

Практическое занятие №1

Популяционная динамика.
Исследование моделей
неограниченного и ограниченного
роста. Модели с запаздыванием

Тестовая задача. Ввод исходных данных, получение графика

$$R := 0.8$$

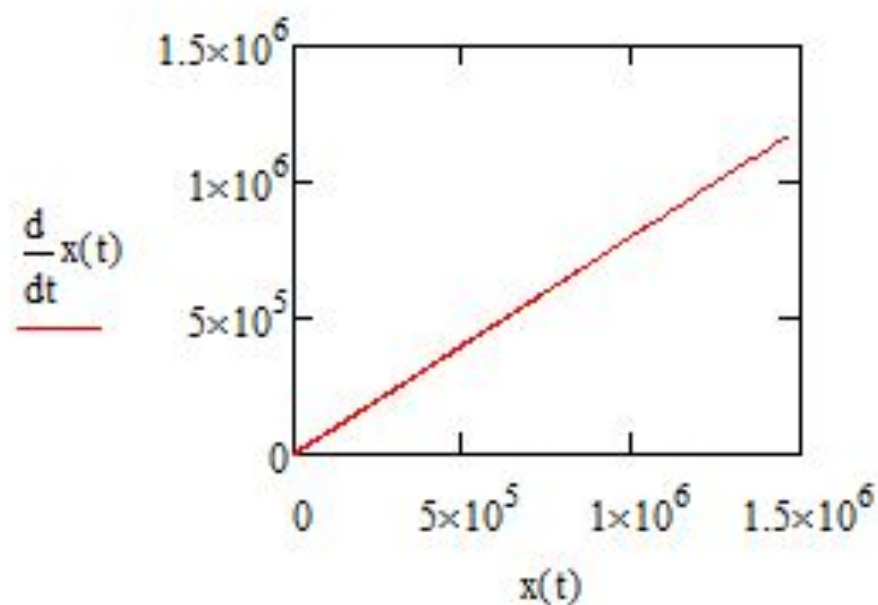
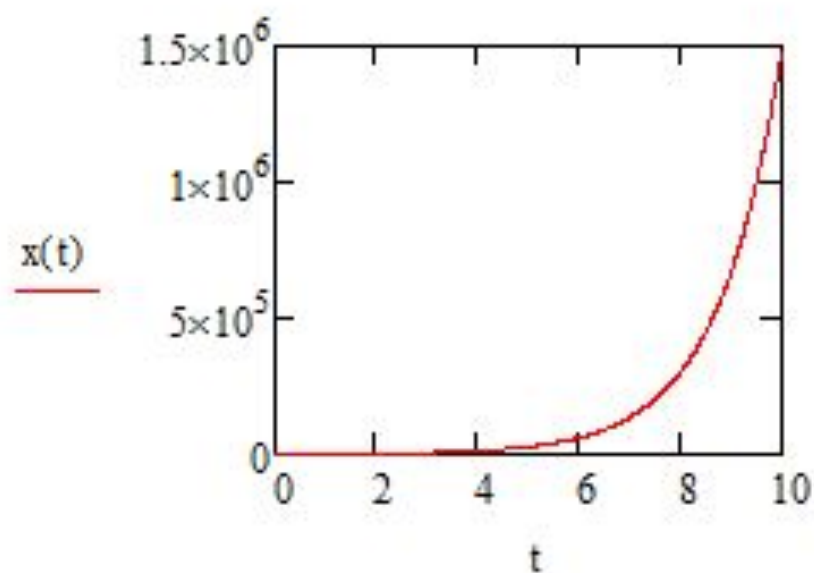
Given

$$x'(t) = R \cdot x(t)$$

$$x(0) = 500$$

$$x := \text{Odesolve}(t, 10)$$

+



Постановка задачи

Построить модель динамики численности популяции с неограниченным ростом

Условия

Предположим, что:

- Рассматривается популяция организмов, которые размножаются непрерывно, причем поколения широко перекрываются и особи разных генераций и возрастов могут встречаться одновременно.
- процессы иммиграции и эмиграции уравнивают друг друга;
- лишь рождение D и гибель S особей влияют на плотность популяции;
- все особи идентичны друг другу, в особенности в отношении их способности к размножению и вероятности гибели;
- мы можем игнорировать все сложности связанные с обоеполым размножением,
- ресурсы среды бесконечны и поэтому только врожденные способности особей к

