Практическое занятие №1

Популяционная динамика. Исследование моделей неограниченного и ограниченного роста. Модели с запаздыванием

Тестовая задача. Ввод исходных данных, получение графика

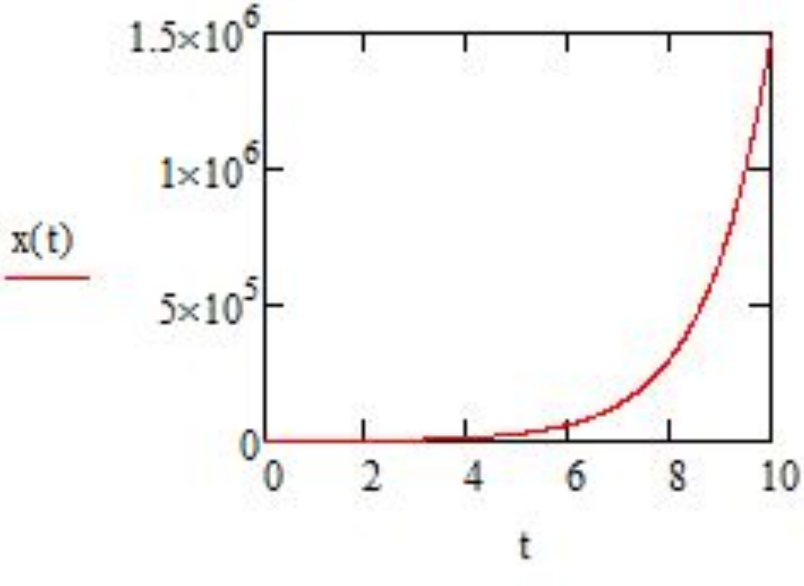
$R := 0.8$

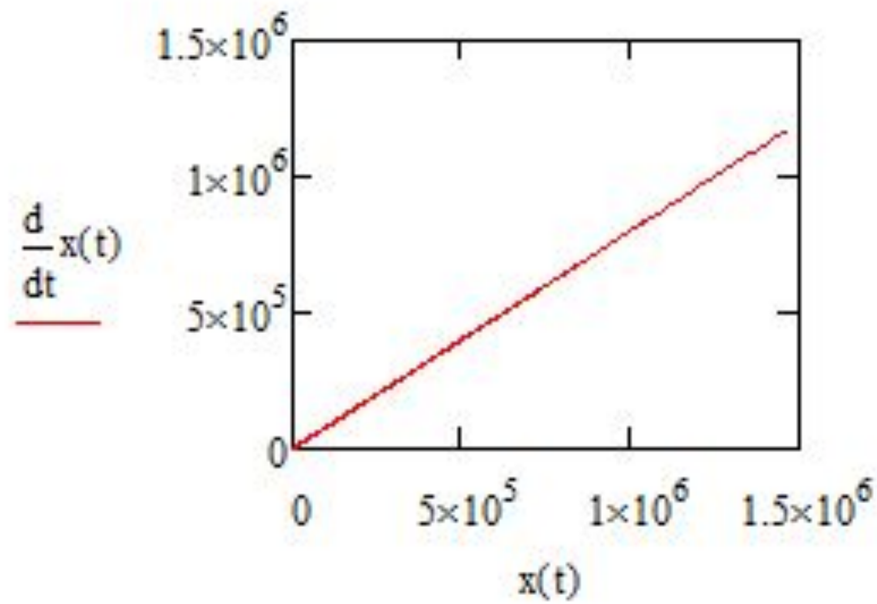
Given

$x'(t) = R \cdot x(t)$

$x(0) = 500$

$x := \mathrm{Odesolve}(t, 10)$





Постановка задачи

Построить модель динамики численности популяции с неограниченным ростом

Условия

Предположим, что:

- Рассматривается популяция организмов, которые размножаются
  непрерывно, причем поколения широко перекрываются и особи разных генераций и возрастов могут встречаться одновременно.
- процессы иммиграции и эмиграции уравновешивают друг друга;
- лишь рождение D и гибель S особей влияют на плотность популяции;
- все особи идентичны друг другу, в особенности в отношении их способности к размножению и вероятности гибели;
- мы можем игнорировать все сложности связанные с обоеполым размножением,
- ресурсы среды бесконечны
  и поэтому только врожденные способности особей к

Математическая модель 1

Введем следующие обозначения:

- x- величина популяции,
- D- мгновенная рождаемость на одну особь за бесконечно малый промежуток времени
- S-мгновенная смертность на одну особь за бесконечно малый промежуток времени (мы приравняем этот интервал к средней продолжительности одного поколения), тогда dx/dt -прирост популяции за бесконечно малый промежуток времени определяется уравнением: $dx/dt = X(D-S)/T$

Результаты моделирования

- с помощью уравнения $dx/dt = X(D-S)/T$ мы можем рассчитать численность особей в популяции в будущем x_t,
- исходя из ее величины в данный момент x_0
- и времени, в течение которого происходит рост t.
- График этого уравнения при г> О представляет собой экспоненту, описывающую неограниченный рост.

Компьютерная модель

Исследование модели неограниченного роста (Мальтуса)

$D := 10$ родилось

$S := 2$ умерло

$T := 2$ рассматривыемый малый промежуток, где отсчитывалось D, S

Given

$R := \frac{(D - S)}{T}$ мгновенная скорость роста популяции

$x'(t) = R \cdot x(t)$ дифференциальное уравнения неограниченного роста Мальтуса

$x(0) = 36$ численность популяции в начале исследования

$x := \mathrm{Odesolve}(t, 10)$

График 1 зависимости численности популяции от времени

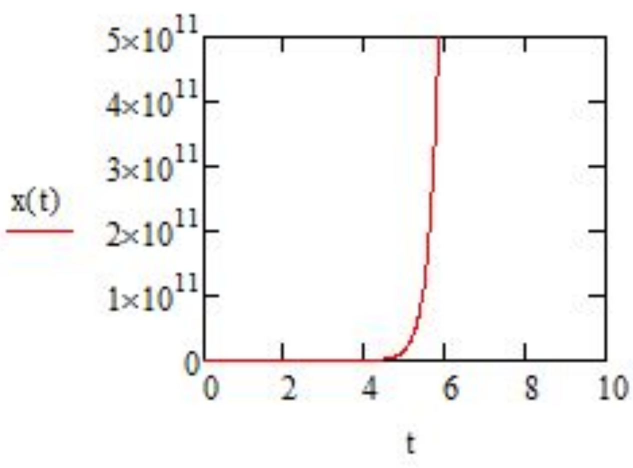
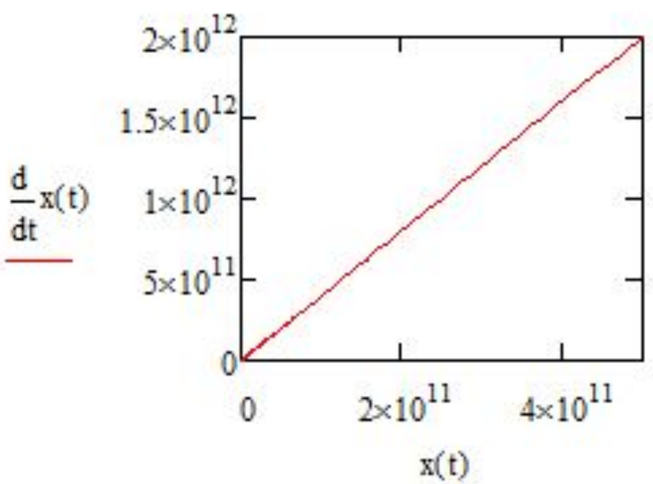


График 2 зависимости скорости роста популяции от численности популяции



Исследование с помощью модели1

- При одной и той же исходной величине популяции $X_0=36$ последовательно используйте значения r, например: 3, 2, 1, 0.5.

Для этого задайте большее значение S или меньшее значение D (по заданию преподавателя).

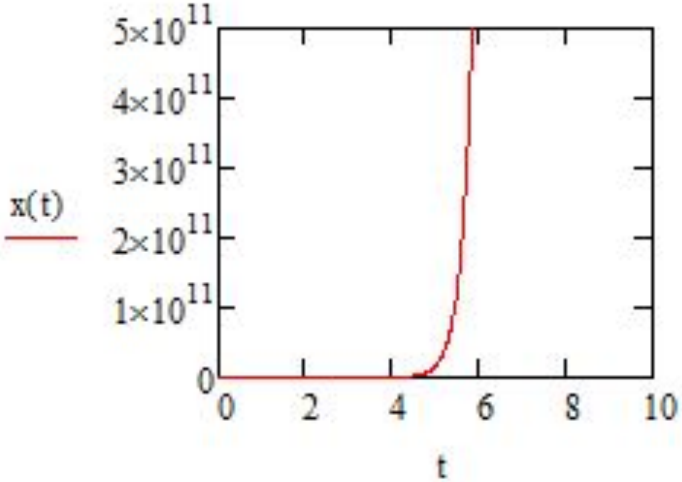
- Как изменяется характер роста популяции?

