s > 0 \\ 0, \psi_s \leq 0 \end{cases} \quad \text{или } \delta \equiv 1$$

$$\sin \vartheta = \frac{A_r}{A_\tau^2 + A_r^2} \quad \sin \psi = \frac{A_n}{A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2} \quad \psi_s = -\frac{1 + p_m}{w} + \frac{h}{m \xi} (A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2)^{1/2}$$

Оптимальный гамильтониан:

$$H = -\delta \frac{P}{w} (1 + p_m) + \frac{\xi^2}{h^3} p_F + \delta \frac{P}{m \xi} (A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2)^{1/2}$$

Осредненный функционал не зависит от  $F$ , поэтому после осреднения  $\frac{dp_F}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial F} = 0$ . Так как рассматриваются межорбитальные перелеты, конечное значение  $F=F(T)$  не фиксировано  $\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} p_F(T) = 0$  (условие трансверсальности)

$\Rightarrow p_F \equiv 0 \Rightarrow$  в гамильтониане можно опустить члены с  $p_F \Rightarrow H = -\delta \frac{P}{w} (1 + p_m) + \delta \frac{P}{m} (\tilde{A}_\tau^2 + \tilde{A}_r^2 + \tilde{A}_n^2)^{1/2}$  где

$$\tilde{A}_\tau = \frac{h}{\xi} A_\tau, \tilde{A}_r = \frac{h}{\xi} A_r, \tilde{A}_n = \frac{h}{\xi} A_n$$

### 4.3. УРАВНЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ (П-СИСТЕМА)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \delta \frac{P}{m} (\tilde{A}_\tau^2 + \tilde{A}_r^2 + \tilde{A}_n^2)^{-1/2} \left( \tilde{A}_\tau \frac{\partial \tilde{A}_\tau}{\partial \mathbf{p}} + \tilde{A}_r \frac{\partial \tilde{A}_r}{\partial \mathbf{p}} + \tilde{A}_n \frac{\partial \tilde{A}_n}{\partial \mathbf{p}} \right), \\ \frac{dm}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_m} = -\delta \frac{P}{m}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\delta \frac{P}{m} (\tilde{A}_\tau^2 + \tilde{A}_r^2 + \tilde{A}_n^2)^{-1/2} \left( \tilde{A}_\tau \frac{\partial \tilde{A}_\tau}{\partial \mathbf{x}} + \tilde{A}_r \frac{\partial \tilde{A}_r}{\partial \mathbf{x}} + \tilde{A}_n \frac{\partial \tilde{A}_n}{\partial \mathbf{x}} \right), \\ \frac{dp_m}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial m} = \delta \frac{P}{m^2} (\tilde{A}_\tau^2 + \tilde{A}_r^2 + \tilde{A}_n^2)^{1/2}, \end{aligned} \right\}$$

где  $\mathbf{x} = (h, e_x, e_y, i_x, i_y)^\top$ ,  $\mathbf{p} = (p_h, p_{e_x}, p_{e_y}, p_{i_x}, p_{i_y})^\top$  - фазовый и сопряженный векторы,

$$\frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial \mathbf{p}} = \frac{h}{\xi} \frac{\partial A_i}{\partial \mathbf{p}}, i = \tau, r, n.$$

$$\frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial h} = \frac{1}{\xi} \left( A_i + h \frac{\partial A_i}{\partial h} \right); \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial e_x} = \frac{h}{\xi} \left( -\cos F \frac{\partial A_i}{\partial e_x} + A_i \right); \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial e_y} = \frac{h}{\xi} \left( -\sin F \frac{\partial A_i}{\partial e_y} + A_i \right);$$

$$\frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial i_x} = \frac{h}{\xi} \frac{\partial A_i}{\partial i_x}; \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial i_y} = \frac{h}{\xi} \frac{\partial A_i}{\partial i_y}; \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial F} = \frac{h}{\xi} \left[ e_x \sin F - e_y \cos F \frac{\partial A_i}{\partial F} + A_i \right], i = \tau, r, n.$$

$$\frac{\partial A_\tau}{\partial p_h} = h; \frac{\partial A_\tau}{\partial p_{ex}} = [(\xi + 1)\cos F + e_x]; \frac{\partial A_\tau}{\partial p_{ey}} = [(\xi + 1)\sin F + e_y]; \frac{\partial A_\tau}{\partial p_{ix}} = \frac{\partial A_\tau}{\partial p_{iy}} = \frac{\partial A_\tau}{\partial p_F} = 0;$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial p_h} = 0; \frac{\partial A_r}{\partial p_{ex}} = \xi \sin F; \frac{\partial A_r}{\partial p_{ey}} = -\xi \cos F; \frac{\partial A_r}{\partial p_{ix}} = \frac{\partial A_r}{\partial p_{iy}} = \frac{\partial A_r}{\partial p_F} = 0;$$

$$\frac{\partial A_n}{\partial p_h} = 0; \frac{\partial A_n}{\partial p_{ex}} = -\eta e_y; \frac{\partial A_n}{\partial p_{ey}} = \eta e_x; \frac{\partial A_n}{\partial p_{ix}} = \frac{1}{2} \bar{\varphi} \cos F; \frac{\partial A_n}{\partial p_{iy}} = \frac{1}{2} \bar{\varphi} \sin F; \frac{\partial A_n}{\partial p_F} = \xi \eta.$$

$$\frac{\partial A_\tau}{\partial h} = p_h; \frac{\partial A_\tau}{\partial e_x} = (\cos^2 F + 1)p_{ex} + \cos F \sin F \cdot p_{ey}; \frac{\partial A_\tau}{\partial e_y} = (\sin^2 F + 1)p_{ey} + \cos F \sin F \cdot p_{ex};$$