Математическая модель 1

Введем следующие обозначения:

- x - величина популяции,
- D - мгновенная рождаемость на одну особь за бесконечно малый промежуток времени
- S -мгновенная смертность на одну особь за бесконечно малый промежуток времени (мы приравняем этот интервал к средней продолжительности одного поколения), тогда dx/dt -прирост популяции за бесконечно малый промежуток времени определяется уравнением: $dx/dt = X(D-S)/T$

Результаты моделирования

- с помощью уравнения $dx/dt = X(D-S)/T$ мы можем рассчитать численность особей в популяции в будущем x_t ,
- исходя из ее величины в данный момент x_0
- и времени, в течение которого происходит рост t .
- График этого уравнения при $g > 0$ представляет собой экспоненту, описывающую неограниченный рост.

Исследование модели неограниченного роста (Мальтуса)

Компьютерная модель

$D := 10$ родилось

$S := 2$ умерло

$T := 2$ рассматриваемый малый промежуток, где отсчитывалось D, S

Given

$$R := \frac{(D - S)}{T} \quad \text{мгновенная скорость роста популяции}$$

$x'(t) = R \cdot x(t)$ дифференциальное уравнения неограниченного роста Мальтуса

$x(0) = 36$ численность популяции в начале исследования

$x := \text{Odesolve}(t, 10)$

График 1 зависимости численности популяции от времени

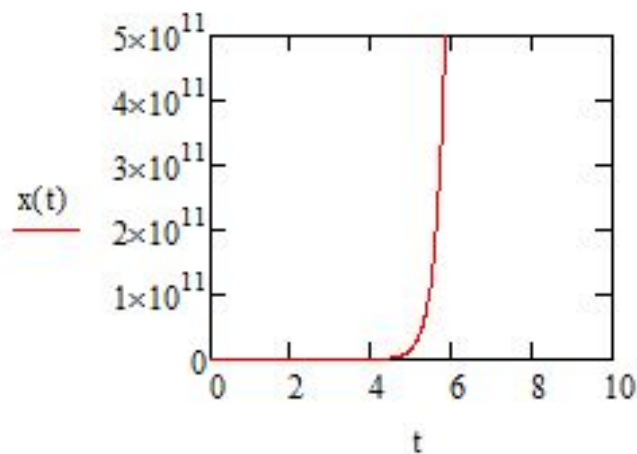
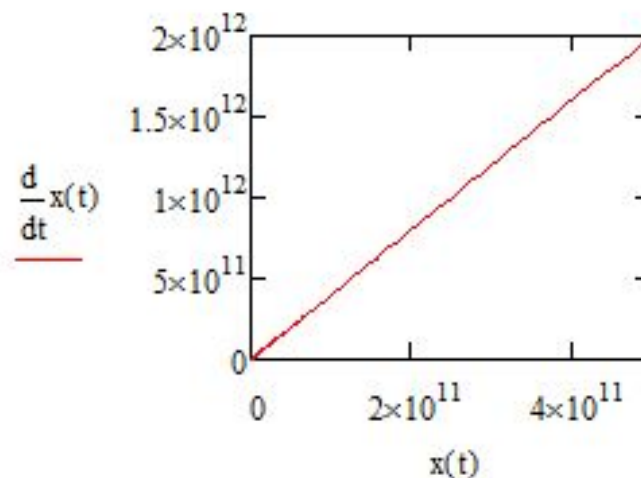


График 2 зависимости скорости роста популяции от численности популяции



Исследование с помощью модели1

- При одной и той же исходной величине популяции $X_0=36$ последовательно используйте значения γ , например: 3, 2, 1, 0.5.

Для этого задайте большее значение S или меньшее значение D (по заданию преподавателя).

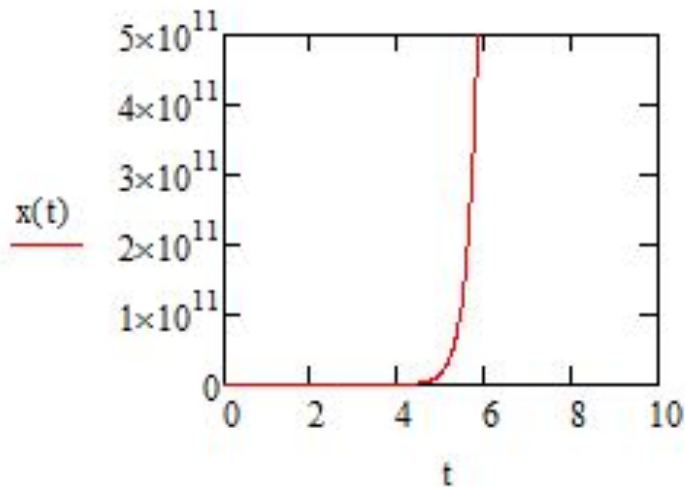
- Как изменяется характер роста популяции?

