Практическое занятие №2

Популяционная динамика. Исследование модели роста популяции, обладающей возрастной структурой

Постановка задачи

Построить модель динамики численности популяции, обладающей возрастной структурой

Условия

Предположим, что:

- Ресурсы питания не ограничены.
- В начальный момент все возрастные группы (когорты) могут содержать произвольное число особей.
- В начале каждого интервала времени когорты, кроме нулевой(дети), производят потомков в количестве, соответствующем их возрастной плодовитости.
- В начале каждого интервала число особей нулевой когорты(детей) равно суммарной плодовитости особей всех остальных когорт.

Постановка задачи (продолжение)

- В течение каждого интервала времени численность когорты сокращается из-за смертности.
- Выжившие переходят в следующую возрастную группу, т.е. выжившие особи 0-ой группы образуют в начале следующего интервала 1-ую группу, особи 1-ой группы образуют 2-ую, и так далее вплоть до последней когорты.

  Последняя когорта полностью вымирает.
- Выжившие особи размножаются в начале следующего интервала и образуют нулевую когорту, как это описано выше.

Математическая модель 3

Введем следующие обозначения:

- Размножение происходит в определенные моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_{imax}$. I – номер интервала
- Пусть популяция содержит n возрастных групп (когорт).
- Тогда в каждый фиксированный момент времени (например, t_0) популяцию можно охарактеризоват $X(t_0)$: ектор-столбцом:

$$X(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_n(t_0) \end{bmatrix}$$

Где $x_1(t_0)$ число особей первой возрастной группы(когорты) в начале интервала времени t_0

Математическая модель 3 (продолжение)

- Вектор $X(t_1)$ характеризует популяцию в следующем интервале времени.
- $X(t_1)$ связан $X(t_0)$ через матрицу перехода L следующим образом:

$$\boxed{X(t_1) = L \cdot X(t_0)}$$

- Далее, чтобы определить численность популяции в последующие интервалы времени, необходимо еще раз перемножить матрицы . $\mathbf{X}(t_2) = \mathbf{L}\mathbf{X}(t_1) = \mathbf{L}\mathbf{L}\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{L}^2\mathbf{X}(t_0);$

Пояснения по формированию матрицы перехода L

В общем виде матрица перехода записывается следующим образом:

$$\mathbf{L} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_i & a_{i+1} & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{n-1} & 0 \end{Vmatrix}$$

Значения $\alpha 1$ $\alpha 2$ коэффициентов рождаемо $\beta 1$ и $\beta 2$ орт и коэффициентов смертности переносят из когортной таблицы.

Когортная таблица 1

- Когортные таблицы описывают динамику выживания и размножения совокупности особей.

Пример когортной таблицы для трёх возрастных групп

Возрастные группы	было	Рождаемость		Смертность	
		родилось	коэффициент	умерло	коэффициент
Когорта 0 (дети)	12	-		4	1/3 $\beta 1$
Когорта1(1-5)	36	324	9 $\alpha 1$	18	1/2 $\beta 2$
Когорта2(5-7)	48	576	12 $\alpha 2$	48	1

Пример расчета численности особей по данным когортной таблицы

$$\begin{Vmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \\ x_3(t_1) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 9 & 12 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Такая запись означает, что исходная популяция состоит из одной самки старшего возраста (вектор столбец в правой части уравнения). Каждое животное старшего возраста, прежде чем умереть, успевает произвести в среднем 12 потомков, каждое животное среднего возраста, прежде чем умереть или перейти в следующий возрастной класс (вероятности этих событий одинаковы) производит в среднем 9 потомков. Молодые животные не производят потомства и с вероятностью 1/3 попадают в среднюю возрастную группу.

Компьютерная модель

Исследование модели роста популяции, обладающей возрастной структурой

$Imax := 40$

$i := 1..Imax$ номер интервала времени, для которого расчитывается размер популяции

$X_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ вектор состава популяции в каждом возрастном классе на начало исследования

значения коэффициентов из таблицы выживания и плодовитости

$\alpha 1 := 9$ $\alpha 2 := 12$ средняя плодовитость (т.е. числопотомков) особи данного возрастного класса.