$$\frac{\partial A_\tau}{\partial i_x} = \frac{\partial A_\tau}{\partial i_y} = 0;$$

$$\frac{\partial A_\tau}{\partial F} = [(e_y \cos F - e_x \sin F)\cos F - (\xi + 1)\sin F]p_{ex} + [(e_y \cos F - e_x \sin F)\sin F + (\xi + 1)\cos F]p_{ey};$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial h} = 0; \frac{\partial A_r}{\partial e_x} = \cos F \cdot (p_{ex} \sin F - p_{ey} \cos F); \frac{\partial A_r}{\partial e_y} = \sin F \cdot (p_{ex} \sin F - p_{ey} \cos F);$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial i_x} = \frac{\partial A_r}{\partial i_y} = 0; \frac{\partial A_r}{\partial F} = (-e_x \sin F + e_y \cos F)(p_{ex} \sin F - p_{ey} \cos F) + \xi(p_{ex} \cos F + p_{ey} \sin F);$$

$$\frac{\partial A_n}{\partial h} = 0; \frac{\partial A_n}{\partial e_x} = \eta p_{ey} + \eta p_F \cos F; \frac{\partial A_n}{\partial e_y} = -\eta p_{ex} + \eta p_F \sin F; \frac{\partial A_n}{\partial i_x} = \frac{\partial A_n}{\partial i_y} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_n}{\partial F} &= (i_x \cos F + i_y \sin F)(e_x p_{ey} - e_y p_{ex}) + \frac{1}{2} \bar{\varphi} (p_{iy} \cos F - p_{ix} \sin F) + \\ &+ (e_y \cos F - e_x \sin F) \eta p_F + (i_x \cos F + i_y \sin F) \eta p_F. \end{aligned}$$

### 4.4. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

В задаче с фиксированным временем  $T$  уравнение невязок краевой задачи имеет вид:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} h(T) - h_k \\ e_x(T) - e_{xk} \\ e_y(T) - e_{yk} \\ i_x(T) - i_{xk} \\ i_y(T) - i_{yk} \\ p_m(T) \end{pmatrix} = 0$$

Это уравнение должно быть решено относительно неизвестных начальных значений сопряженных переменных  $\mathbf{p}(0), p_m(0)$ .

В задаче оптимального быстродействия  $\delta \equiv 1$ , а уравнения для  $m$  и  $p_m$  можно не рассматривать, заменив массу на выражение  $m = m_0 - (P/w) t$ . Уравнение невязок для задачи оптимального быстродействия имеет вид:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} h(T) - h_k \\ e_x(T) - e_{xk} \\ e_y(T) - e_{yk} \\ i_x(T) - i_{xk} \\ i_y(T) - i_{yk} \\ \partial H(T) / \partial T \end{pmatrix} = 0$$

Это уравнение должно быть решено относительно неизвестных начальных значений сопряженных переменных  $\mathbf{p}(0)$  и времени перелета  $T$ .

Уравнение метода продолжения:  $\frac{dz}{d\tau} = - \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right]^{-1} \mathbf{b}$  где  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} p_h \\ p_{ex} \\ p_{ey} \\ p_{ix} \\ p_{iy} \\ T \end{pmatrix}$  (быстродействие) или  $\mathbf{z}=\mathbf{p}$  (фиксированное время);

$\mathbf{b}=\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)$  - вектор невязок при начальном значении  $\mathbf{z}$  (при  $\tau=0$ ). Краевая задача решается интегрированием дифференциальных уравнений метода продолжения по  $\tau$  от 0 до 1. Частные производные от вектора невязок  $\mathbf{f}$  по параметрам краевой задачи  $\mathbf{z}$  и решение системы линейных уравнений для определения правых частей этих дифференциальных уравнений определяются численно.

## 4.5. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Краевая задача решается методом продолжения по параметру.

Для вычисления невязок  $\mathbf{f}$  интегрируются осредненные по истинной долготе  $F$  уравнения оптимального движения. Эти уравнения имеют особенность при  $\mathbf{p}=0$ , поэтому использовать нулевое начальное приближение для вектора сопряженных переменных нельзя.

В задаче оптимального быстрогодействия при использовании метода продолжения по параметру в качестве начального приближения для  $\mathbf{p}(0)$  выбиралось  $p_h=1$ , если большая полуось конечной орбиты превышает большую полуось начальной орбиты и  $p_h=-1$  в противном случае. Остальные компоненты вектора  $\mathbf{p}$  выбирались равными 0, а начальное приближение для безразмерного времени перелета  $T|_{\tau=0}=1$  (в единицах начальной орбиты). С таким начальным приближением удалось решить задачи об оптимальном по быстродействию перелете с высокоэллиптической промежуточной орбиты (ПО) на ГСО при наклонении ПО  $0^\circ-75^\circ$  и высоте апогея ПО 10000-120000 км. Если высота апогея ПО находилась вне этого диапазона, для решения задачи в качестве начального приближения приходилось использовать предварительно полученное решение задачи перелета с ПО с достаточно близкой высотой апогея.

Осреднение уравнений оптимального движения по истинной долготе  $F$  осуществляется численно в процессе интегрирования этих уравнений.

Вычисление частных производных от функции невязок  $\mathbf{f}$  по параметрам краевой задачи  $\mathbf{p}(0)$ ,  $T$ , необходимых для применения метода продолжения, производится также численно по конечно-разностным формулам первого порядка.

Таким образом, для вычисления правых частей дифференциальных уравнений метода продолжения используется численное интегрирование численно осредненных уравнений оптимального движения и полученные численным дифференцированием частные производные от функции невязок краевой задачи по ее параметрам.

