

# Практическое занятие №2

Популяционная динамика.  
Исследование модели роста  
популяции, обладающей возрастной  
структурой

# Постановка задачи

Построить модель динамики численности популяции, обладающей возрастной структурой

**Условия**

Предположим, что:

- Ресурсы питания не ограничены.
- В начальный момент все возрастные группы (когорты) могут содержать произвольное число особей.
- В начале каждого интервала времени когорты, кроме нулевой (дети), производят потомков в количестве, соответствующем их возрастной плодовитости.
- В начале каждого интервала число особей нулевой когорты (детей) равно суммарной плодовитости особей всех остальных когорт.

# Постановка задачи (продолжение)

- В течение каждого интервала времени численность когорты сокращается из-за смертности.
- Выжившие переходят в следующую возрастную группу, т.е. выжившие особи 0-ой группы образуют в начале следующего интервала 1-ую группу, особи 1-ой группы образуют 2-ую, и так далее вплоть до последней когорты.  
Последняя когорта полностью вымирает.
- Выжившие особи размножаются в начале следующего интервала и образуют нулевую когорту, как это описано выше.

# Математическая модель 3

Введем следующие обозначения:

- Размножение происходит в определенные моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_{\max}$ .  $l$  – номер интервала
- Пусть популяция содержит  $n$  возрастных групп (когорт).
- Тогда в каждый фиксированный момент времени (например,  $t_0$ ) популяцию можно охарактеризовать вектор-столбцом:

$$X(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix}$$

Где  $x_1(t_0)$  – число особей первой возрастной группы (когорты) в начале интервала времени  $t_0$

# Математическая модель 3 (продолжение)

- Вектор  $X(t_1)$  характеризует популяцию в следующем интервале времени.
- $X(t_1)$  связан  $X(t_0)$ : через матрицу перехода  $L$  следующим образом:

$$X(t_1) = L \cdot X(t_0)$$

- Далее, чтобы определить численность популяции в последующие интервалы времени, необходимо еще раз перемножить матрицы .  $X(t_2) = LX(t_1) = LLX(t_0) = L^2 X(t_0)$ ;

# Пояснения по формированию матрицы перехода L

В общем виде матрица перехода записывается следующим образом:

$$L = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_{1,1} & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Значения  $\alpha_1$   $\alpha_2$  коэффициентов рождаемости  $\beta_1$  и  $\beta_2$  и коэффициентов смертности переносят из когортной таблицы.

# Когортная таблица 1

- Когортные таблицы описывают динамику выживания и размножения совокупности особей.
- Пример когортной таблицы для трёх возрастных групп

Возрастные группы	было	Рождаемость		Смертность	
		родилось	коэффициент	умерло	коэффициент
Когорта 0 (дети)	12	-		4	$1/3$ $\beta_1$
Когорта 1 (1-5)	36	324	$9$ $\alpha_1$	18	$1/2$ $\beta_2$
Когорта 2 (5-7)	48	576	$12$ $\alpha_2$	48	1

# Пример расчета численности особей по данным когортной таблицы

$$\begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \\ x_3(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 12 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Такая запись означает, что исходная популяция состоит из одной самки старшего возраста (вектор столбец в правой части уравнения). Каждое животное старшего возраста, прежде чем умереть, успевает произвести в среднем 12 потомков, каждое животное среднего возраста, прежде чем умереть или перейти в следующий возрастной класс (вероятности этих событий одинаковы) производит в среднем 9 потомков. Молодые животные не производят потомства и с вероятностью 1/3 попадают в среднюю возрастную группу.



Исследование модели роста популяции, обладающей возрастной структурой

$$I_{max} := 40$$

$i := 1..I_{max}$  номер интервала времени, для которого рассчитывается размер популяции

$$X_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

вектор состава популяции в каждом возрастном классе на начало исследования

значения коэффициентов из таблицы выживания и плодовитости

- |                          |                          |  |
|--------------------------|--------------------------|--|
| $\alpha_1 := 9$          | $\alpha_2 := 12$         | средняя плодовитость (т.е. число потомков) особи данного возрастного класса. |
| $\beta_1 := \frac{1}{3}$ | $\beta_2 := \frac{1}{2}$ | доля когорты, дожившая до начала данного возрастного класса                  |

$$L := \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix}$$

трансформационная матрица (так называемая "Матрица Лесли")

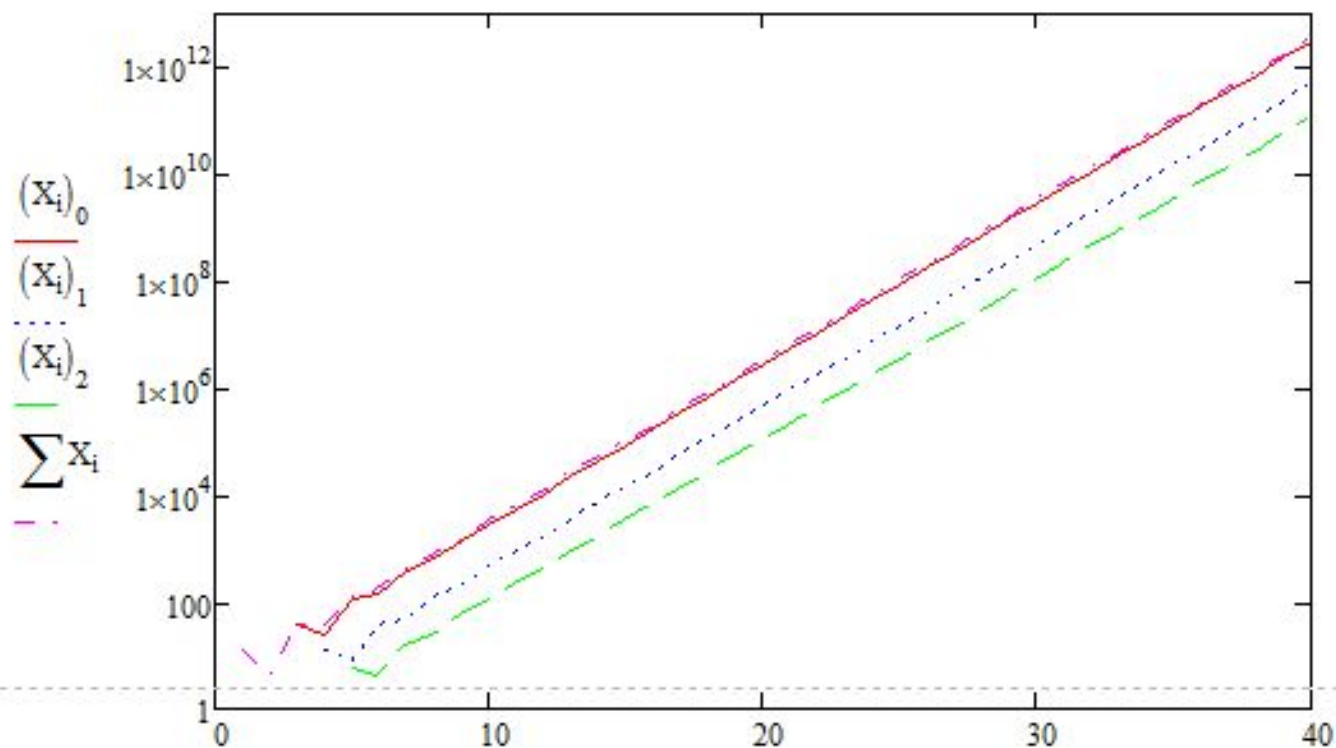
$$X_i := L \cdot X_{i-1}$$

распределение особей по возрастным группам в следующем интервале времени

$$X_{10} = \begin{pmatrix} 2.688 \times 10^3 \\ 468 \\ 108 \end{pmatrix} \text{ распр. особей по когортам через 10 лет}$$

+

$$(X_{10})_0 = 2.688 \times 10^3 \quad \sum X_{10} = 3.264 \times 10^3$$



# Исследование с помощью модели

## 3

- Проанализируйте графики. Какая из возрастных групп вносит наибольший вклад в численность популяции?
- Рассчитайте с помощью модели и покажите на графике численность возрастных групп в начале 5, 10, 20, 40 интервала времени.