Сравнение графиков 1 и 2

Популяция1

$D := 10$ родилось

$S := 2$ умерло

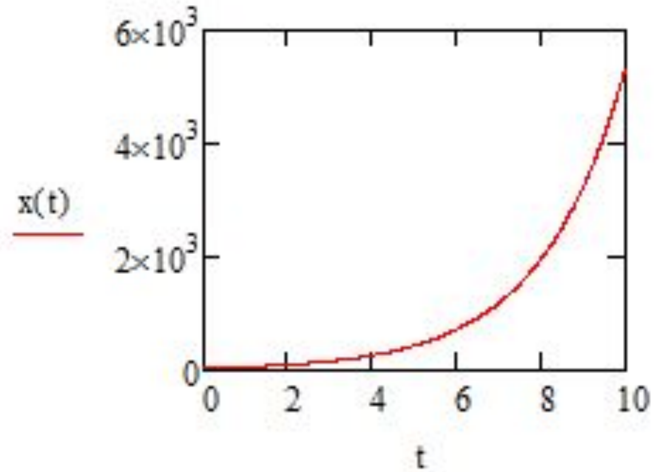


Популяция2

$D := 10$ родилось

$S := 9$ умерло

График 1 зависимости численности популяции от времени



Исследование с помощью модели 1

- Определите, сколько времени проходит до "популяционного взрыва" при различных значениях r.
- Если по графику не ясно - последовательно увеличивайте отрезок времени интегрирования в расчете и/или на оси графика.