Сравнение графиков 1 и 2

Популяция1

$D := 10$ родилось

$S := 2$ умерло

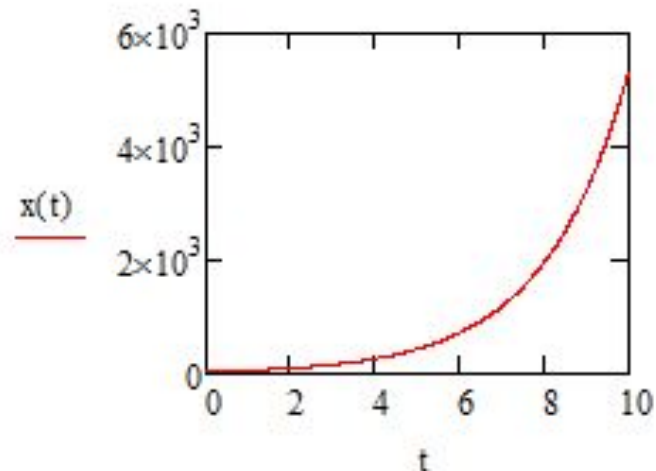


Популяция2

$D := 10$ родилось

$S := 9$ умерло

График 1 зависимости численности популяции от времени



Исследование с помощью модели

1

- Определите, сколько времени проходит до "популяционного взрыва" при различных значениях r .
- Если по графику не ясно - последовательно увеличивайте отрезок времени интегрирования в расчете и/или на оси графика.

