

Лекция №3

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ
ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО
ПЕРЕМЕННОГО

ПЛАН

1. Дифференцирование функции комплексного переменного. Условие Коши-Римана.
2. Аналитическая функция. Дифференциал.
3. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие о конформном изображении.

•

*

1. Дифференцирование функции комплексного переменного.

Пусть однозначная функция $\omega = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z , включая и саму точку. Тогда предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

если он существует, называется **производной функции $f(z)$ в точке z** , а функция $f(z)$ называется **дифференцируемой в точке z** .

Заметим, что Δz любым образом стремится к нулю, т.е. точка $z + \Delta z$ может приближаться к z по любому из бесконечного множества различных направлений.

* Из дифференцируемости функции $f(z)$ в некоторой точке z следует ее непрерывность в этой точке (отношение $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ при $\Delta z \rightarrow 0$ может стремиться к конечному пределу $f'(z)$ лишь при условии, что $\Delta\omega \rightarrow 0$). Обратное утверждение не имеет смысла.

При каких условиях функция $\omega = f(z)$ будет дифференцируемой в данной точке?

Теорема. Если функция $\omega = u(x; y) + iv(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $z = xz + iy$, причем в этой точке действительные функции $u(x; y)$ и $v(x; y)$ дифференцируемы, то для дифференцируемости функции $\omega = f(z)$ в точке z необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Эти равенства называются *Условиями Коши-Римана* (или *Эйлера-Даламбера*).

* Необходимость

Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z , тогда

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) \text{ существует и не зависит}$$

от пути, по которому $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0$. Можно считать, что точка $z + \Delta z$ приближаться к точке z по прямой, параллельной действительной оси (оси Ox), т.е. $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0, \Delta y = 0$. Тогда

$$f'(z) =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x; y) + iv(x + \Delta x; y)) - (u(x; y) + iv(x; y))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x; y) - u(x; y)) + i(v(x + \Delta x; y) - v(x; y))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u + i\Delta_x v}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

* Если же точка $z + \Delta z$ приближаться к точке z по прямой, параллельной мнимой оси (оси Oy), т.е. $\Delta z = \Delta y \rightarrow 0, \Delta x = 0$. Тогда

$$f'(z) =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x; y + \Delta y) + iv(x; y + \Delta y)) - (u(x; y) + iv(x; y))}{i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta y u + i\Delta y v}{i\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Сравнив найденные пределы, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = f'(z).$$

Отсюда следует: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$

* Достаточность.

Пусть теперь условия Коши-Римана выполняются. Докажем, что функция $f(z)$ дифференцируема.

Так как функции $u(x; y)$ и $v(x; y)$ дифференцируемы в точке $z = x + iy$, то их приращения можно представить в виде $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1$, $\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \alpha_2$, где α_1 и α_2 - бесконечно малые более высокого порядка. Чем $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} &= \frac{(u(x+\Delta x; y+\Delta y) + iv(x+\Delta x; y+\Delta y)) - (u(x; y) + iv(x; y))}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \alpha_2\right)}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + i\frac{\partial v}{\partial y} \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \end{aligned}$$

$+ \frac{\alpha_1 + i\alpha_2}{\Delta x + i\Delta y}$. Заменяя в числителе $\frac{\partial u}{\partial y}$ на $-\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ на $\frac{\partial u}{\partial x}$, получим

$$* \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \alpha_3, \text{ где } \alpha_3 = \frac{\alpha_1 + i\alpha_2}{\Delta x + i\Delta y}.$$

$$\text{T.e. } \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \alpha_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_3,$$

а α_3 - бесконечно малая высшего порядка относительно $|\Delta x|$. Отсюда следует, что $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = f'(z)$ существует. При

$$\text{этом } f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \text{ ч.т.д.}$$

С учетом условий Коши-Римана производную дифференцируемой функции $f(z)$ можно находить по формулам: $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial y},$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

✳️ Правила дифференцирования функций действительного переменного справедливы и для функций комплексного переменного, дифференцируемых в точке z .

2. Аналитическая функция. Дифференциал.

Фундаментальным понятием в ТФКП является понятие аналитической функции.

Однозначная функция $f(z)$ называется ***аналитической в точке z*** , если она дифференцируема (выполнены условия Коши-Римана) в некоторой окрестности этой точки. Функция называется ***аналитической в области D*** , если она дифференцируема в каждой точке $z \in D$.

Точки плоскости z , в которых однозначная функция $f(z)$ аналитична, называются ***правильными*** точками $f(z)$. Точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются ***особыми*** точками функции.