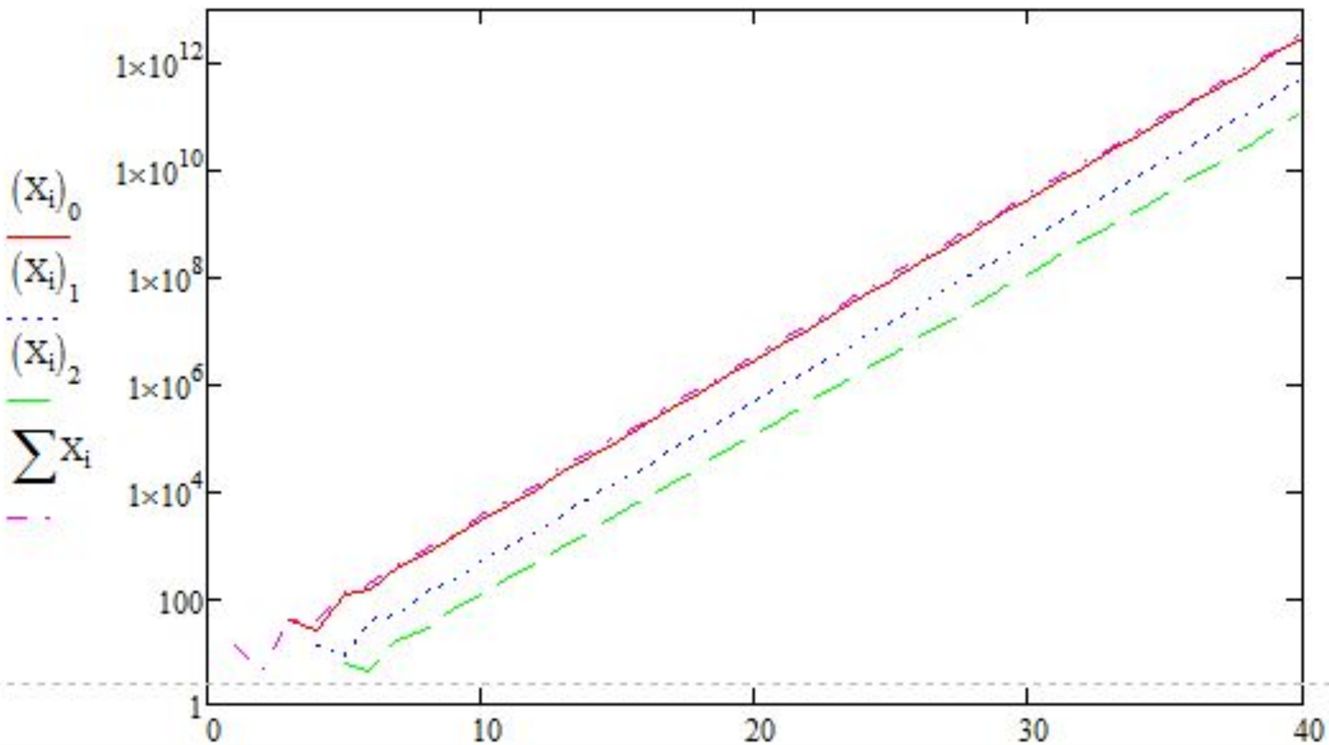
$\beta 1 := \frac{1}{3}$ $\beta 2 := \frac{1}{2}$ доля когорты, дожившая доначала данного возрастного класса

$L := \begin{pmatrix} 0 & \alpha 1 & \alpha 2 \\ \beta 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta 2 & 0 \end{pmatrix}$ трансформационная матрица (так называемая "Матрица Лесли")

$X_i := L \cdot X_{i-1}$ распределение особей по возрастным группам в следующем интервале времени

$$X_{10} = \begin{pmatrix} 2.688 \times 10^3 \\ 468 \\ 108 \end{pmatrix}$$ распр. особей по когортам через 10 лет

$$(X_{10})_0 = 2.688 \times 10^3 \qquad \sum X_{10} = 3.264 \times 10^3$$



Исследование с помощью модели 3

- Проанализируйте графики. Какая из возрастных групп вносит наибольший вклад в численность популяции?
- Рассчитайте с помощью модели и покажите на графике численность возрастных групп в начале 5, 10, 20, 40 интервала времени.

Таблица 2 Численность в каждой возрастной группе

	Номер интервала времени для расчета численности i				
	5	10	20	30	40
	Численность в когорте на начало интервала времени				
Когорта 0 (дети)	$X_0(t_5)$	$X_0(t_{10})$	$X_0(t_{20})$	$X_0(t_{30})$	$X_0(t_{40})$
Когорта1(1-5)	$X_1(t_5)$	$X_1(t_{10})$	$X_1(t_{20})$	$X_1(t_{30})$	$X_1(t_{40})$
Когорта2(5-7)	$X_2(t_5)$	$X_2(t_{10})$	$X_2(t_{20})$	$X_2(t_{30})$	$X_2(t_{40})$
$\sum X_i(t_k)$					

Решение обратной задачи

- Найти I – номер интервала времени когда X≈1000

	$(X_i)_1 =$	$(X_i)_0 =$	$(X_i)_2 =$
1	0	12	0
2	4	0	0
3	0	36	2
4	12	24	0
5	8	108	6
6	36	144	4
7	48	372	18
8	124	648	24
9	216	$1.404\cdot10^3$	62
10	468	$2.688\cdot10^3$	108
11	896	$5.508\cdot10^3$	234
12	$1.836\cdot10^3$	$1.087\cdot10^4$	448
13	$3.624\cdot10^3$	$2.19\cdot10^4$	918
14	$7.3\cdot10^3$	$4.363\cdot10^4$	$1.812\cdot10^3$
15			