$D := 10$ родилось

$S := 9$ умерло

График 1 зависимости численности популяции от времени

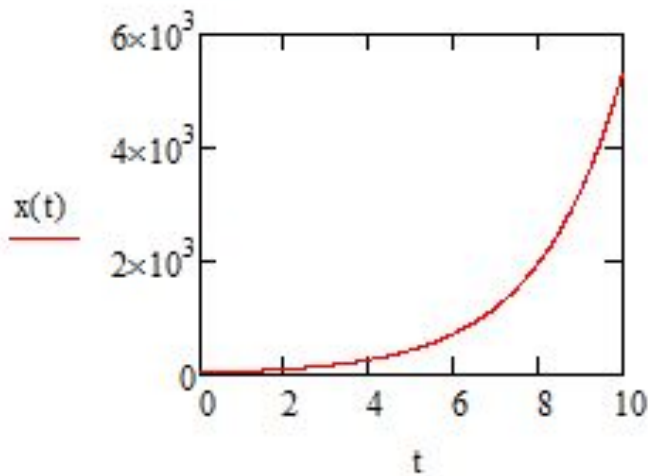


График 1 зависимости численности популяции от времени

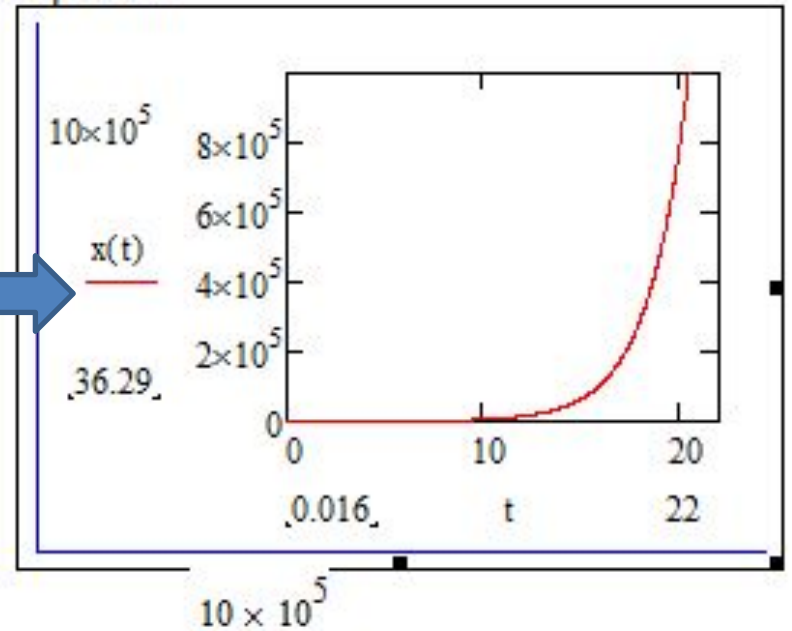


Таблица 1 Результаты исследования

Популяция1 Популяция2 Популяция3 Популяция4

Популяционный взрыв		Популяционный взрыв		Вымирание		Вымирание	
D	S	D	S	D	S	D	S
10	2	10	9	3	6	8	9
T=6		T=22		T=4		T=10	

Исследование с помощью модели

- Исследуйте поведение модели при значениях $\gamma < 0$ (например: -0.5, -0.8, -1, -2, -3, -5) и достаточно большой исходной величине популяции (например, 1000) и $t=2$.
- Для этого задайте большее значение D или меньшее значение S (по заданию преподавателя).

Что изменяется на графике и

Сравнение графиков 3 и 4

$$x(0) = 1000$$

численность популяции в начале исследования

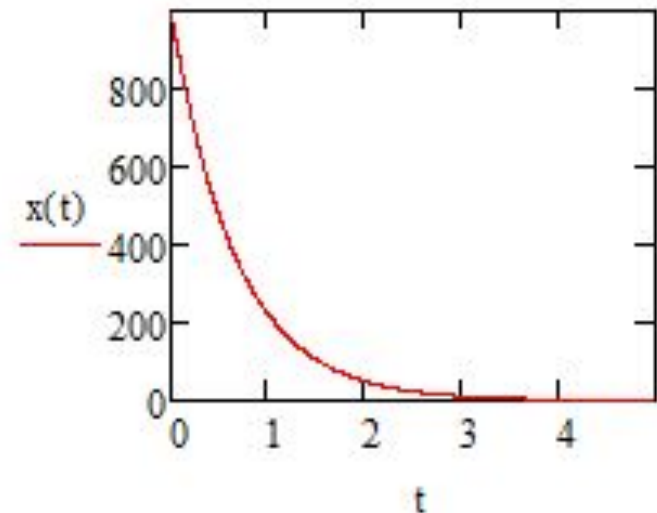
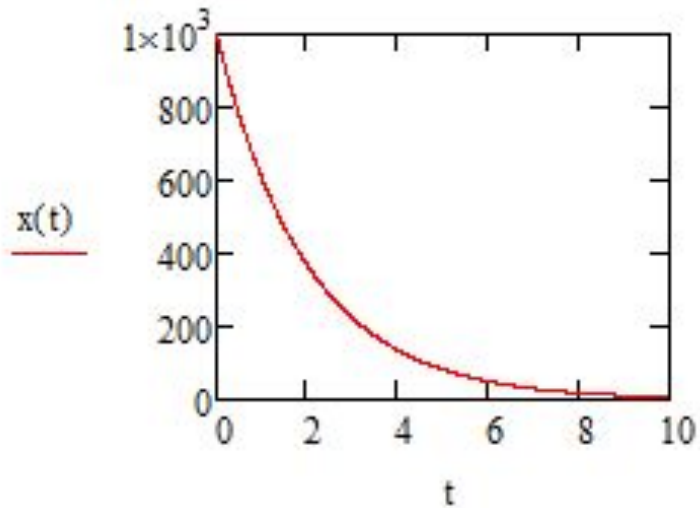
$$D := 8 \text{ родилось}$$

$$S := 9 \text{ умерло}$$

$$D := 3 \text{ родилось}$$

$$S := 6 \text{ умерло}$$

График 1 зависимости численности популяции от времени

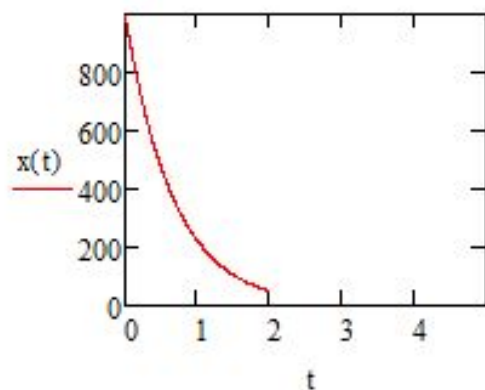


Исследование с помощью модели

- Последовательно увеличивайте границы интегрирования.
- Определите, сколько времени потребуется для вымирания популяции (будем считать, что это происходит, когда остается менее одной особи) при этих значениях g ?