# Таблица 2 Численность в каждой возрастной группе

	Номер интервала времени для расчета численности $i$				
	5	10	20	30	40
	Численность в когорте на начало интервала времени				
Когорта 0 (дети)	$X_0(t_5)$	$X_0(t_{10})$	$X_0(t_{20})$	$X_0(t_{30})$	$X_0(t_{40})$
Когорта <sub>1</sub> (1-5)	$X_1(t_5)$	$X_1(t_{10})$	$X_1(t_{20})$	$X_1(t_{30})$	$X_1(t_{40})$
Когорта <sub>2</sub> (5-7)	$X_2(t_5)$	$X_2(t_{10})$	$X_2(t_{20})$	$X_2(t_{30})$	$X_2(t_{40})$
$\sum X_i(t_k)$					

# Решение обратной задачи

- Найти  $I$  – номер интервала времени когда  $X \approx 1000$

$(X_i)_1 =$

1	0
2	4
3	0
4	12
5	8
6	36
7	48
8	124
9	216
10	468
11	896
12	$1.836 \cdot 10^3$
13	$3.624 \cdot 10^3$
14	$7.3 \cdot 10^3$
15	

$(X_i)_0 =$

	12
	0
	36
	24
	108
	144
	372
	648
	$1.404 \cdot 10^3$
	$2.688 \cdot 10^3$
	$5.508 \cdot 10^3$
	$1.087 \cdot 10^4$
	$2.19 \cdot 10^4$
	$4.363 \cdot 10^4$

$(X_i)_2 =$

	0
	0
	2
	0
	6
	4
	18
	24
	62
	108
	234
	448
	918
	$1.812 \cdot 10^3$

# Содержание отчёта

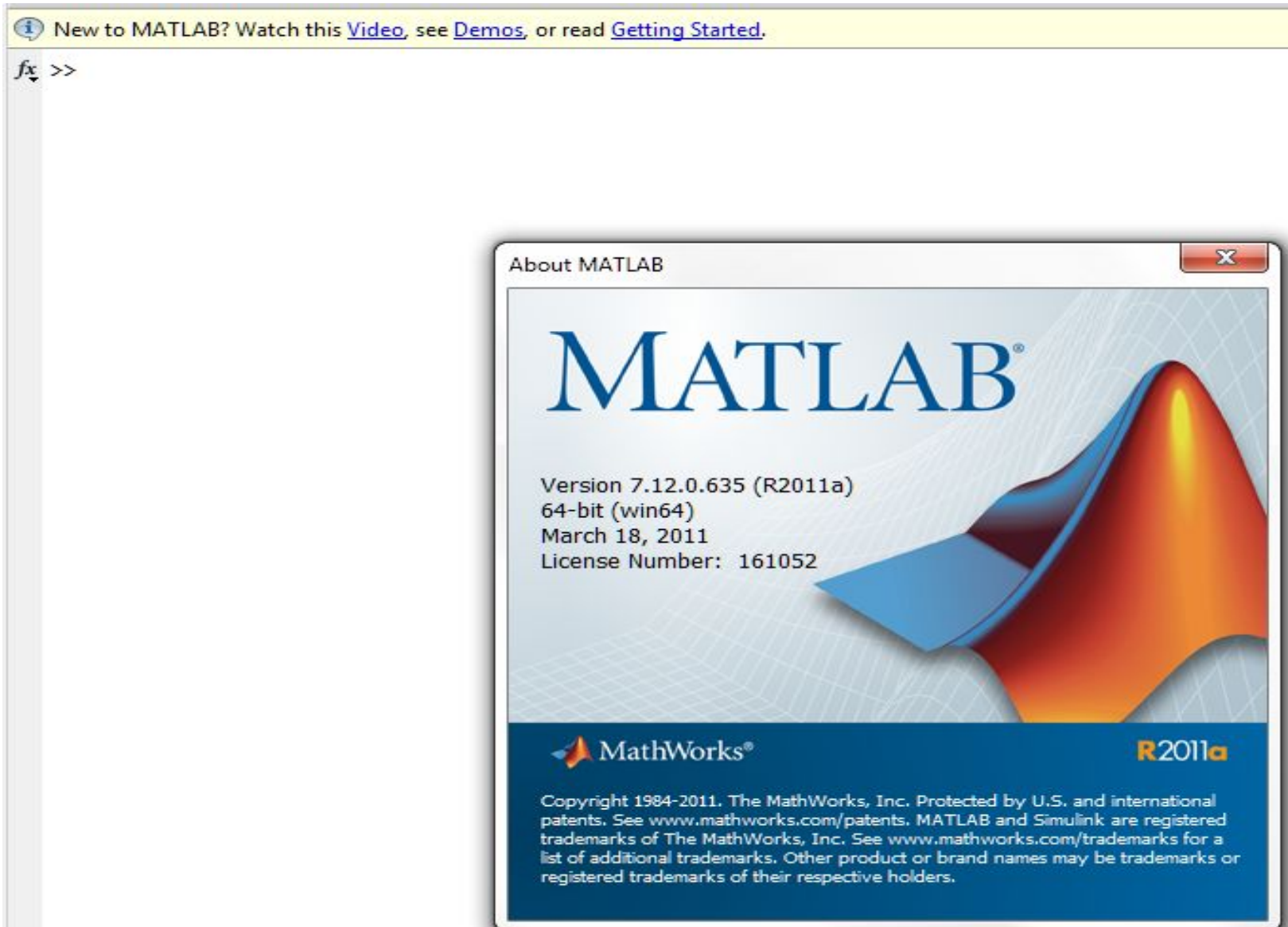
- **Постановка задачи** моделирования динамики численности популяции, обладающей возрастной структурой
- Исходные данные к расчёту Когортная Таблица 1
- Исходные данные: вектор популяции на начало исследования модели ,  $X_0$
- Результаты расчета - Таблица 2 Численность в каждой возрастной группе в заданные временные интервалы
- Гафики зависимости численности когорт от номера интервала времени.
- Выводы по графикам (вклад в численность популяции).
- Решение обратной задачи: Определение номеров интервалов времени, в которых численность когорт примет заданное преподавателем значение (например,  $X=1000$ ). Вывод об относительной скорости достижения заданной численности каждой когорты.