## 4.6. ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ В НЕОСРЕДНЕННОМ ДВИЖЕНИИ

Малый уровень реактивного ускорения (по сравнению с гравитационным) обуславливает близость эволюции орбитальных элементов в осредненном и неосредненном движении в эллиптическом случае.

Для проверки применимости найденного для осредненных уравнений движения оптимального управления, найденные оптимальные начальные значения параметров краевой задачи подставлялись в неосредненные уравнения оптимального движения, и эти уравнения численно интегрировались. Начальное значение истинной долготы  $F$  выбиралось достаточно произвольно (обычно соответствующее перигею или апогею начальной орбиты), а начальное значение сопряженной к ней переменной  $p_F$  принималось равной 0 (см. замечание выше).

В результате этого численного интегрирования определялись фактические невязки на правом конце траектории и программа оптимального управления. Для перелетов на ГСО с высокоэллиптических промежуточных орбит при уровне реактивного ускорения 0.1-0.5 мм/с<sup>2</sup> разница в невязках при решении осредненной и неосредненной задач имела величину порядка 0.1%.

Примеры использования оптимального управления, полученного для осредненной задачи к неосредненным уравнениям движения приводятся в следующем разделе.

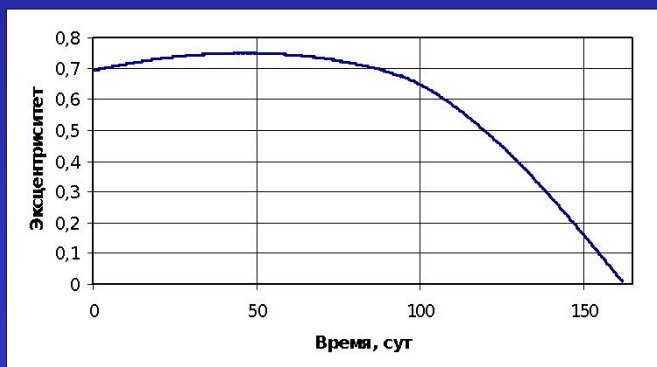
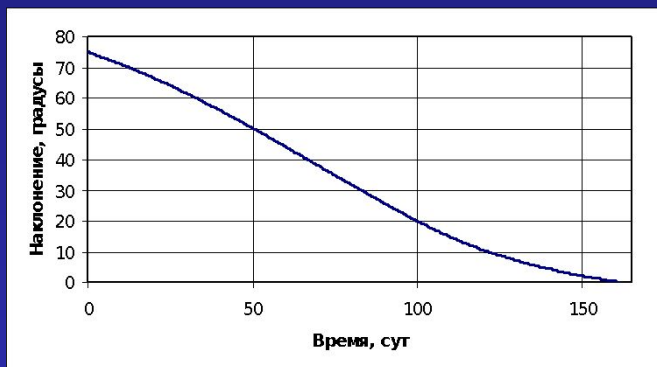
## 4.7. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТЫ В ОПТИМАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ И ОПТИМАЛЬНАЯ ПРОГРАММА УПРАВЛЕНИЯ (ОПТИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЕ)



Эволюция орбитальных элементов при высоте апогея промежуточной орбиты ниже оптимальной ( $h_a = 30000$  км,  $i = 75^\circ$ )

1. Средние за виток значения радиуса апогея, большой полуоси и эксцентриситета имеют максимум.

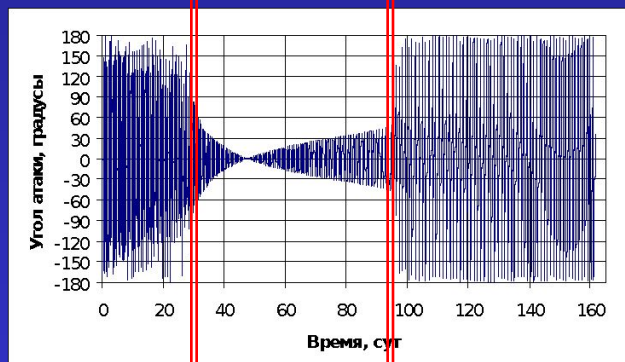
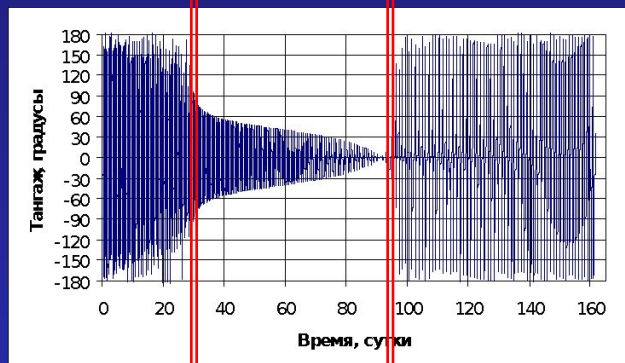
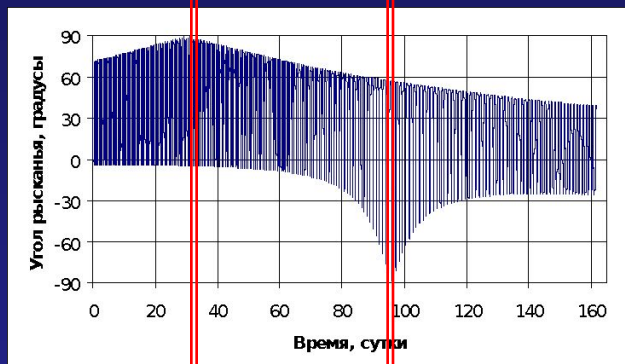
2. Радиус перигея монотонно возрастает.