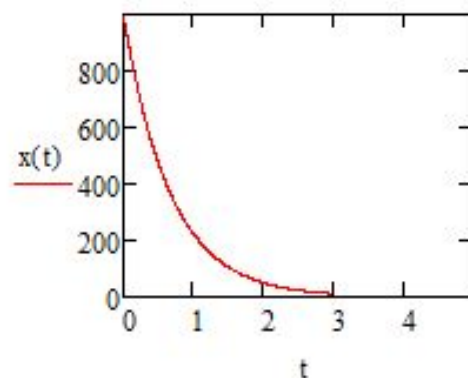
$x := \text{Odesolve}(t, 2)$

График 1 зависимости численности популяции от времени



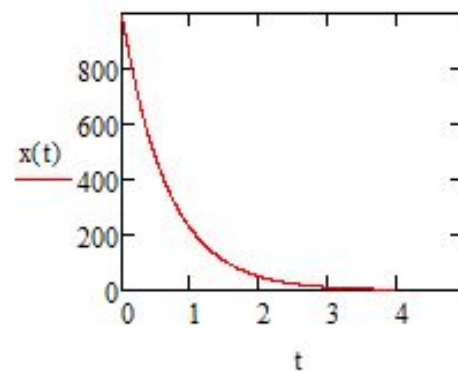
$x := \text{Odesolve}(t, 3)$

График 1 зависимости численности популяции от времени



$x := \text{Odesolve}(t, 4)$

График 1 зависимости численности популяции от времени



Общие выводы Результаты исследования проведенного с помощью модели

- Когда $R=0$, рождаемость и смертность уравниваются друг друга, вновь рожденные особи просто замещают погибавших, и величина популяции остается неизменной.
- Когда $R < 0$, популяция уменьшается и вымирает,
- когда $R > 0$, она неограниченно растет.

Постановка задачи

Построить модель динамики численности популяции с ограниченным ростом

Условия

Предположим, что:

- Рассматривается популяция организмов, которые размножаются непрерывно, причем поколения широко перекрываются и особи разных генераций и возрастов могут встречаться одновременно.
- процессы иммиграции и эмиграции уравнивают друг друга;
- лишь рождение D и гибель S особей влияют на плотность популяции;
- все особи идентичны друг другу, в особенности в отношении их способности к размножению и вероятности гибели;
- мы можем игнорировать все сложности связанные с обоеполым размножением,
- **в данных условиях среды наличные ресурсы могут обеспечивать существование в популяции не более K особей**

Математическая модель2

Введем следующие обозначения:

- x - величина популяции,
- D - мгновенная рождаемость на одну особь за бесконечно малый промежуток времени
- S -мгновенная смертность на одну особь за бесконечно малый промежуток времени, мы приравняем этот интервал к средней продолжительности одного поколения.
- K -это предельная плотность насыщения, или иначе поддерживающая емкость среды для данной популяции.
- $(K - x)/K$ — это доля всей емкости среды, остающаяся в данный момент в распоряжении растущей популяции.

Результаты моделирования

- Предположим, что удельная скорость роста популяции прямо пропорциональна доле неиспользованной емкости среды $(K - X)/K$.
- с помощью уравнения $dx/dt = R (K - X)/K / T$ мы можем рассчитать численность особей в популяции в будущем x_t ,
- исходя из ее величины в данный момент x_0
- и времени, в течение которого происходит рост $-t$.
- График этого уравнения при $g > 0$ представляет собой кривую переходящую в горизонтальную линию при достижении $X=K$.
- Популяция прекращает рост при достижении численности K , когда среда обитания оказывается полностью занятой.