# Логистическое уравнение с запаздыванием

$$\frac{dX^r}{dt} = rX(t) \left[ 1 - \frac{X(t-T)}{K} \right]$$

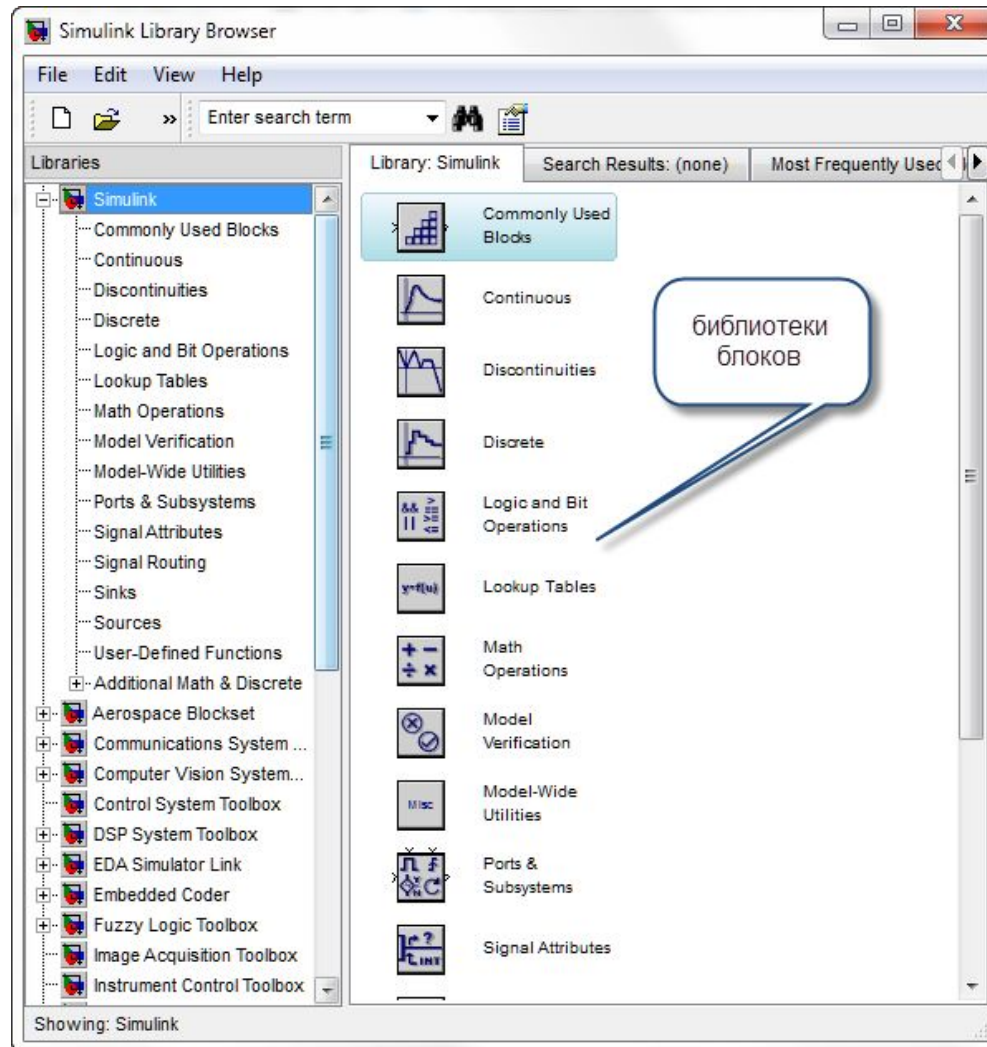
Где скорость роста популяции -  $r$   
 $T$  - время запаздывания