Содержание отчёта

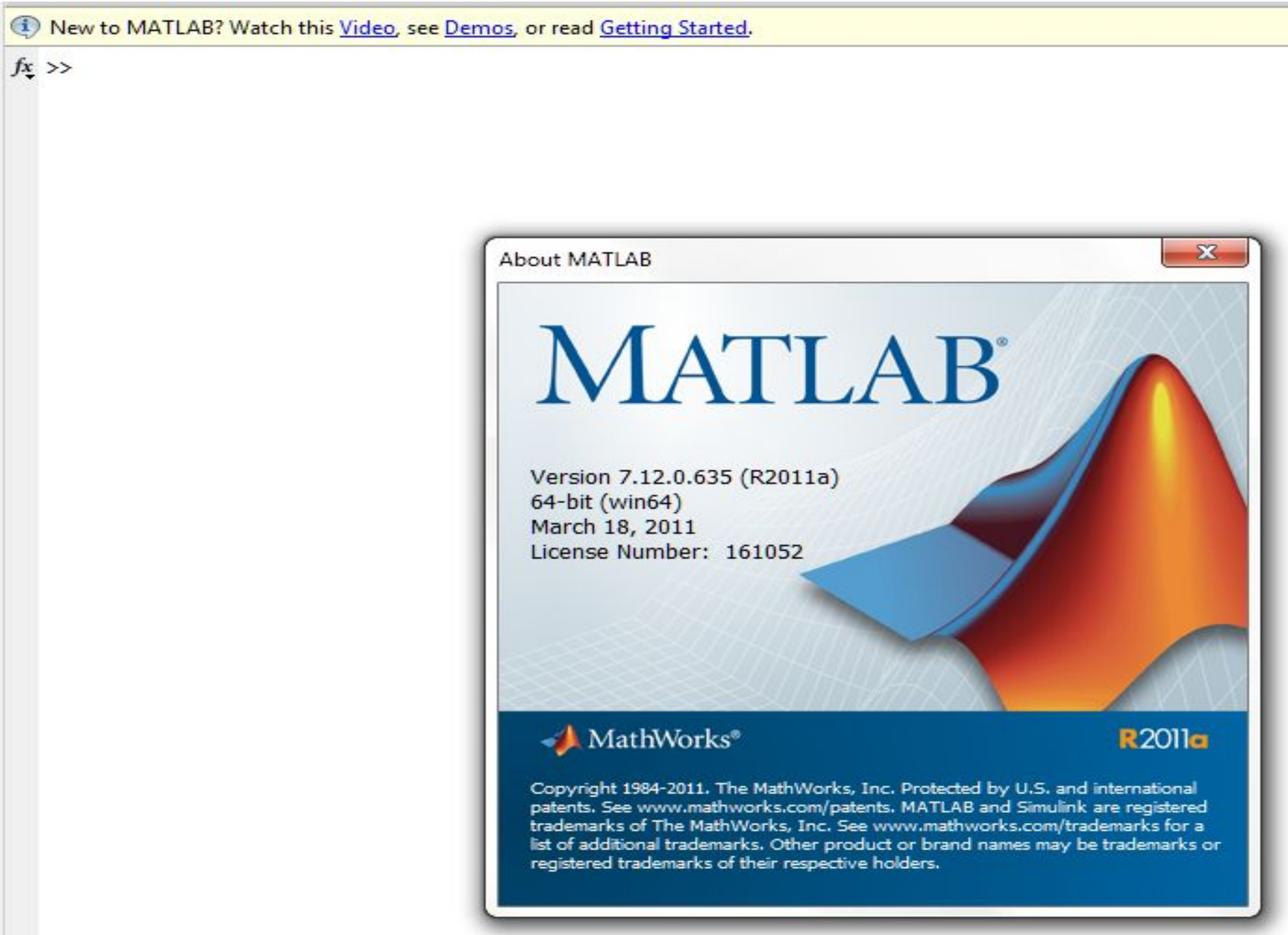
- **Постановка задачи** моделирования динамики численности популяции, обладающей возрастной структурой
- Исходные данные к расчёту Когортная Таблица 1
- Исходные данные: вектор популяции на начало исследования модели , X_0
- Результаты расчета - Таблица 2 Численность в каждой возрастной группе в заданные временные интервалы
- Гафики зависимости численности когорт от номера интервала времени.