Компьютерная модель

Исследование модели ограниченного роста в уравнении логистического роста (Ферхюльст)

$D := 5$ родилось

$S := 2$ умерло

$T := 2$ рассматриваемый малый промежуток, где отсчитывалось D, S

$K := 100$ ёмкость среды

Given

$R := \frac{(D - S)}{T}$ мгновенная скорость роста популяции

$x'(t) = \frac{K - x(t)}{K} \cdot R \cdot x(t)$ дифференциальное уравнения ограниченного роста

$x(0) = 36$ численность популяции в начале исследования

$x := \text{Odesolve}(t, 10)$

График 1 зависимости численности популяции от времени

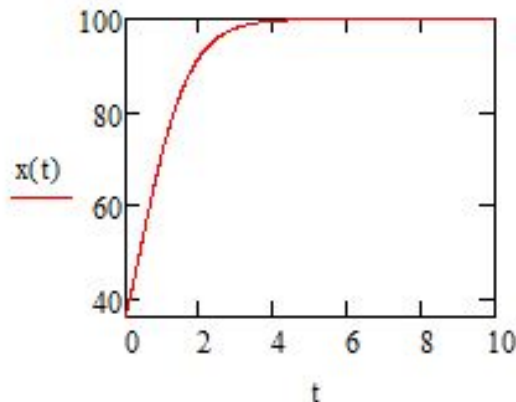
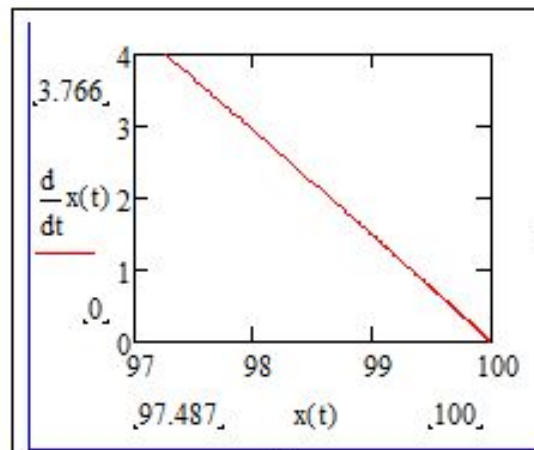


График 2 зависимости скорости падения численности популяции от численности популяции



Исследование с помощью модели2

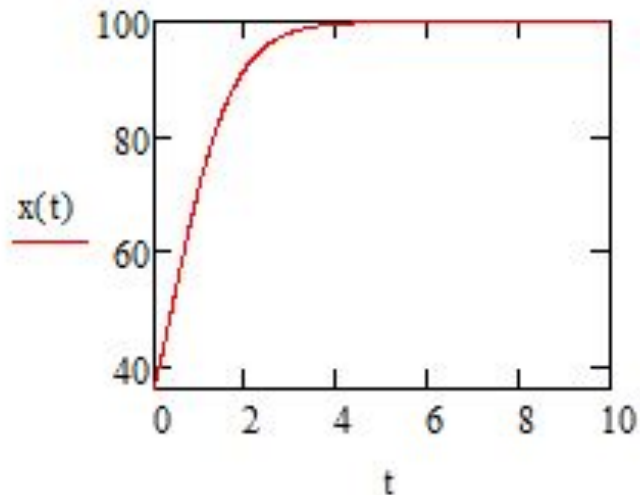
- При одной и той же исходной величине популяции (например, 36) и емкости среды (например, 100) последовательно используйте возрастающие значения g , например: 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.8, 1, 2, 3, 5.
- Для этого задайте большее значение D или меньшее значение S (по заданию преподавателя).
- Как изменяется при этом характер роста популяции?

Сравнение графиков 1 и 2

$x(0) = 36$ численность популяции в начале исследования

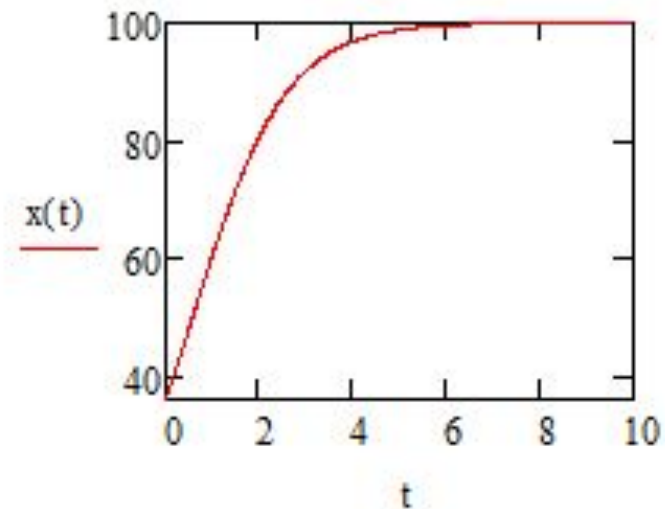
$D := 5$ родилось

$S := 2$ умерло



$D := 9$ родилось

$S := 7$ умерло



Исследование с помощью модели2

- Теперь исследуйте поведение модели в тех случаях, когда исходная численность особей (например, 1000) превышает емкость среды (например, 500); используйте те же значения r - 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.8, 1, 2, 3, 5.
- Как изменяется при этом численность популяции и почему так происходит?