# Основное окно программы Matlab

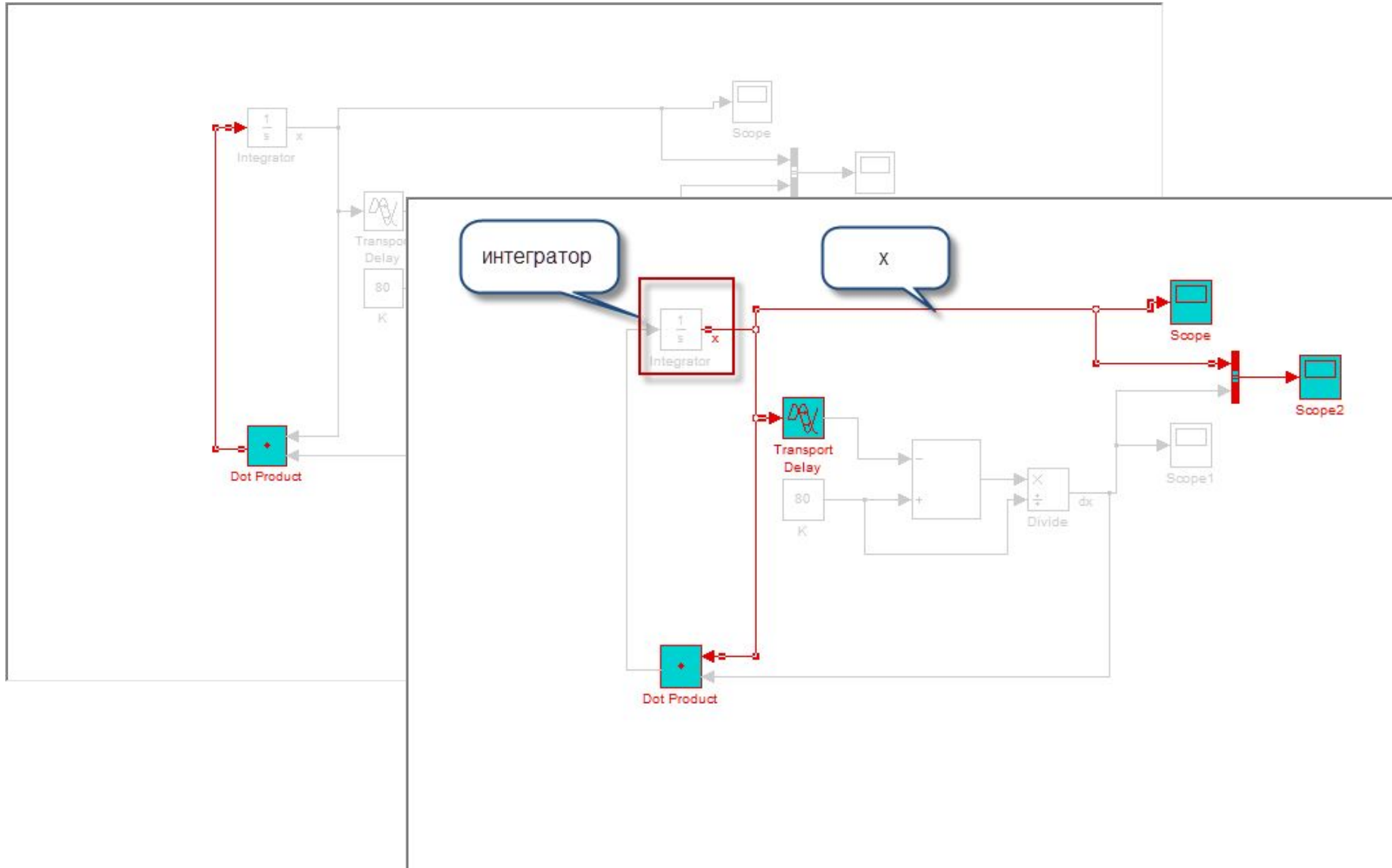




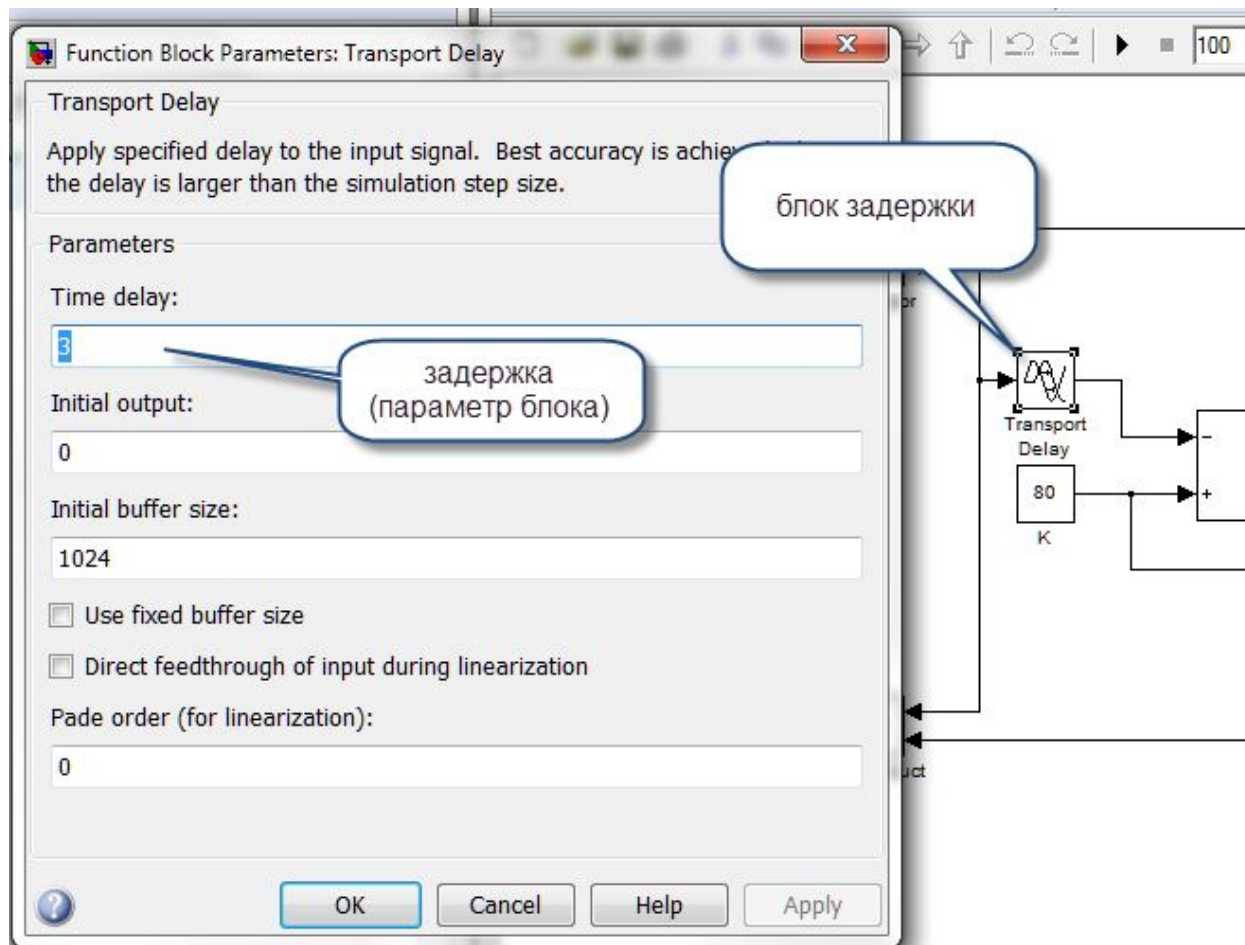
# Среда имитационного моделирования Simulink (дополнение к Matlab)