$D := 10$ родилось

$S := 9$ умерло

График 1 зависимости численности популяции от времени

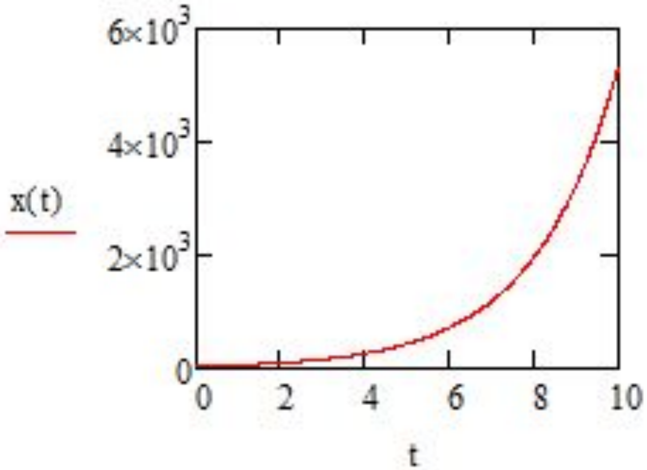


График 1 зависимости численности популяции от времени

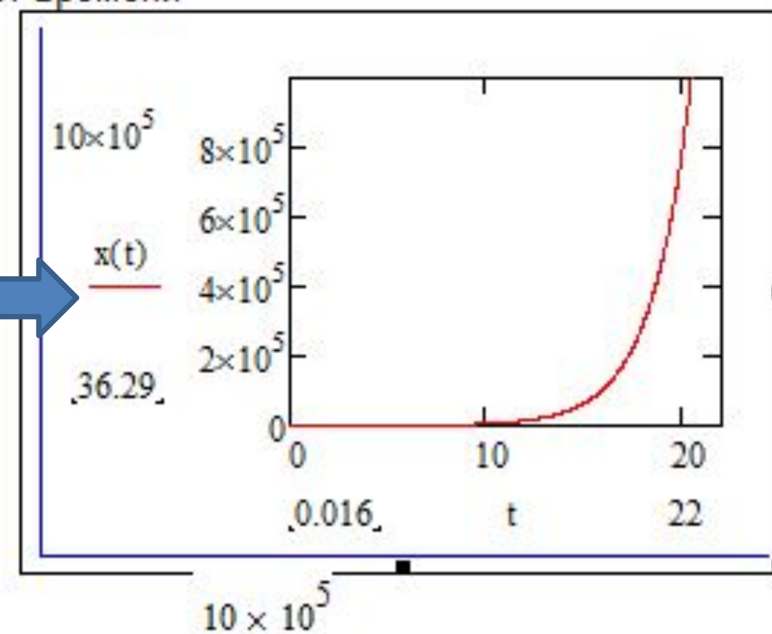


Таблица 1 Результаты исследования

Популяция1 Популяция2 Популяция3 Популяция4

Популяционный взрыв		Популяционный взрыв		Вымирание		Вымирание	
D	S	D	S	D	S	D	S
10	2	10	9	3	6	8	9
T=6		T=22		T=4		T=10	

Исследование с помощью модели

- Исследуйте поведение модели при значениях $r < 0$ (например:

-0.5, -0.8, -1, -2, -3, -5) и достаточно большой исходной величине популяции (например, 1000) и t=2.

- Для этого задайте большее значение D или меньшее значение S (по заданию преподавателя).

Что изменяется на графике и

Сравнение графиков 3 и 4

$x(0) = 1000$ численность популяции в начале исследования

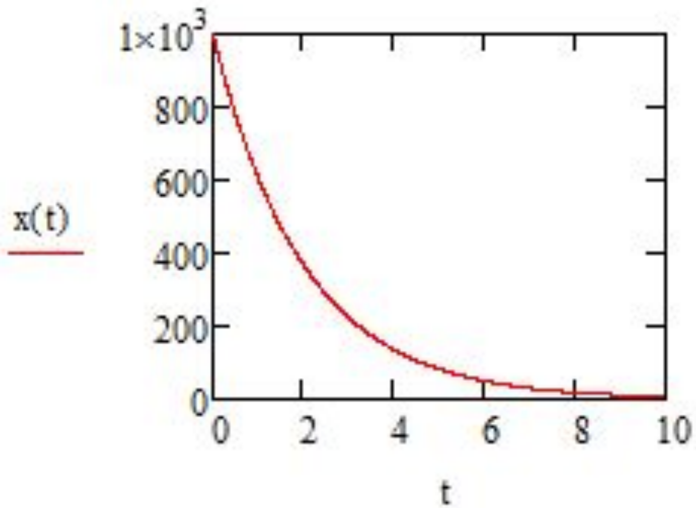
$D := 8$ родилось

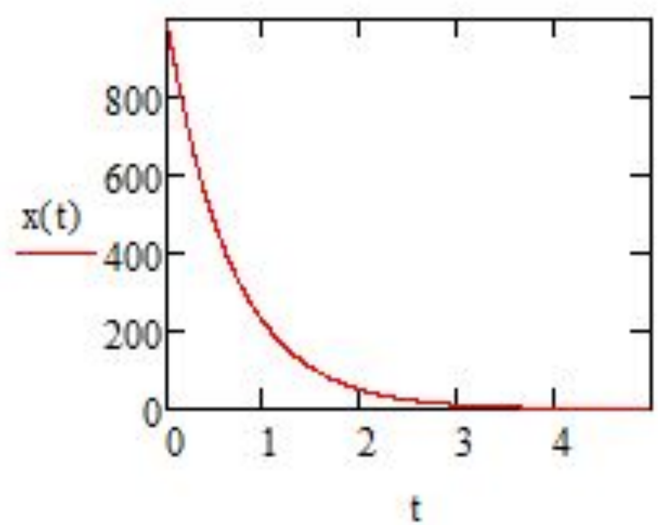
$S := 9$ умерло

$D := 3$ родилось

$S := 6$ умерло

График 1 зависимости численности популяции от времени



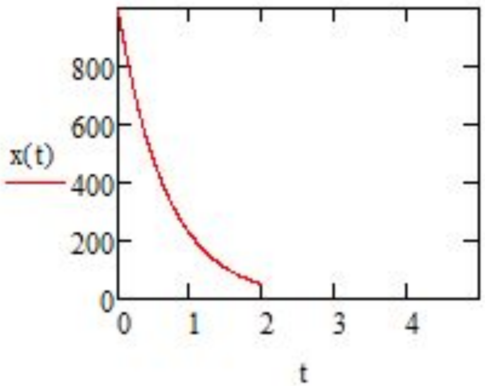


Исследование с помощью модели

- Последовательно увеличивайте границы интегрирования.
- Определите, сколько времени потребуется для вымирания популяции (будем считать, что это происходит, когда остается менее одной особи) при этих
значениях r?