- Выводы по графикам (вклад в численность популяции).
- Решение обратной задачи: Определение номеров интервалов времени, в которых численность когорт примет заданное преподавателем значение (например, X=1000). Вывод об относительной скорости достижения заданной численности каждой когорты.

Логистическое уравнение с запаздыванием

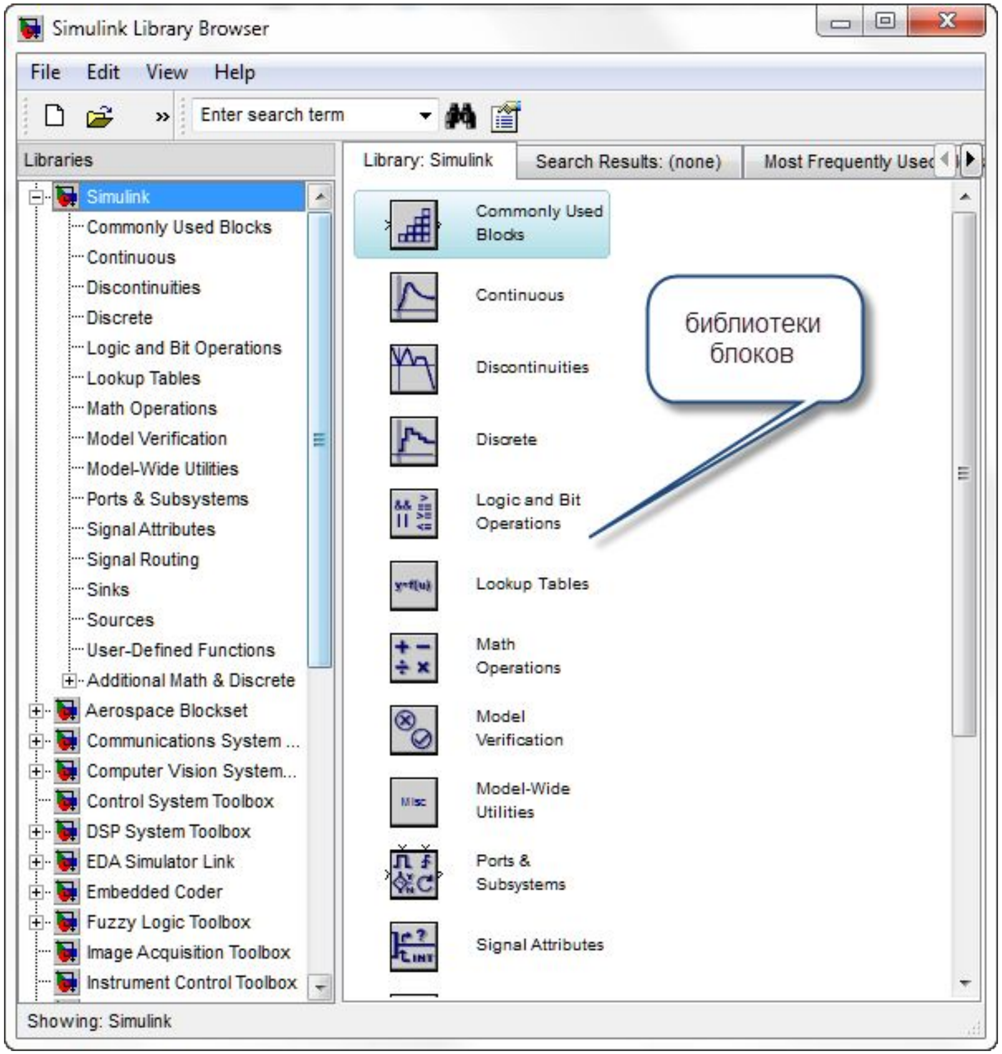
$$\frac{dX}{dt} = rX(t)\left[1 - \frac{X(t-T)}{K}\right].$$