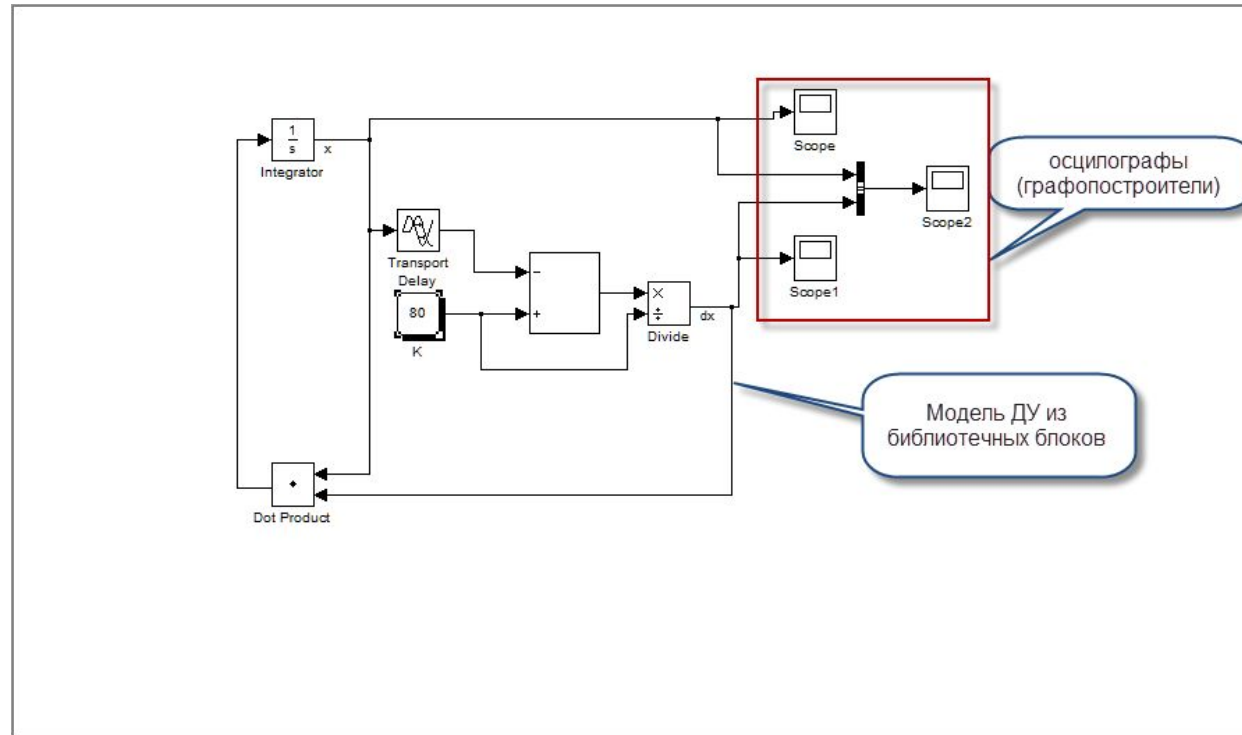
# Модель – блоки, соединенные сигналами



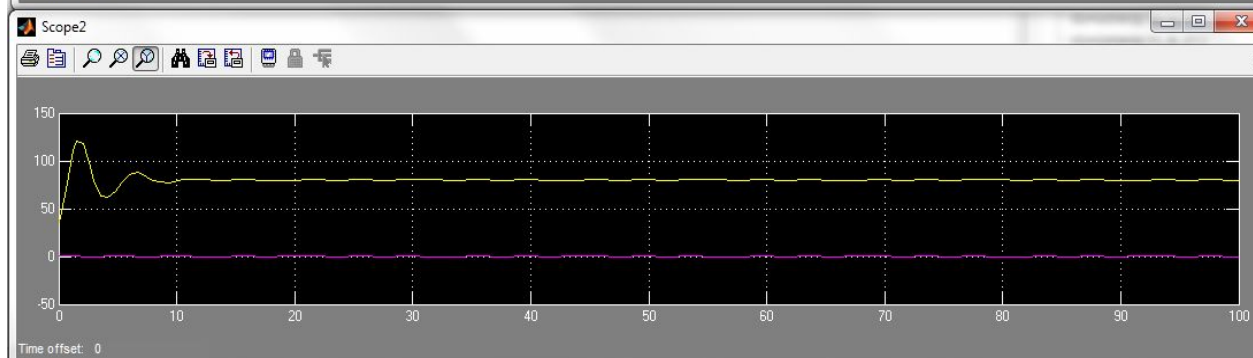
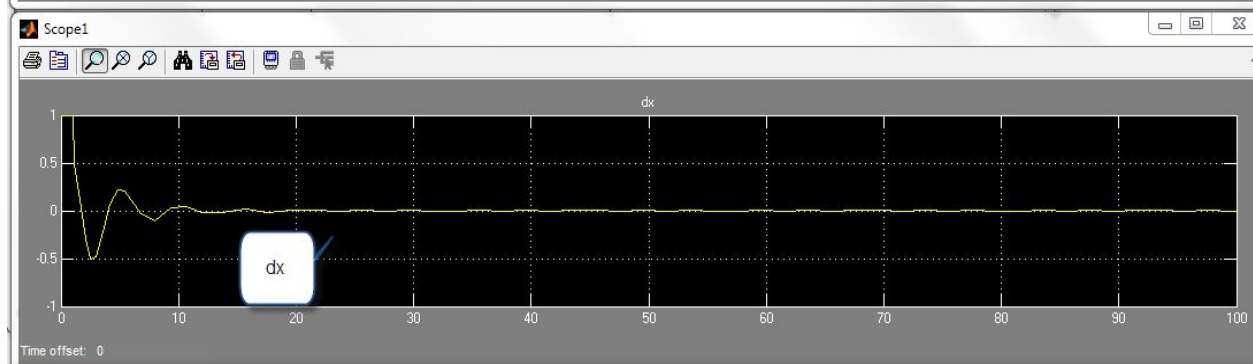
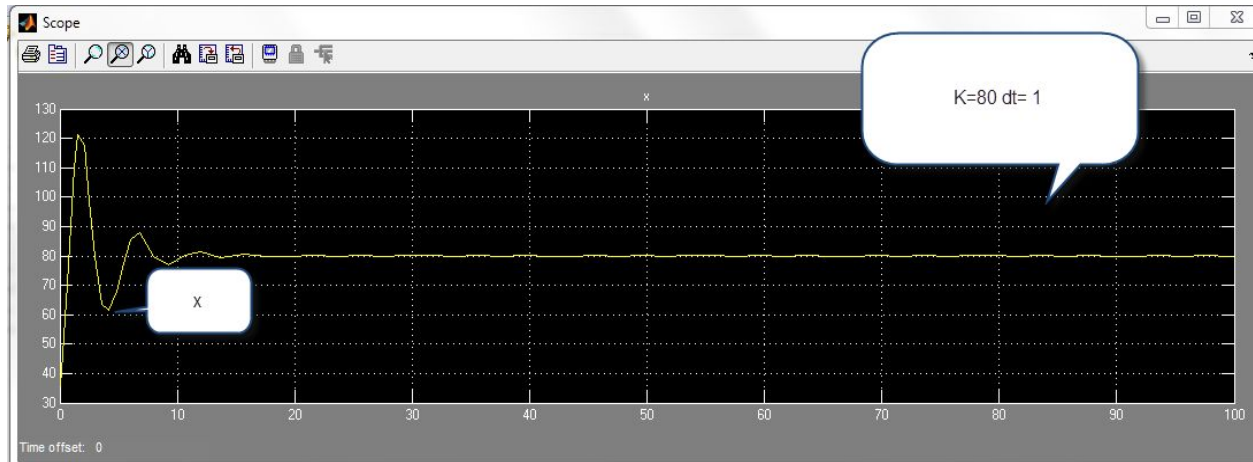
# Блок может обладать настроечными параметрами



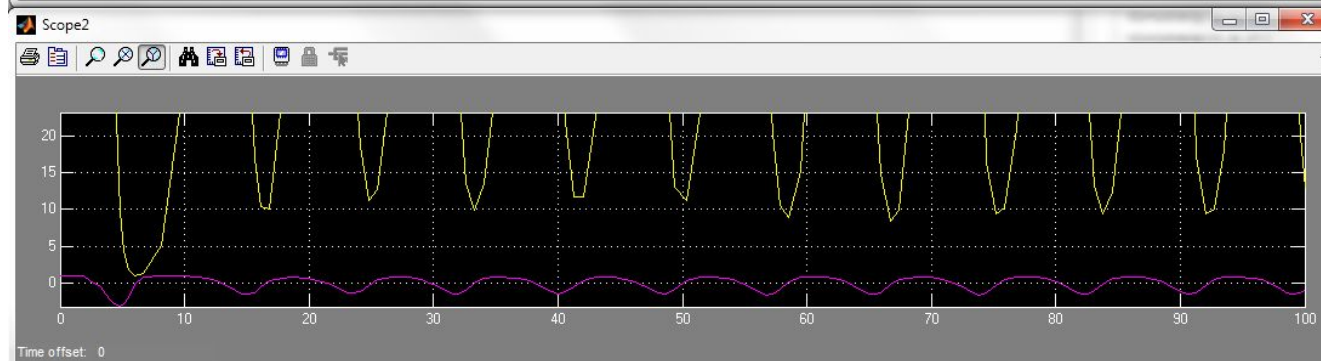
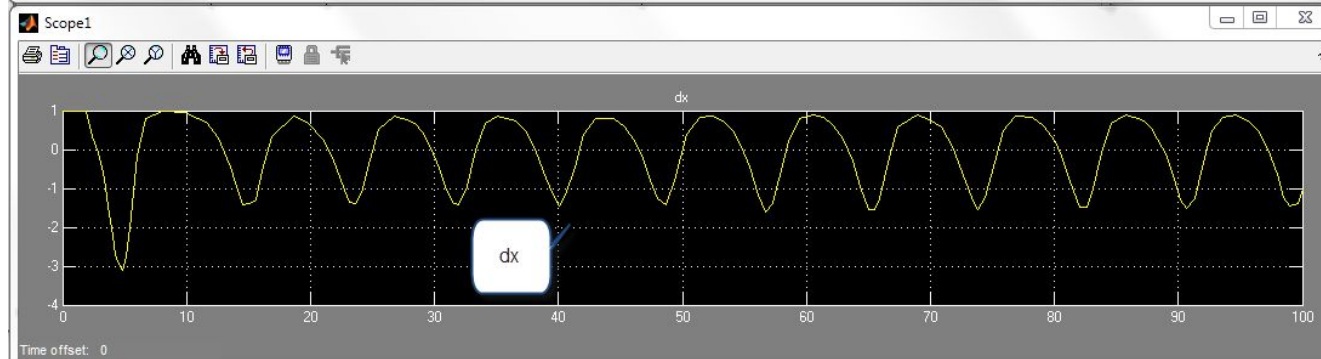
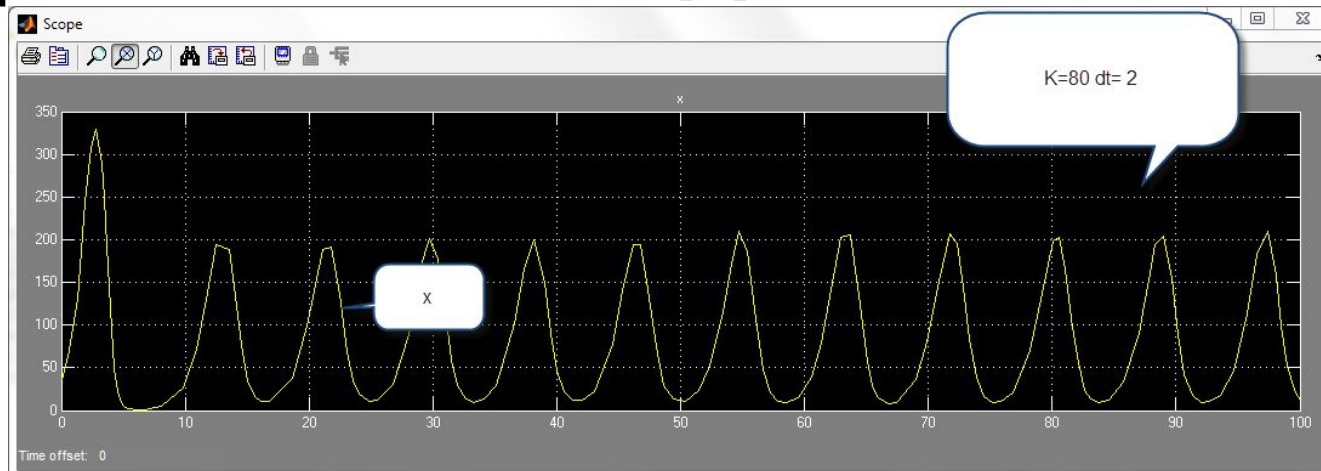
# Блоки визуализации результатов