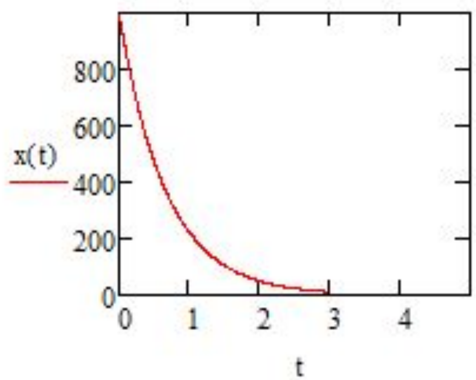
$x := \text{Odesolve}(t, 2)$

График 1 зависимости численности популяции от времени



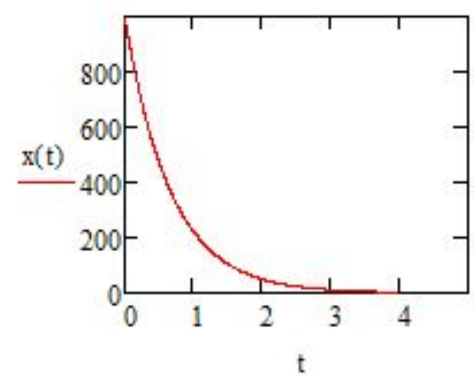
$x := \text{Odesolve}(t, 3)$

График 1 зависимости численности популяции от времени



$x := \text{Odesolve}(t, 4)$

График 1 зависимости численности популяции от времени



Общие выводы Результаты исследования проведенного с помощью модели

- Когда R=0, рождаемость и смертность уравновешивают друг друга, вновь рожденные особи просто замещают погибающих, и величина популяции остается неизменной.
- Когда R< 0, популяция уменьшается и вымирает,
- когда R > 0, она неограниченно растет.

Постановка задачи

Построить модель динамики численности популяции с ограниченным ростом

Условия

Предположим, что:

- Рассматривается популяция организмов, которые размножаются непрерывно, причем поколения широко перекрываются и особи разных генераций и возрастов могут встречаться одновременно.
- процессы иммиграции и эмиграции уравновешивают друг друга;
- лишь рождение D и гибель S особей влияют на плотность популяции;
- все особи идентичны друг другу, в особенности в отношении их способности к размножению и вероятности гибели;
- мы можем игнорировать все сложности связанные с обоеполым размножением,
- **в данных условиях среды наличные ресурсы могут обеспечивать существование в популяции не более К особей**

Математическая модель2

Введем следующие обозначения:

- x- величина популяции,
- D- мгновенная рождаемость на одну особь за бесконечно малый промежуток времени
- S-мгновенная смертность на одну особь за бесконечно малый промежуток времени, мы приравняем этот интервал к средней продолжительности одного поколения.
- К-это предельная плотность насыщения, или иначе поддерживающая емкость среды для данной популяции.
- (К- X)/К — это доля всей емкости среды, остающаяся в данный момент в распоряжении растущей
  популяции.

Результаты моделирования

- Предположим, что удельная скорость роста популяции прямо пропорциональна доле неиспользованной емкости среды (К- Х)/К .
- с помощью уравнения dx/dt =R (К- Х)/К /Т мы можем рассчитать численность особей в популяции в будущем x_t,
- исходя из ее величины в данный момент x_0
- и времени, в течение которого происходит рост -t.
- График этого уравнения при г> О представляет собой кривую переходящую в горизонтальную линию при достижении Х=К.
- Популяция прекращает рост при достижении численности К, когда среда обитания оказывается полностью занятой.