разгон-  
торможение

разгон

торможение-  
разгон

## Оптимальное управление вектором тяги при высоте апогея промежуточной орбиты ниже оптимальной ( $h_a = 30000$ км, $i = 75^\circ$ )

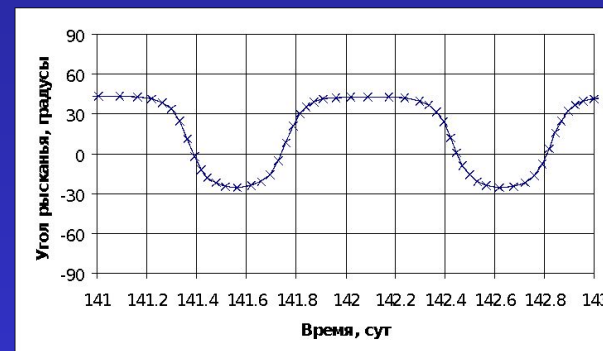
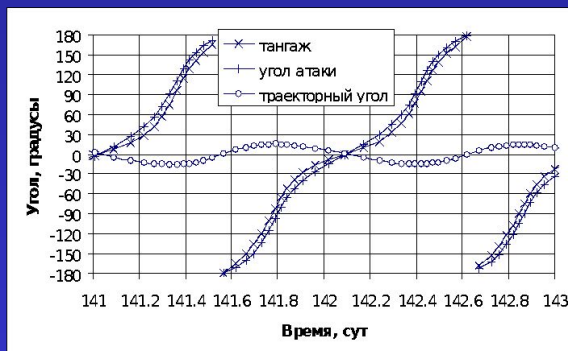
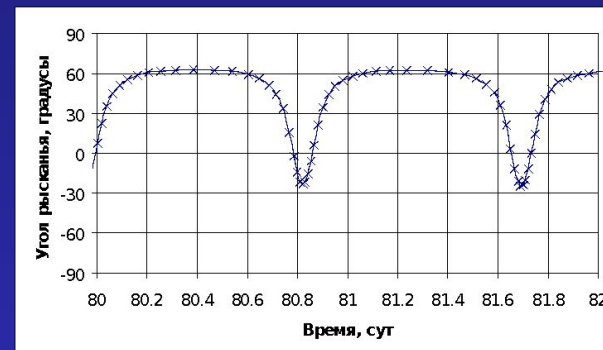
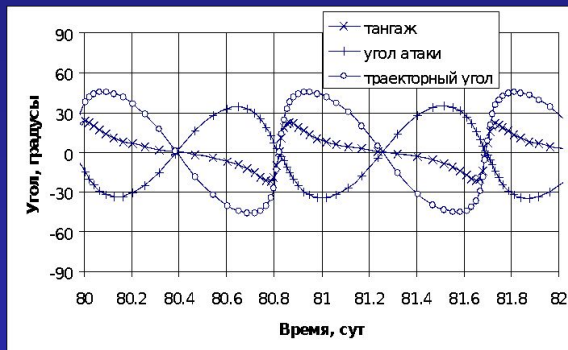
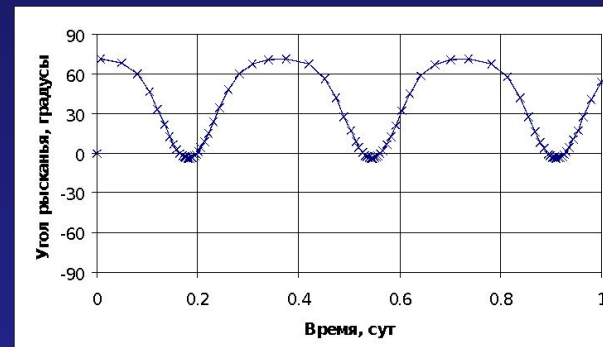
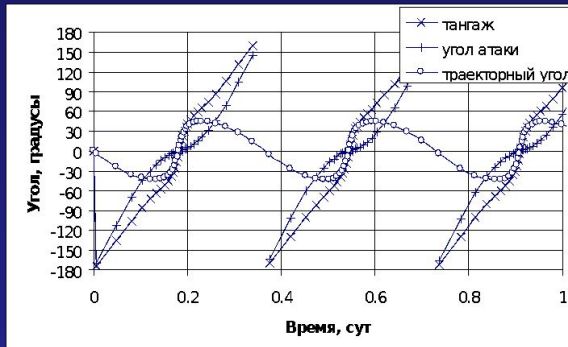
Траектория перелета имеет 3 фазы.

На 1-й фазе осуществляется разгон всюду кроме небольшой дуги орбиты в окрестности апогея (этим частично компенсируется увеличение высоты перигея), а максимальное значение угла рысканья в апогее на витке возрастает с  $\sim 70^\circ$  в начале перелета до  $90^\circ$  при достижении максимального эксцентриситета. Максимальный угол рысканья в перигее примерно постоянен и составляет менее  $10^\circ$ .