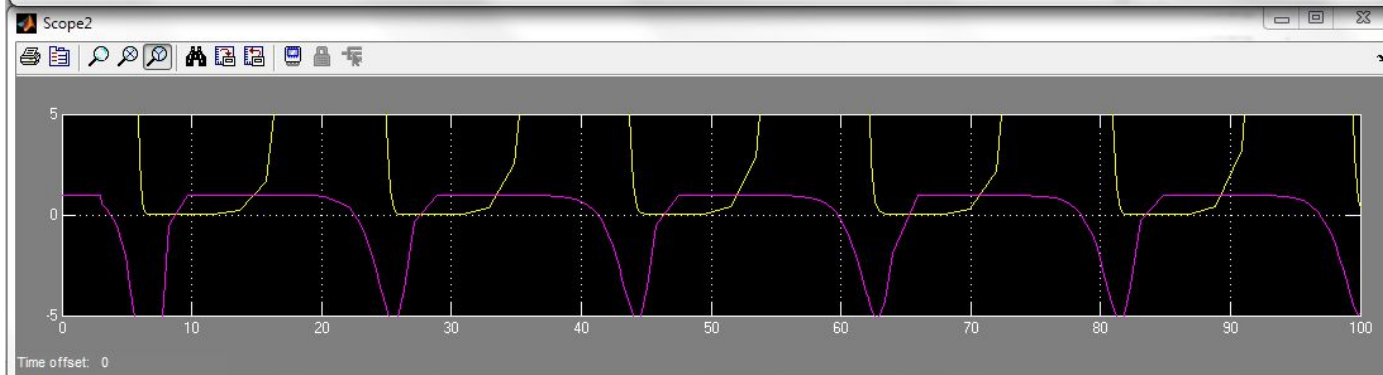
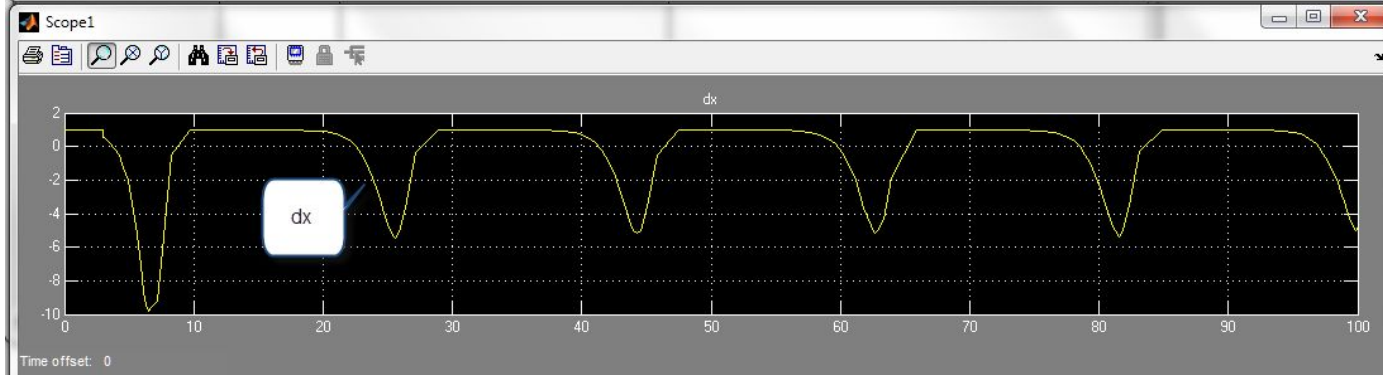
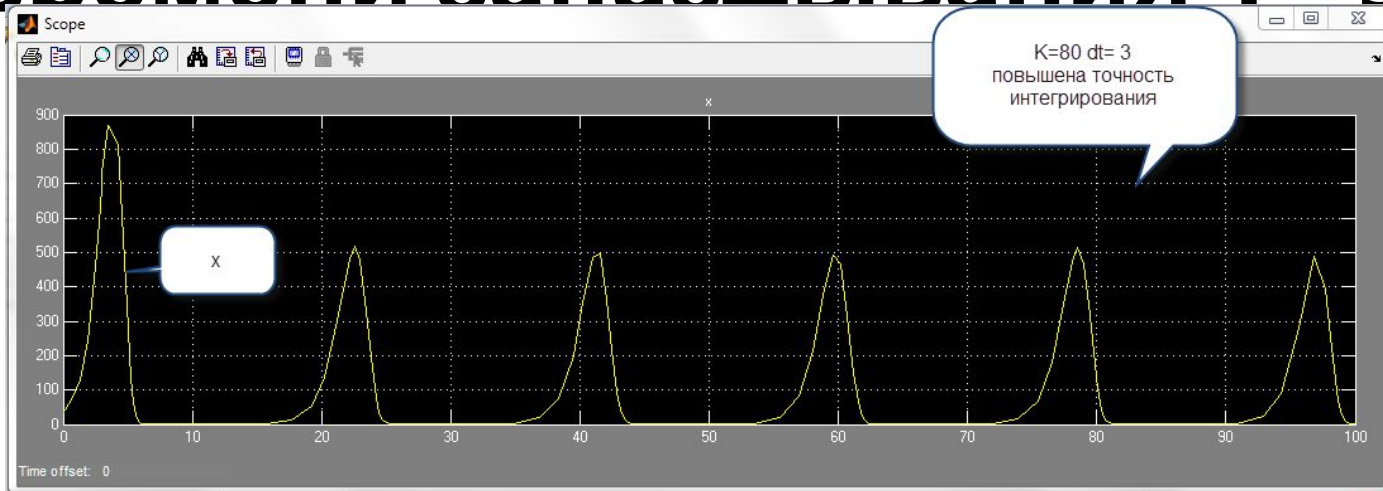
# Результаты расчетов при времени запаздывания $T = 1$