Исследование модели ограниченного роста в уравнении логистического роста (Ферхюльст)

$D := 5$ родилось

$S := 2$ умерло

$T := 2$ рассматривыемый малый промежуток, где отсчитывалось D, S

$K := 100$ ёмкость среды

Given

$R := \frac{(D - S)}{T}$ мгновенная скорость роста популяции

$x'(t) = \frac{K - x(t)}{K} \cdot R \cdot x(t)$ дифференциальное уравнения ограниченного роста

$x(0) = 36$ численность популяции в начале исследования

$x := \text{Odesolve}(t, 10)$

График 1 зависимости численности популяции от времени

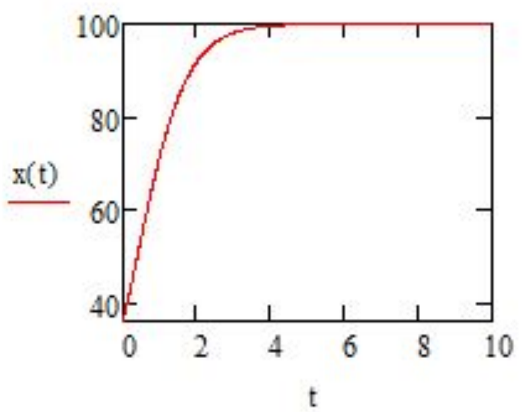
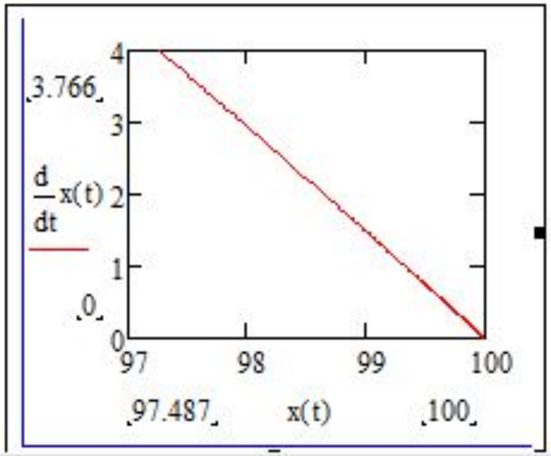


График 2 зависимости скорости падения численности популяции от численности популяции



Компьютерная модель

Исследование с помощью модели2

- При одной и той же исходной величине популяции (например, 36) и емкости среды (например, 100) последовательно используйте возрастающие значения r, например: 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.8, 1, 2, 3, 5.
- Для этого задайте большее значение D или меньшее значение S (по заданию преподавателя).

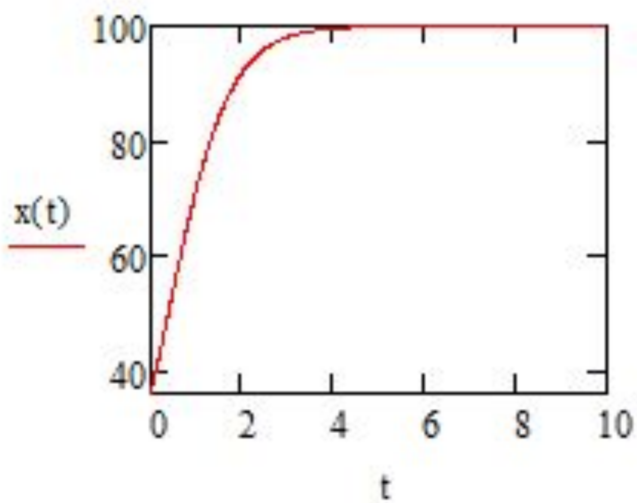
- Как изменяется при этом характер роста популяции?

Сравнение графиков 1 и 2

$x(0) = 36$ численность популяции в начале исследования

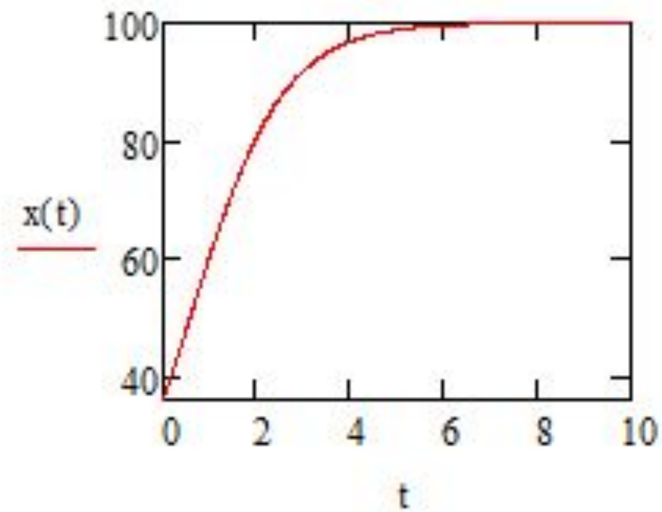
$D := 5$ родилось

$S := 2$ умерло



$D := 9$ родилось

$S := 7$ умерло



Исследование с помощью модели2

- Теперь исследуйте поведение модели в тех случаях, когда исходная численность особей (например, 1000) превышает емкость среды (например, 500); используйте те же значения r- 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.8, 1, 2, 3, 5.
- Как изменяется при этом численность популяции и почему так происходит?