✳ Пусть функция $f(z)$ аналитична в точке z . Тогда

$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = f'(z)$. Отсюда следует, что $\frac{\Delta \omega}{\Delta z} = f'(z) + \alpha$, где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$. Тогда приращение функции можно записать так $\Delta \omega = f'(z)\Delta z + \alpha\Delta z$. Если $f'(z) \neq 0$, то первое слагаемое $f'(z)\Delta z$ является при $\Delta z \rightarrow 0$ бесконечно малой того же порядка, что и Δz ; второе слагаемое $\alpha\Delta z$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δz . Следовательно, первое слагаемое составляет главную часть приращения функции $\omega = f(z)$. **Дифференциалом $d\omega$** аналитической функции $\omega = f(z)$ в точке z называется главная часть её приращения, т.е. $d\omega = f'(z)\Delta z$, или $d\omega = f'(z)dz$.

Замечание. Если функция $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ аналитична в некоторой области D , то функции $u(x; y)$ и $v(x; y)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$. Функции u и v являются **гармоническими функциями**.

Пример. Проверить, является ли функция $\omega = z^2$ аналитической. Найти её производную.

Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие о конформном изображении

Пусть функция $\omega = f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$

Функция $\omega = f(z)$ отображает точку z_0 плоскости z в точку $\omega_0 = f(z_0)$ плоскости ω . Пусть произвольная точка $z = z_0 + \Delta z$ из окрестности точки z_0 перемещается к точке z_0 по некоторой непрерывной кривой l . Тогда в плоскости ω соответствующая точка $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ будет перемещаться к точке ω_0 по некоторой кривой L , являющейся отображением кривой l в плоскости ω .

По определению производной $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z}$. Отсюда

$$\text{следует, что } |f'(z_0)| = \left| \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\omega}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta\omega|}{|\Delta z|}.$$

Величина $|\Delta z| = |z - z_0|$ представляет собой расстояние между точками z_0 и $z_0 + \Delta z$, а $|\Delta \omega|$ - расстояние между точками ω_0 и $\omega_0 + \Delta \omega$. Следовательно, $|f'(z_0)|$ есть предел отношения бесконечно малого расстояния между отображенными точками ω_0 и $\omega_0 + \Delta \omega$ к бесконечно малому расстоянию между точками z_0 и $z_0 + \Delta z$. Этот предел не зависит от выбора кривой l , проходящей через точку z_0 . Следовательно, предел $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta \omega|}{|\Delta z|} = |f'(z_0)|$ в точке z_0 постоянен, т.е. одинаков во всех направлениях.

Геометрический смысл модуля производной: величина $|f'(z_0)|$ определяет коэффициент растяжения (подобия) в точке z_0 при отображении $\omega = f(z)$. Величину $|f'(z_0)|$ называют **коэффициентом растяжения**, если $|f'(z_0)| > 1$, или **коэффициентом сжатия**, если $|f'(z_0)| < 1$.

Пример. Найти коэффициент растяжения (сжатия) для функции $\omega = \frac{1}{2}z^2$ в точке $z_0 = 3 - 4i$.

*Для аргумента производной в точке z_0 имеем:

$$\arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\arg \Delta \omega - \arg \Delta z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta \omega - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z = \alpha_2 - \alpha_1,$$

где α_1 и α_2 - углы, которые образуют касательные к кривым l и L соответственно в точках z_0 и ω_0 с положительными направлениями действительных осей на плоскостях z и ω .

Отсюда $\alpha_2 = \alpha_1 + \arg f'(z_0)$. Это означает, что $\arg f'(z_0)$ - это угол, на который нужно повернуть касательную к кривой l в точке z_0 , для того, чтобы получить направление касательной к кривой L в точке ω_0 .

Геометрический смысл аргумента производной: $\arg f'(z_0)$ - это угол между отображенным и первоначальными направлениями касательных к кривым l и L в точках z_0 и ω_0 соответственно.

В силу аналитичности функции $f(z)$ в точке z_0 угол $\arg f'(z_0)$ один и тот же для всех кривых, проходящих через точку z_0 . Для другой пары кривых l_1 и L_1 в тех же точках z_0 и ω_0 будем иметь $\arg f'(z_0) = \alpha'_2 - \alpha'_1 = \varphi$. Таким образом $\arg f'(z_0) = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha'_2 - \alpha'_1$, т.е. если кривые l и l_1 образуют в точке z_0 на плоскости z угол $\varphi = \arg f'(z_0)$, то такой же угол $\varphi = \arg f'(z_0)$ будут образовывать в точке ω_0 кривые L и L_1 , являющиеся отображениями кривых l и l_1 на плоскости ω .

Это свойство отображения $\omega = f(z)$ называют **свойством сохранения (консерватизма) углов** в точке z_0 .

Отображение $\omega = f(z)$, обладающее свойством сохранения углов и постоянством растяжений в точке z_0 , называется **конформным** (т.е. отображением, сохраняющим форму).