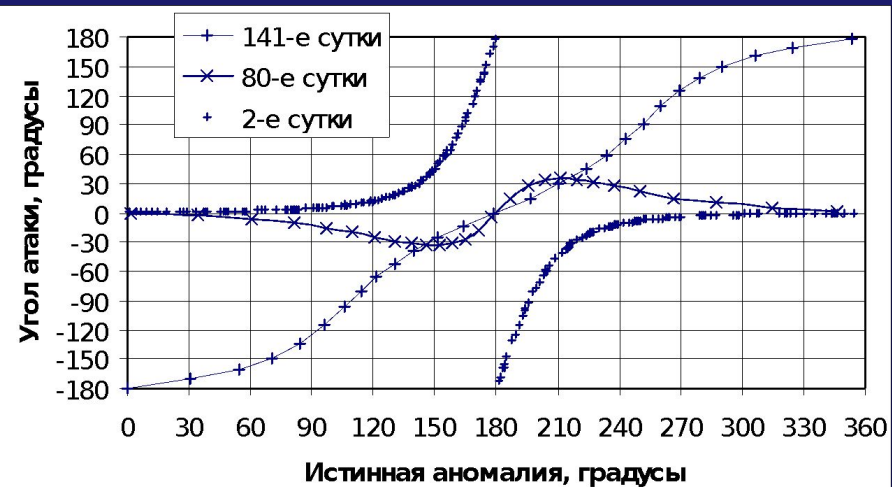
На 2-й фазе происходит разгон на всем витке до достижения максимального значения высоты апогея. Максимальное значение угла рысканья в апогее уменьшается почти линейно по времени от  $90^\circ$  до  $\sim 60^\circ$ , а в перигее - увеличивается, достигая  $90^\circ$  при достижении максимальной высоты апогея. Угол рысканья в перигее достигает больших значений, чем угол рысканья в апогее, что можно объяснить большей эффективностью подъема высоты перигея на этом участке.

На 3-й фазе происходит разгон в апогее и торможение в перигее, а максимальный угол рысканья на витке снижается до  $\sim 40^\circ$  в апогее и до  $\sim 25^\circ$  в перигее.

## ОПТИМАЛЬНАЯ ПРОГРАММА УПРАВЛЕНИЯ ВЕКТОРОМ ТЯГИ

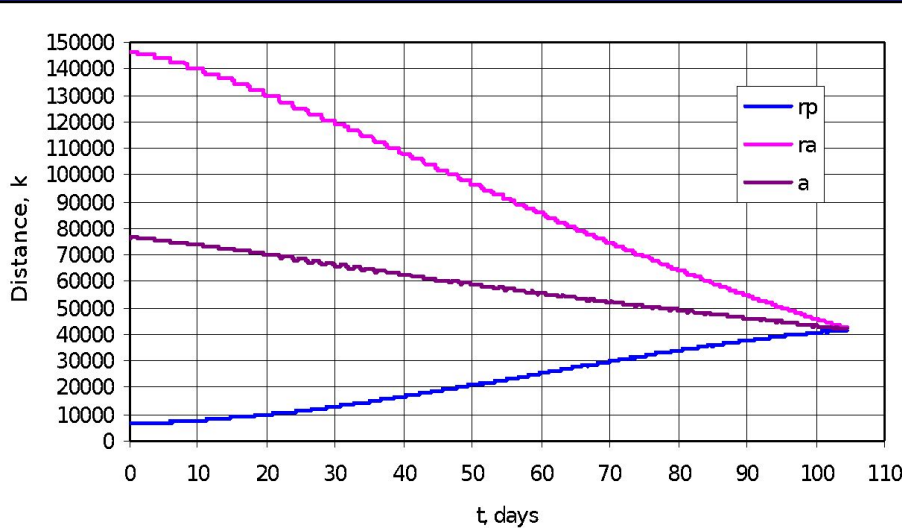


## ОПТИМАЛЬНАЯ ПРОГРАММА УПРАВЛЕНИЯ ВЕКТОРОМ ТЯГИ

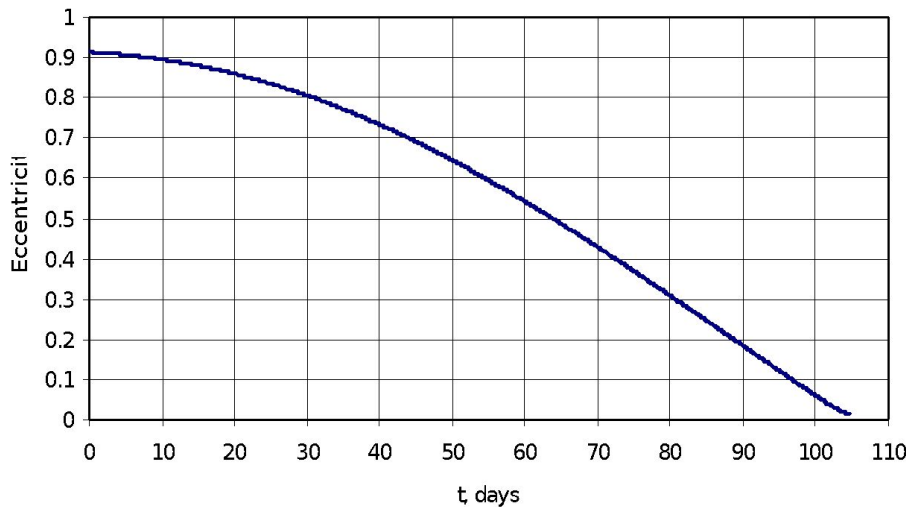


## Эволюция орбитальных элементов и управление вектором тяги при оптимальной высоте апогея промежуточной орбиты ( $h_a = 140000$ км, $i = 65^\circ$ )