Где скорость роста популяции - r
T - время запаздывания

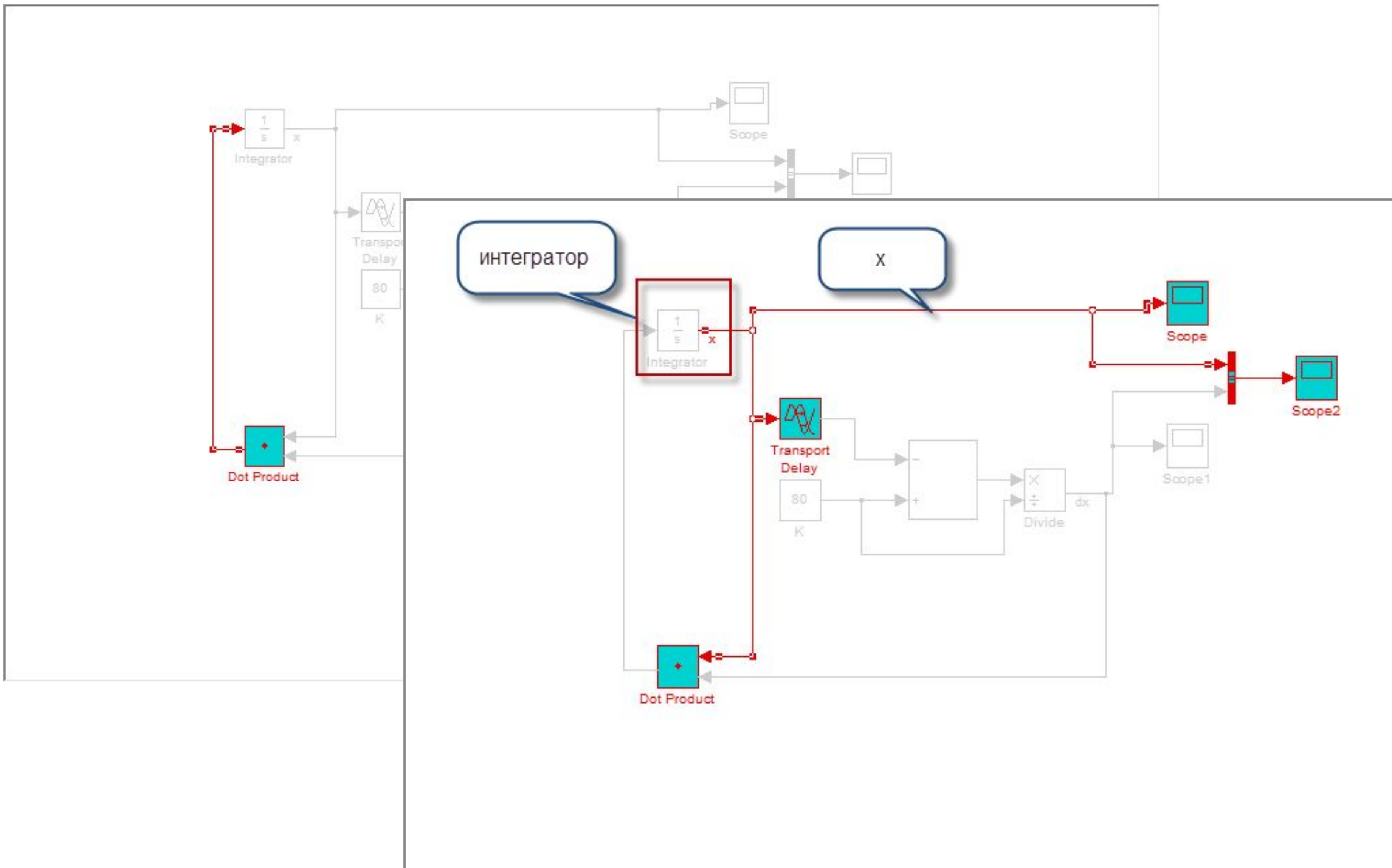
Основное окно программы Matlab



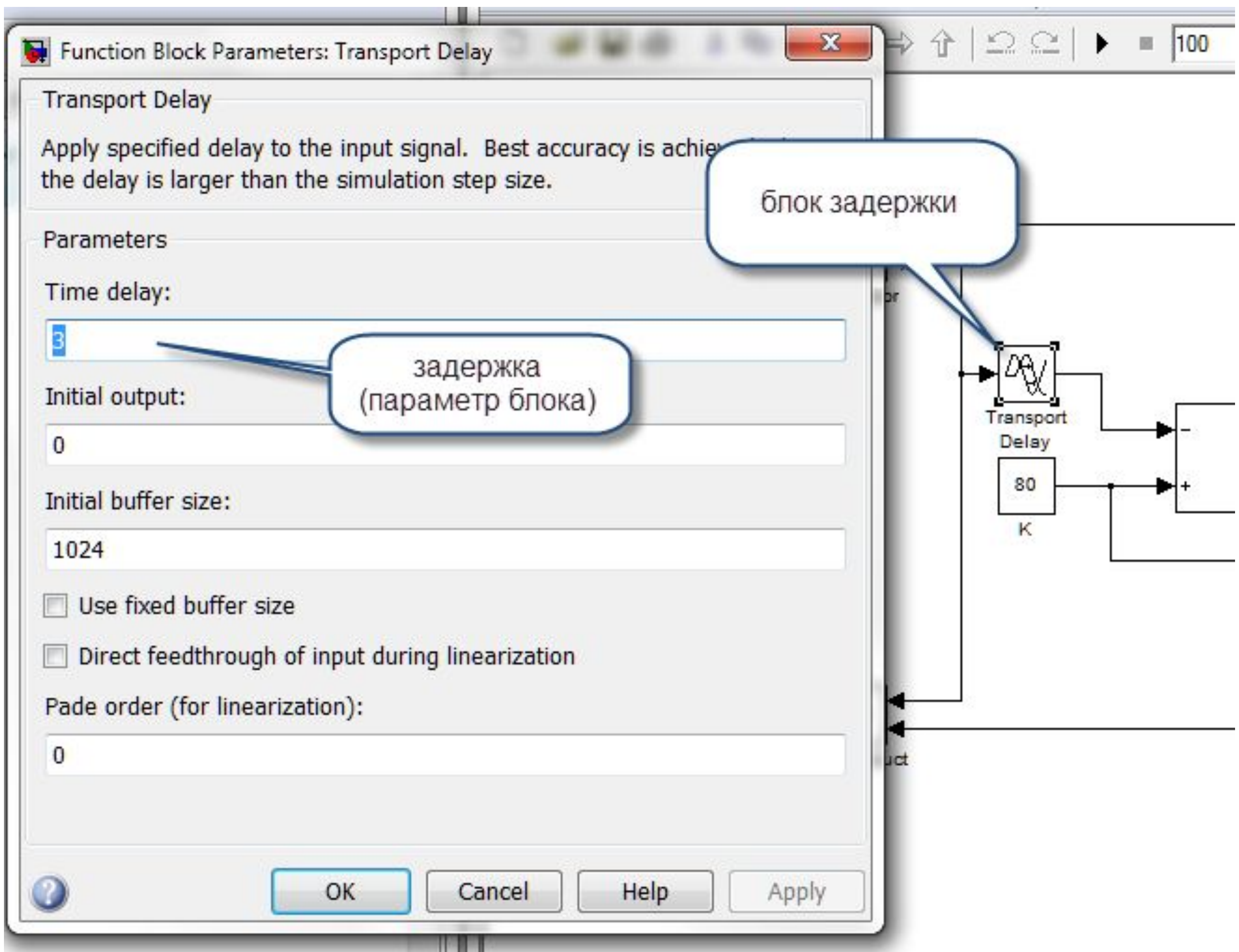
Среда имитационного моделирования Simulink (дополнение к Matlab)