Сравнение графиков 3 и 4

$\underset{\sim}{K} := 500$ ёмкость среды

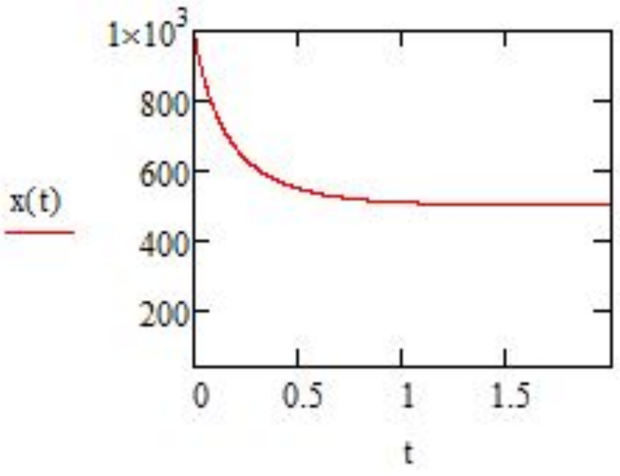
$x(0) = 1000$

$D := 8$ родилось

$S := 1$ умерло

$D := 9$ родилось

$S := 7$ умерло



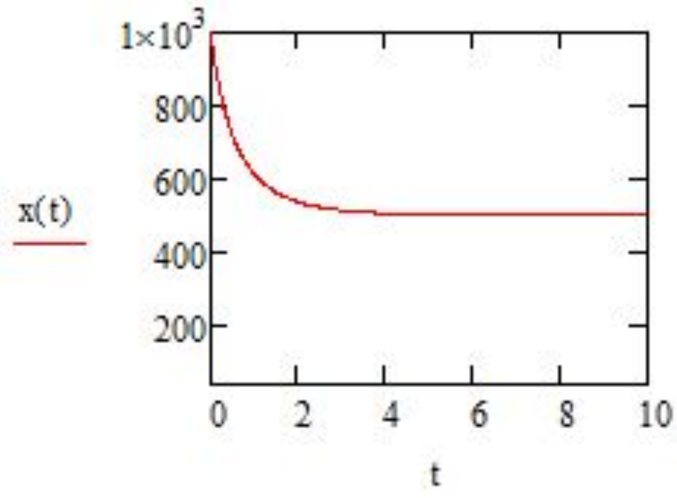


Таблица 2 Результаты исследования

Популяция 1		Популяция 2		Популяция 3		Популяция 4	
$X_0<K$				$X_0>K$			
D	S	D	S	D	S	D	S
5	2	9	7	8	1	9	7
T=4		T=6		T=1		T=4	

Содержание отчёта

- **Постановка задачи** моделирования динамики численности популяции с неограниченным ростом модели 1
- Исходные данные к расчёту с помощью модели 1
- Определение зоны популяционного взрыва. Сравнение графиков 1и 2
- Определение зоны вымирания. Сравнение графиков 3 и4
- Таблица1 Результаты исследования
- Выводы (по таблице1 какие особи быстрее вымирают, достигают популяционного взрыва)
- **Постановка задачи** моделирования динамики численности популяции с ограниченным ростом
- Исходные данные к расчёту с помощью модели 2
- Определение зоны, в которой популяция прекращает свой рост. Сравнение графиков 1и 2.
- Сравнение графиков 3 и 4.
- Таблица2 Результаты исследования
- Выводы (по таблице2 какие особи быстрее достигают равновесия)
- Общие выводы

Выводы

- Модель популяционного роста Мальтуса, плохо описывают реальность.
- Является великолепной иллюстрацией логических следствий очень простых идей относительно механизмов динамики популяции.
- Мы можем использовать эту очень простую модель в качестве основы для построения более сложных, добавляя в них новые условия и параметры, что сделает их реалистичнее.
- Модель популяционного роста Ферхюльста немного лучше отражает реальность, благодаря введённому ограничению ёмкости среды.