# Результаты расчетов при времени запаздывания $T = 2$



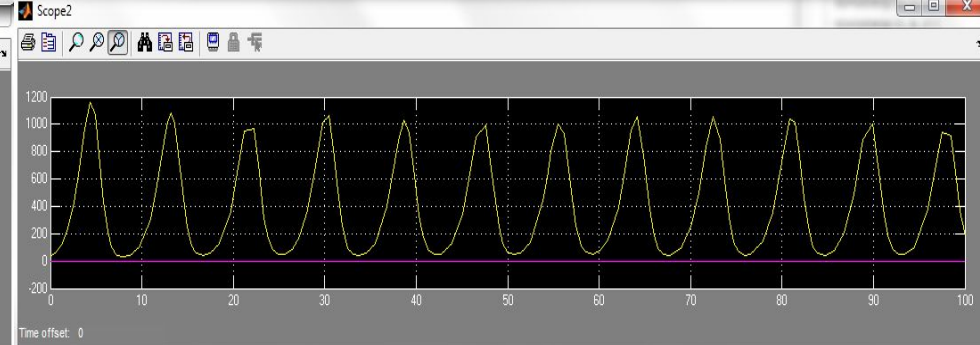
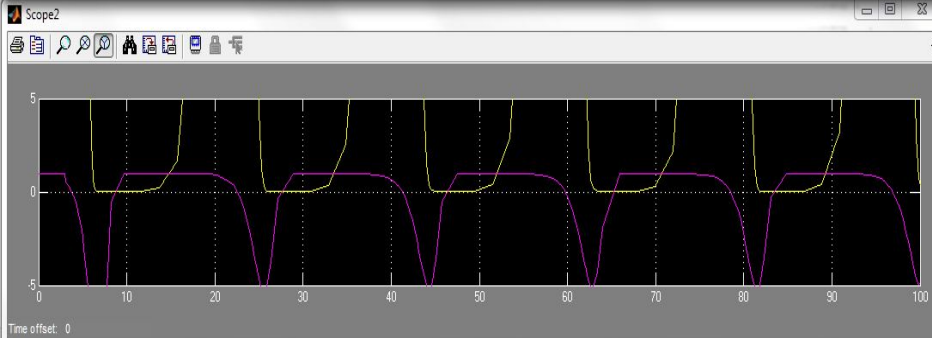
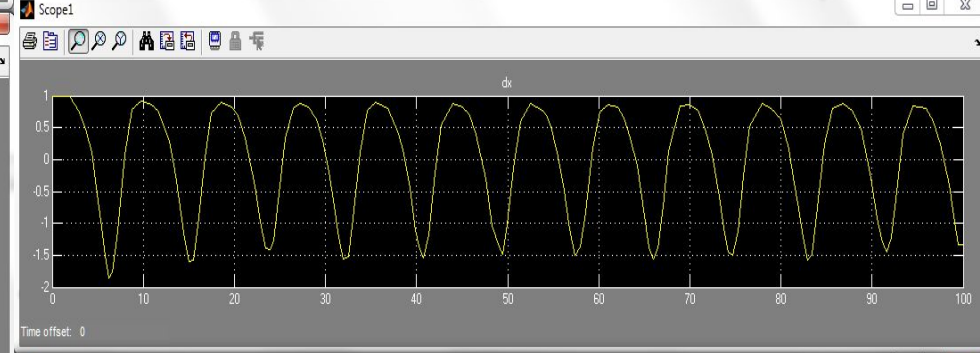
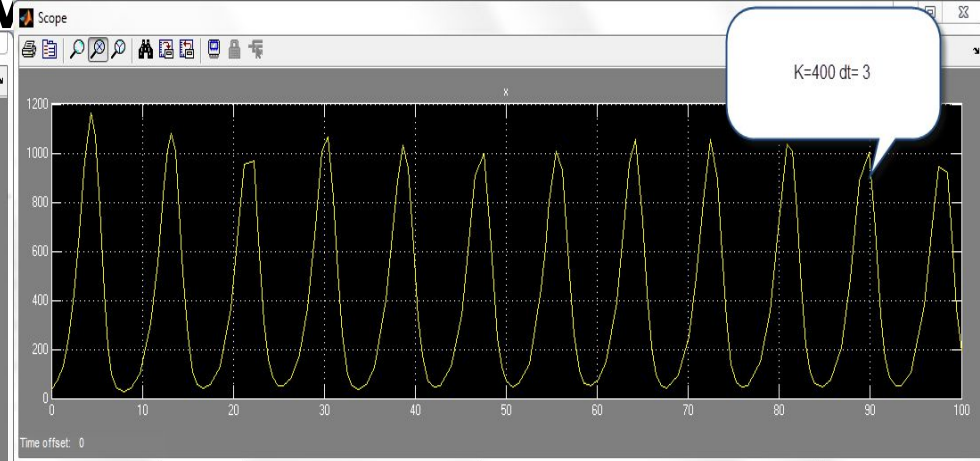
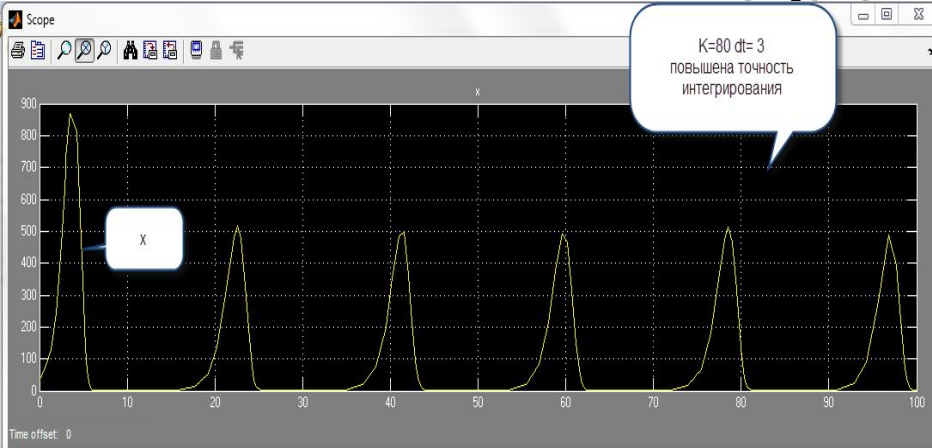
# Результаты расчетов при времени запаздывания $T = 3$