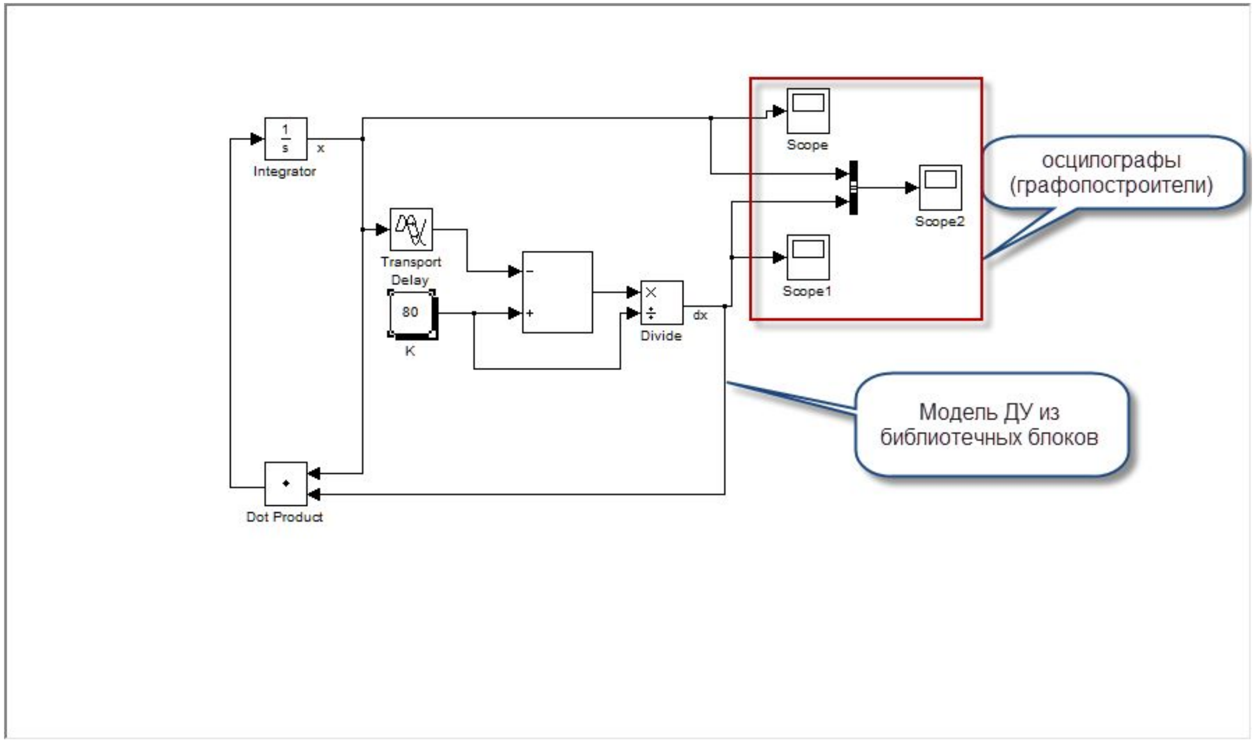
Модель – блоки, соединенные сигналами



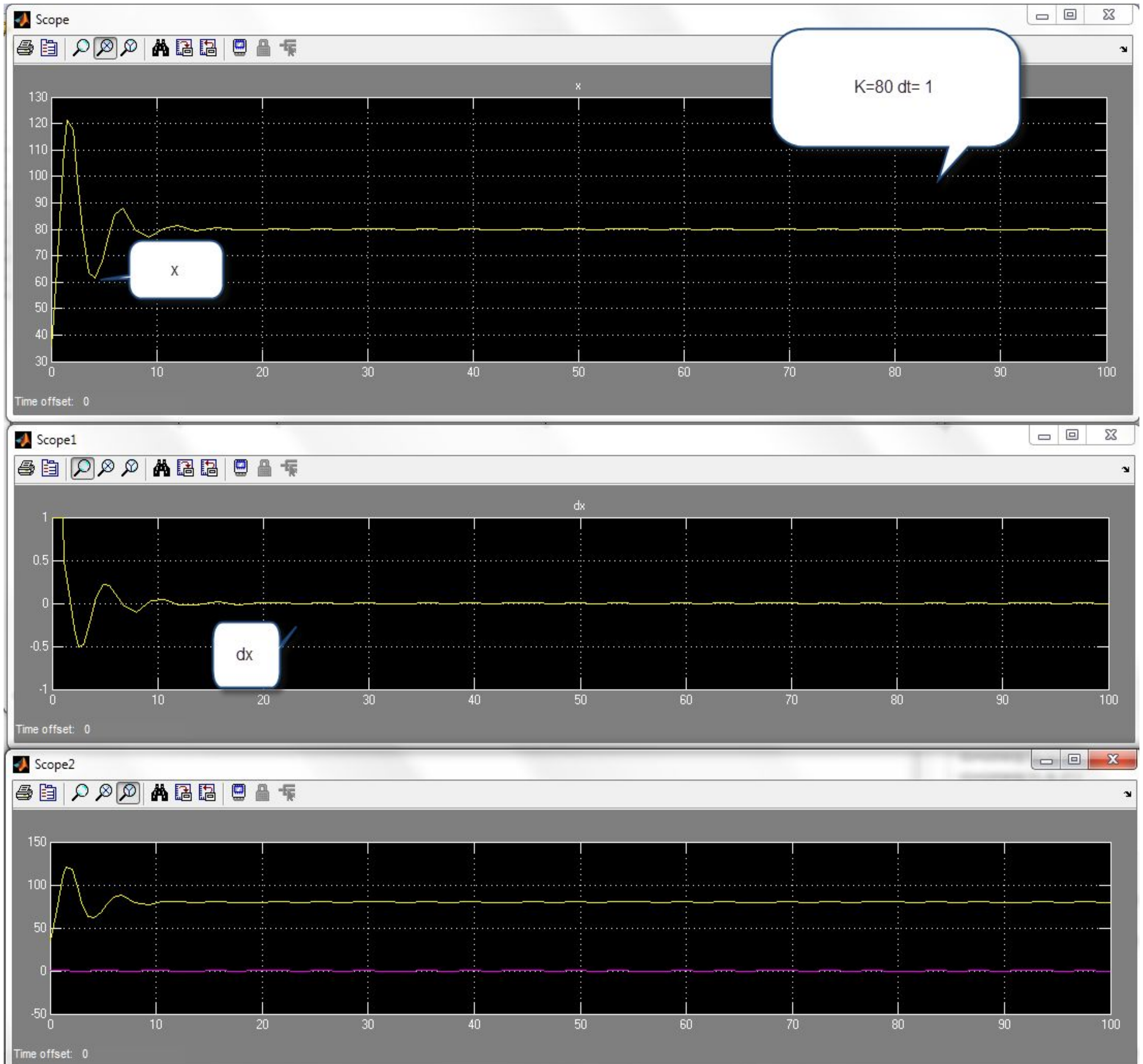
Блок может обладать настроечными параметрами