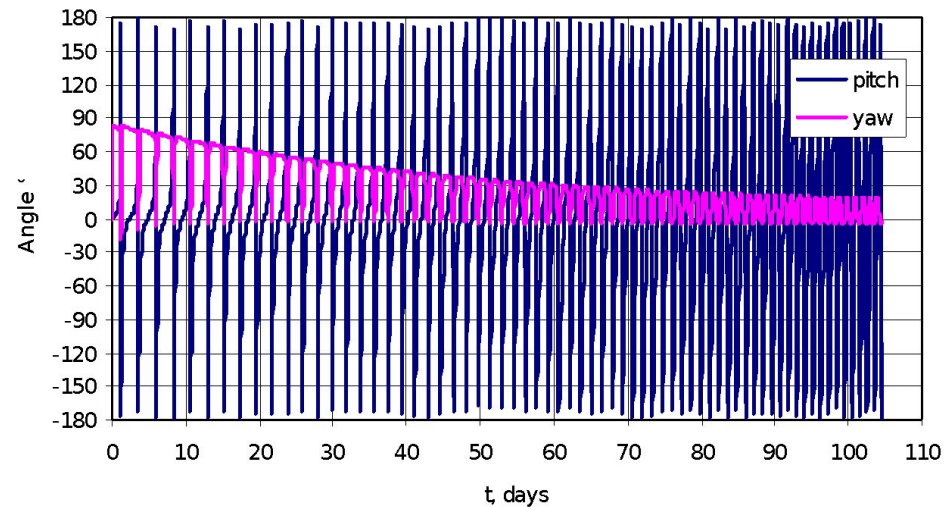
1. Средние за виток значения радиуса апогея, большой полуоси и эксцентриситета монотонно уменьшаются.
2. Средний за виток радиус перигея монотонно растет.
3. Траектория перелета имеет 1 фазу. В апогее происходит разгон, а в перигее - торможение. Максимальный угол рысканья на витке монотонно снижается с  $90^\circ$  до  $\sim 30^\circ$ .



Радиусы перигея, апогея и большая полуось



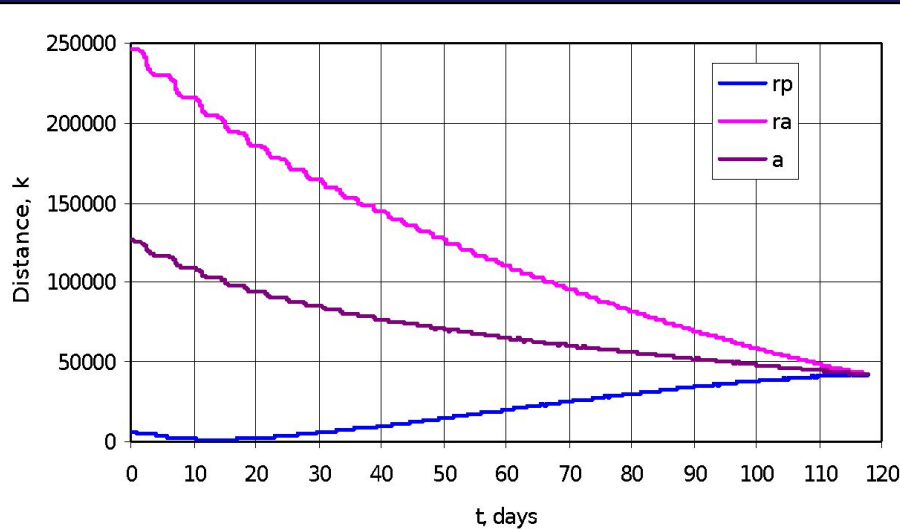
Эксцентриситет



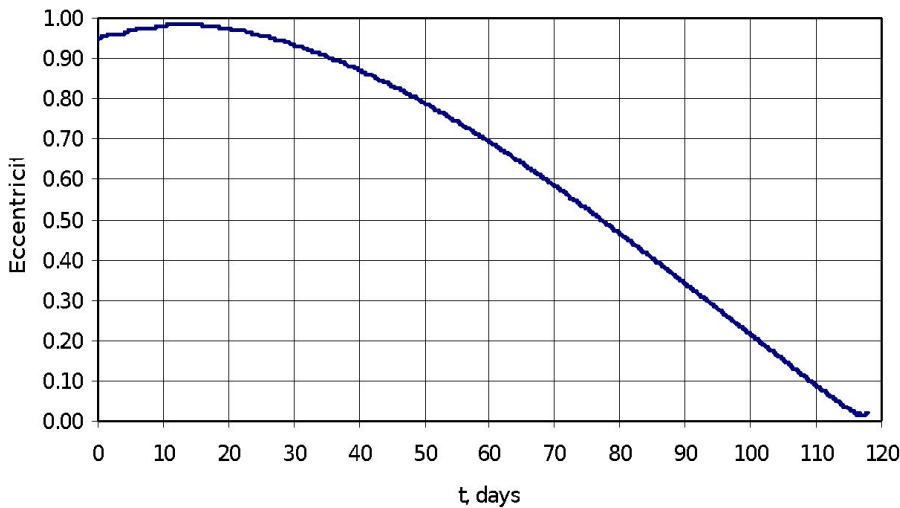
Углы тангажа и рысканья

## Эволюция орбитальных элементов и управление вектором тяги при высоте апогея промежуточной орбиты выше оптимальной ( $h_a = 240000$ км, $i = 65^\circ$ )