Сравнение графиков 3 и 4

$K := 500$ ёмкость среды

$x(0) = 1000$

$D := 8$ родилось

$S := 1$ умерло

$D := 9$ родилось

$S := 7$ умерло

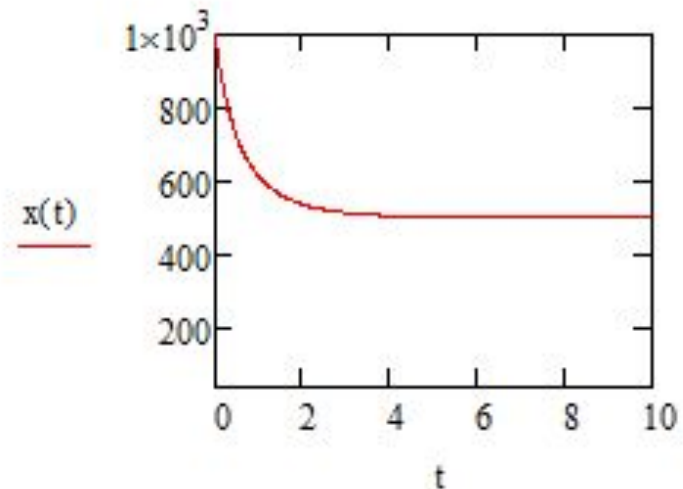
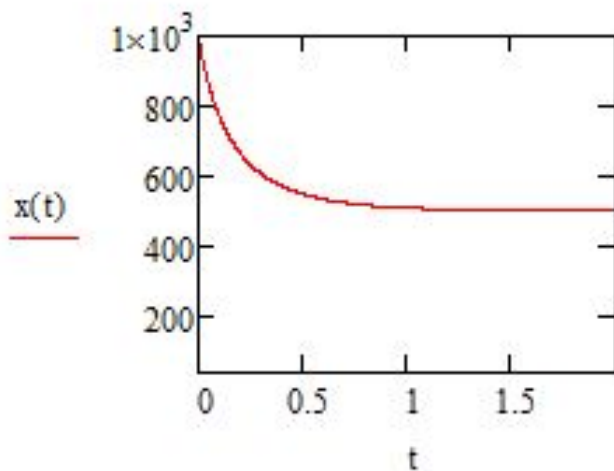


Таблица 2 Результаты исследования

Популяция $X_0 < K$		Популяция 2		Популяция $X_0 > K$		Популяция 4	
D	S	D	S	D	S	D	S
5	2	9	7	8	1	9	7
T=4		T=6		T=1		T=4	

Содержание отчёта

- **Постановка задачи** моделирования динамики численности популяции с неограниченным ростом модели 1
- Исходные данные к расчёту с помощью модели 1
- Определение зоны популяционного взрыва. Сравнение графиков 1 и 2
- Определение зоны вымирания. Сравнение графиков 3 и 4
- Таблица1 Результаты исследования
- Выводы (по таблице1 какие особи быстрее вымирают, достигают популяционного взрыва)
- **Постановка задачи** моделирования динамики численности популяции с ограниченным ростом
- Исходные данные к расчёту с помощью модели 2
- Определение зоны, в которой популяция прекращает свой рост. Сравнение графиков 1 и 2.
- Сравнение графиков 3 и 4.
- Таблица2 Результаты исследования
- Выводы (по таблице2 какие особи быстрее достигают равновесия)
- Общие выводы

Выводы

- Модель популяционного роста Мальтуса, плохо описывают реальность.
- Является великолепной иллюстрацией логических следствий очень простых идей относительно механизмов динамики популяции.
- Мы можем использовать эту очень простую модель в качестве основы для построения более сложных, добавляя в них новые условия и параметры, что сделает их реалистичнее.
- Модель популяционного роста Ферхюльста немного лучше отражает реальность, благодаря введённому ограничению ёмкости среды.