Блоки визуализации результатов

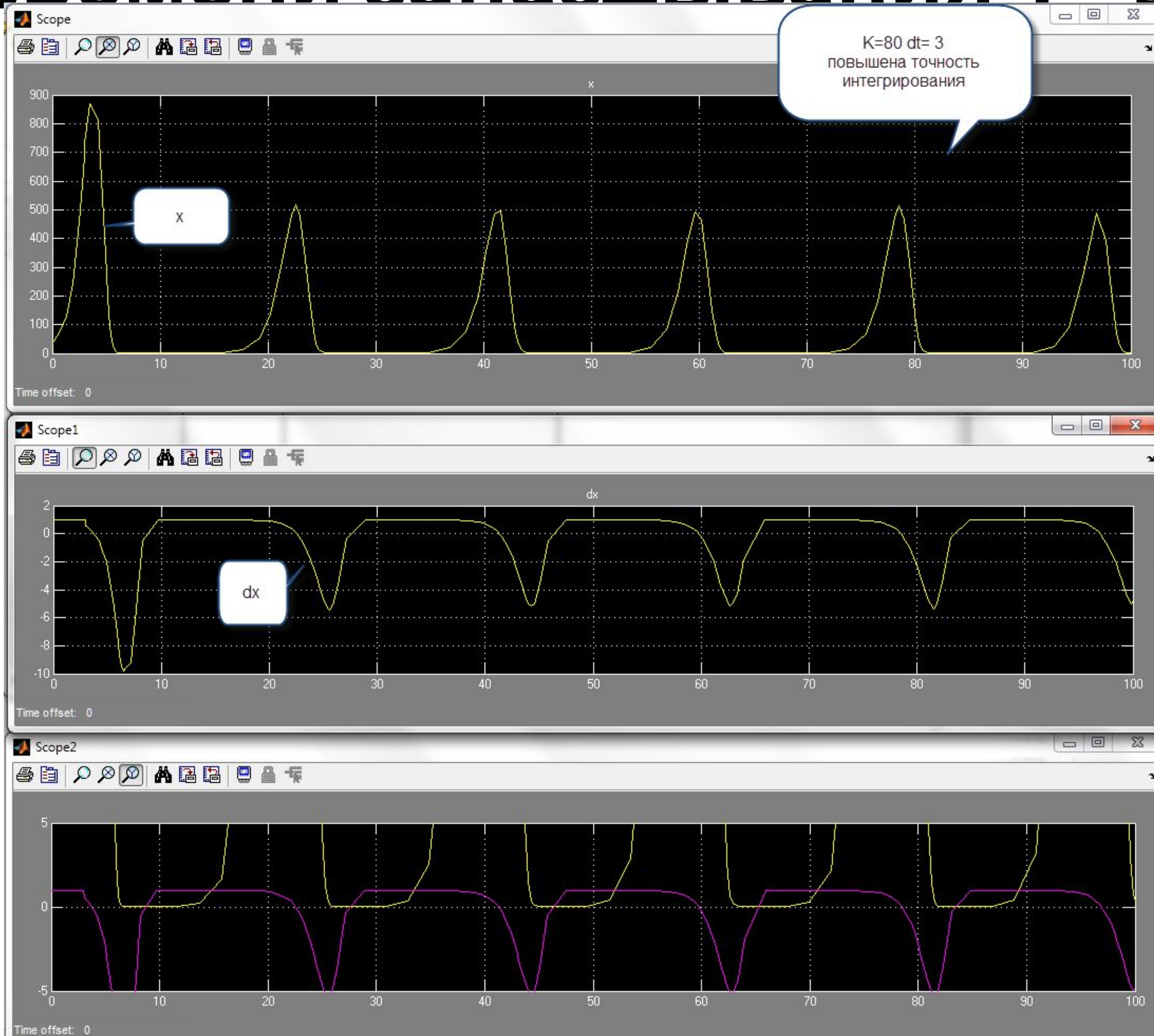


Результаты расчетов при времени запаздывания T =1

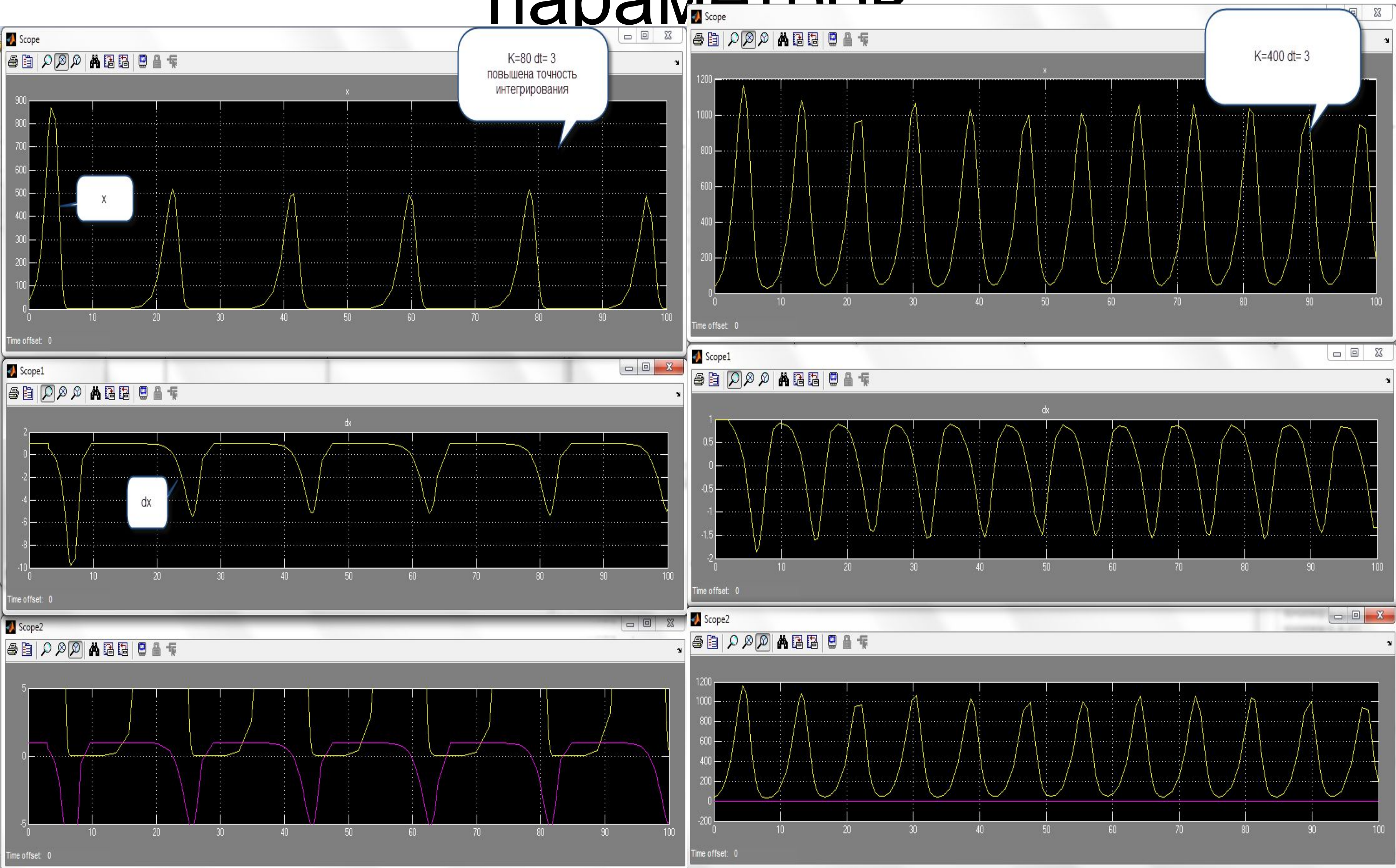


Результаты расчетов при времени запаздывания T =2

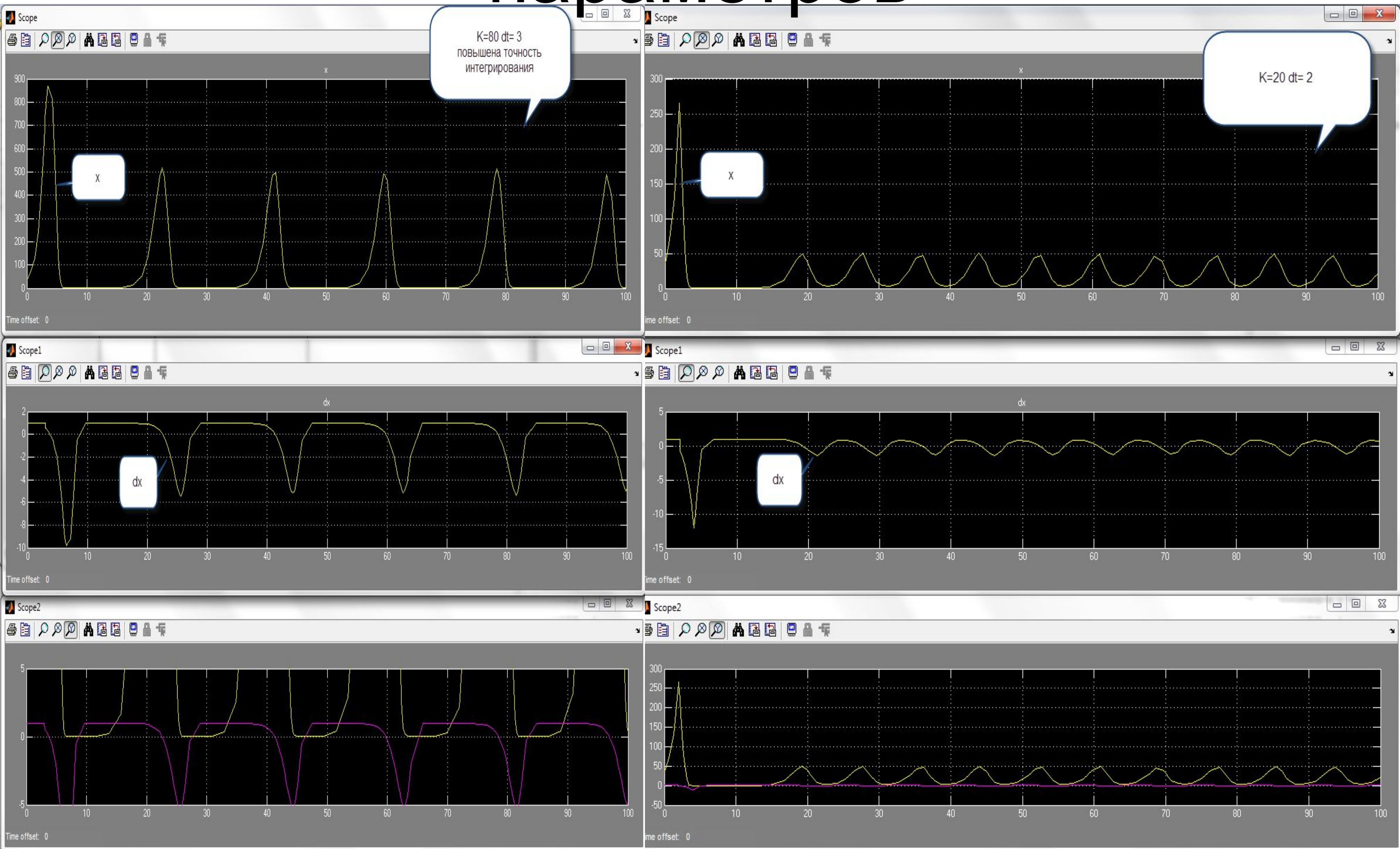
Результаты расчетов при времени запаздывания T =3



Динамические режимы системы в зависимости от значений её параметров



Динамические режимы системы в зависимости от значений её параметров



Выводы

- Запаздывание в регуляции системы может привести к возникновению колебаний переменных.
- Если система регулируется петлей обратной связи, в которой происходит существенная задержка, то весьма вероятно возникновение колебаний. Фаза и амплитуда которых зависят от параметров запаздывания и ёмкости среды
- Графики показывают, что численность имеет регулярные колебания, характер которых зависит от параметров системы.
- Если продолжительность задержки в петле обратной связи больше собственного времени системы, могут возникнуть колебания с нарастающей амплитудой, нарушаются их период и фаза, такого эффекта мы здесь