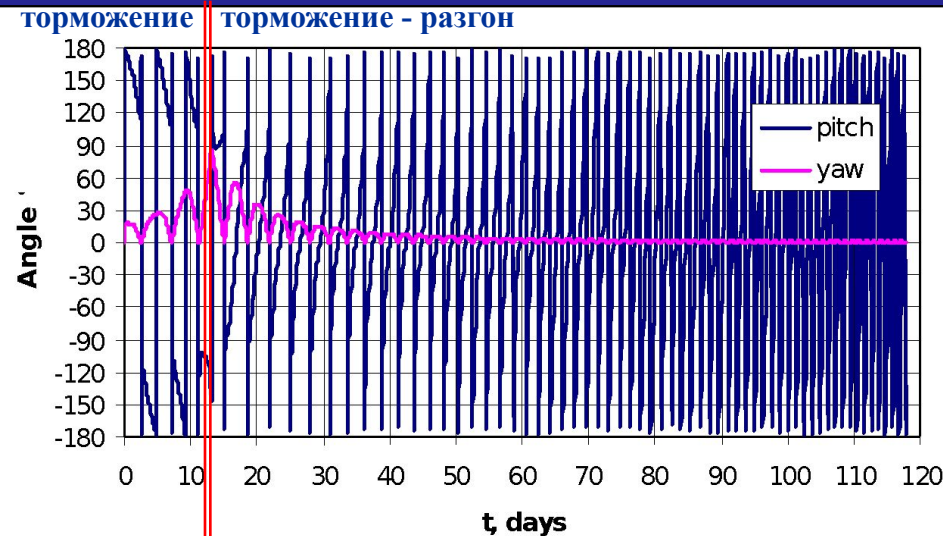
1. Средние за виток значения радиуса апогея и большой полуоси монотонно уменьшаются.
2. В начале перелета радиус перигея уменьшается, а эксцентриситет - растет.
3. Траектория перелета имеет 2 фазы. На 1-й фазе осуществляется торможение на всем витке, а максимальный угол рысканья на витке увеличивается до  $\sim 90^\circ$  при достижении максимального эксцентриситета. На 2-й фазе происходит разгон в апогее и торможение в перигее, а максимальный угол рысканья на витке снижается почти до 0.