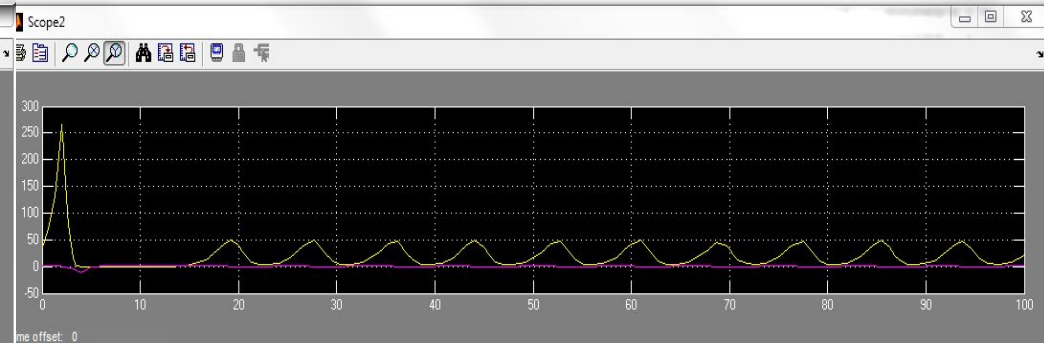
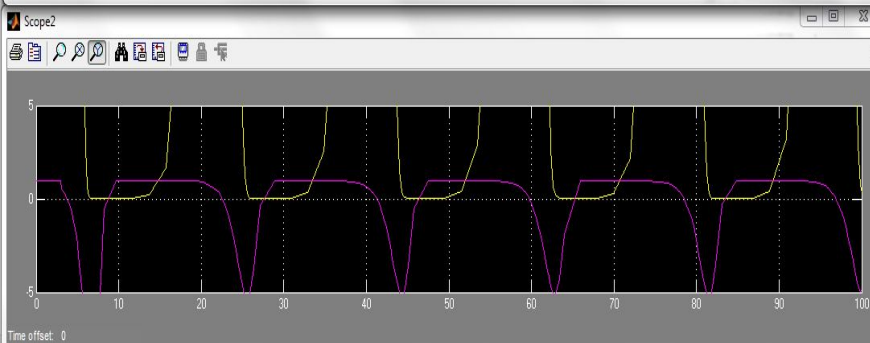
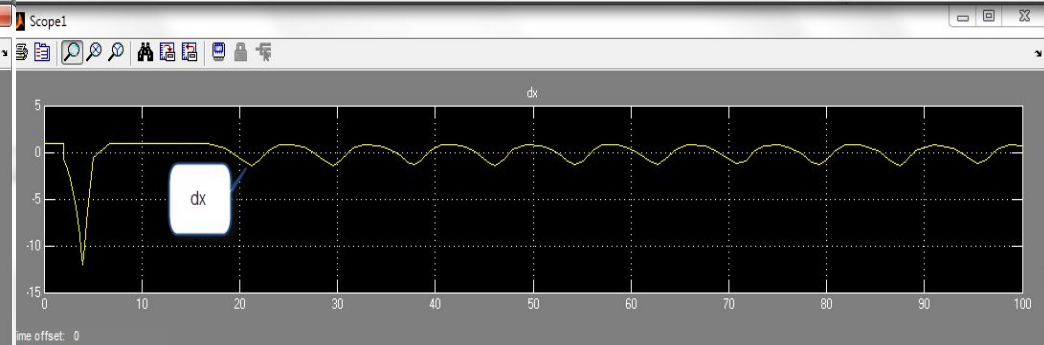
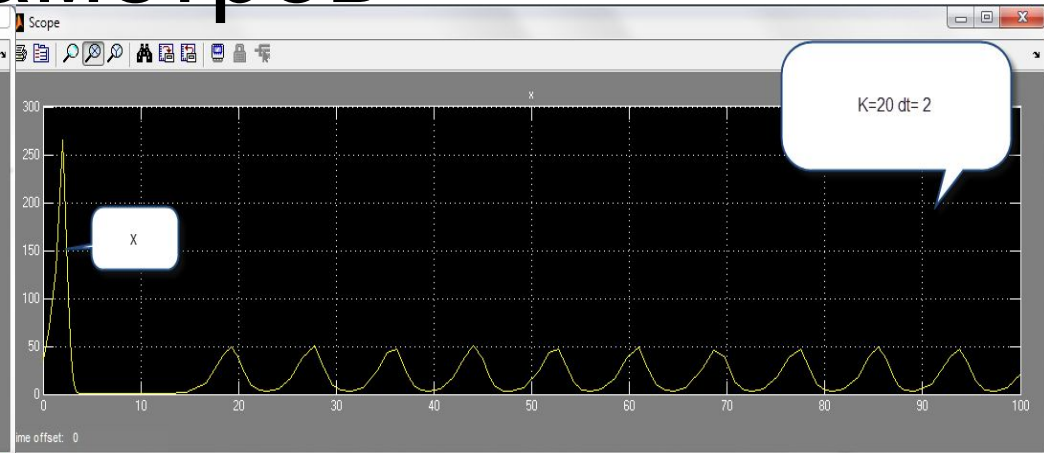
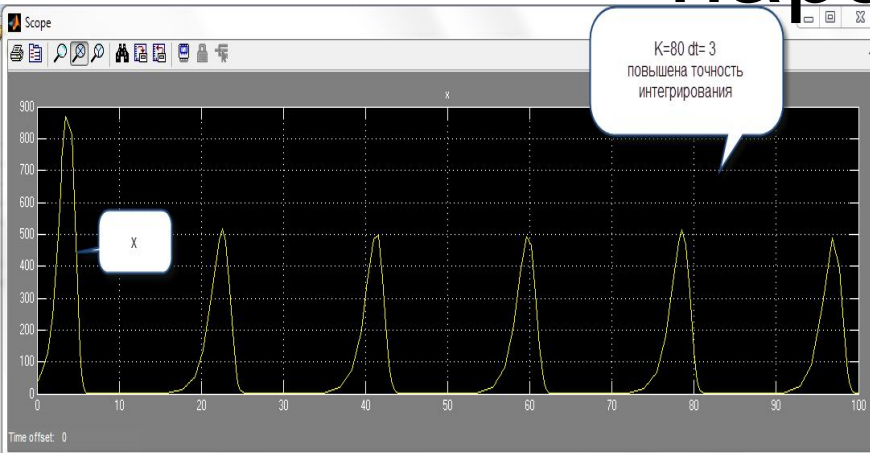
# Динамические режимы системы в зависимости от значений её параметров

## параметров





# Динамические резонансы системы в зависимости от значений её параметров



# Выводы

- Запаздывание в регуляции системы может привести к возникновению колебаний переменных.
- Если система регулируется петлей обратной связи, в которой происходит существенная задержка, то весьма вероятно возникновение колебаний. Фаза и амплитуда которых зависят от параметров запаздывания и ёмкости среды
- Графики показывают, что численность имеет регулярные колебания, характер которых зависит от параметров системы.
- Если продолжительность задержки в петле обратной связи больше собственного времени системы, могут возникнуть колебания с нарастающей амплитудой, нарушаются их период и фаза. такого эффекта мы здесь