Радиусы перигея, апогея и большая полуось

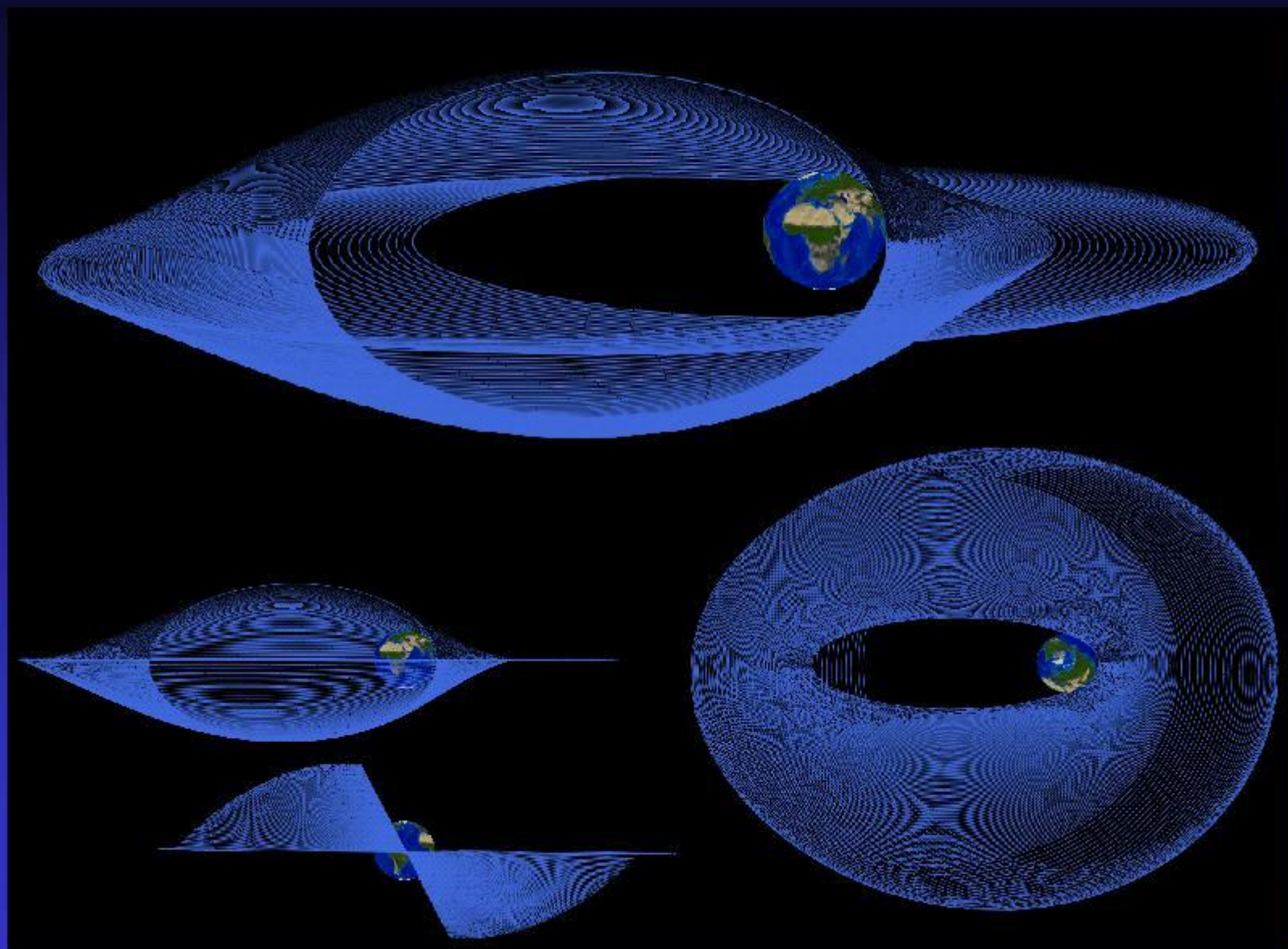


Эксцентриситет



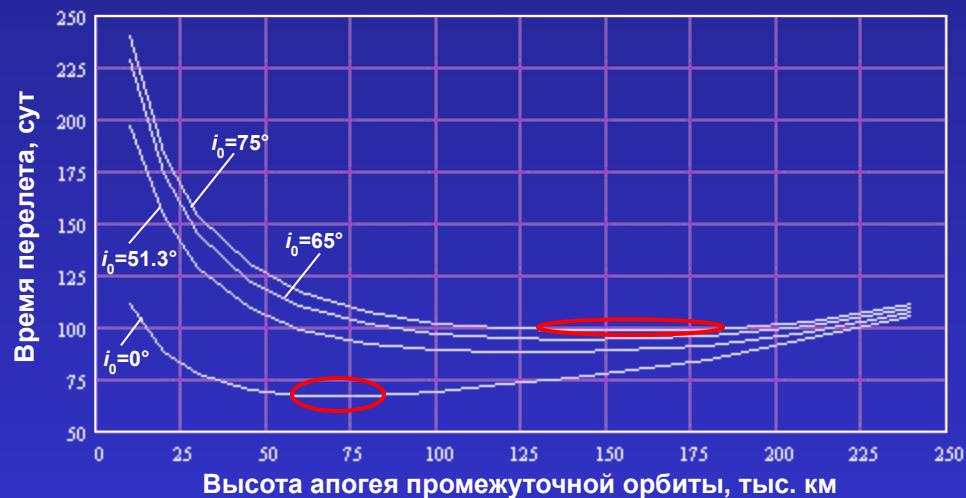
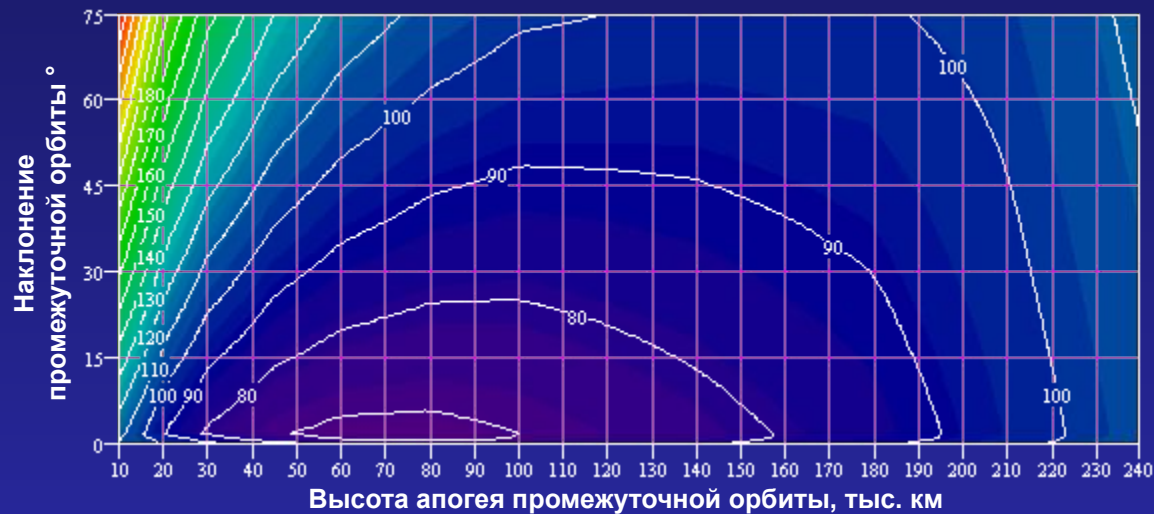
Углы тангажа и рысканья

## ПРИМЕР ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА НА ГСО



## 4.8. РЕЗУЛЬТАТЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕЛЕТОВ НА ГСО С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ОРБИТЫ

Высота перигея промежуточной орбиты 250 км,  
 масса КА на ГСО 450 кг, тяга ЭРДУ 0.166 Н, удельный импульс ЭРДУ 1500 с



## 4.9. ВЫВОДЫ

1. Метод продолжения по параметру можно эффективно использовать для оптимизации многовитковых перелетов с малой тягой, что продемонстрировано на примере оптимизации по быстродействию перелетов с эллиптической промежуточной орбиты на ГСО.
2. В настоящее время не обнаружено каких-либо существенных ограничений на возможность использования разработанного метода в задачах с фиксированным временем и с различными краевыми условиями (межорбитальный перелет, набор заданной орбитальной энергии, разворот плоскости орбиты и т.д.).
3. Не обнаружено каких-либо ограничений на возможность учета внешних возмущающих сил при оптимизации траектории КА разработанным методом. Возмущающие силы, выраженные как через орбитальные элементы, так и через фазовый вектор КА, относительно легко могут быть введены в уравнения разработанного метода так как операции осреднения уравнений движения и вычисления производных от невязок краевой задачи по ее параметрам реализованы в рамках этого метода численно. Для учета возмущающих ускорений в уравнениях движения необходимы выражения для частных производных первого порядка от компонент этих ускорений по орбитальным элементам.
4. Разработанный метод позволил провести исчерпывающий анализ оптимальных по быстродействию перелетов с эллиптической промежуточной орбиты на ГСО, включая анализ влияния параметров промежуточной орбиты и основных проектных параметров КА на характеристики перелета и определение номинальных программ управления вектором тяги электроракетной двигательной установки КА.



# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный метод продолжения показал высокую эффективность для задачи оптимизации траекторий КА с идеально регулируемым двигателем малой тяги. Комбинация двух вариантов метода продолжения - базового метода и метода продолжения по гравитационному параметру - позволяет быстро и исчерпывающе проводить анализ межпланетных траекторий.

С использованием метода продолжения были оптимизированы траектории КА с малой тягой, оканчивающиеся или начинающиеся в точке либрации  $L_2$  системы Земля-Луна. Эти траектории использовались для построения квазиоптимальных траекторий перелета между орбитами искусственных спутников Земли и Луны.

Специально разработанная версия метода продолжения позволила провести полномасштабный анализ оптимальных по быстродействию пространственных траекторий перелета КА с малой тягой с эллиптической промежуточной орбиты на ГСО.

Таким образом, характеристики метода продолжения делают его полезным и эффективным инструментом анализа траекторий КА с ЭРДУ.