

**Пример 1.** Найти графическим методом решение стандартной задачи линейного программирования:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$
$$z = 30x_1 + 40x_2 \rightarrow \max.$$

**Решение.** В плоскости  $x_1Ox_2$  система ограничений образует выпуклую область, ограниченную многоугольником. Для построения этой области воспользуемся следующим фактом. Прямая  $ax_1 + bx_2 = c$ , разбивает плоскость  $x_1Ox_2$  на две полуплоскости. В одной полуплоскости  $ax_1 + bx_2 < c$ , в другой  $ax_1 + bx_2 > c$ . Если  $c > 0$ , то в полуплоскости, содержащей начало координат,  $ax_1 + bx_2 < c$ , следовательно, в полуплоскости, не содержащей начало координат  $ax_1 + bx_2 > c$ .

При геометрической интерпретации задач ЛП могут встретиться случаи, изображенные на рис. 2.1.–2.4.

Рис. 2.1. Задача ЛП имеет единственное решение  $f_{\max} = f(X_{\max})$ .

Рис. 2.2. Задача ЛП имеет бесчисленное множество решений, так как целевая функция достигает максимума на отрезке  $[M; N]$ .

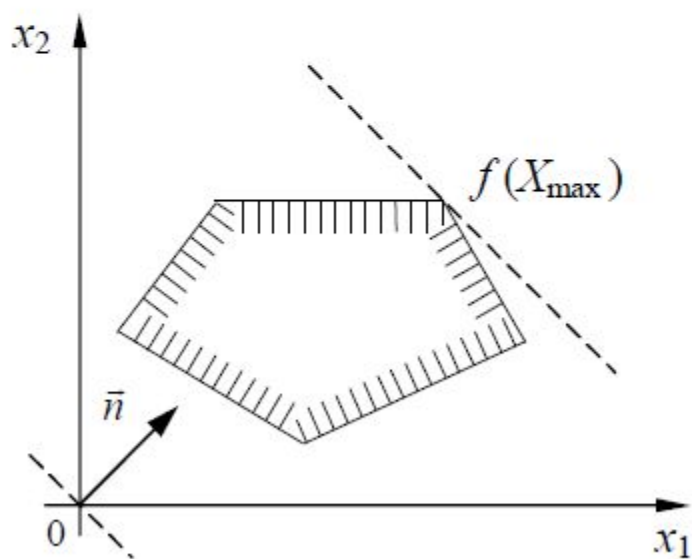


Рис. 2.1

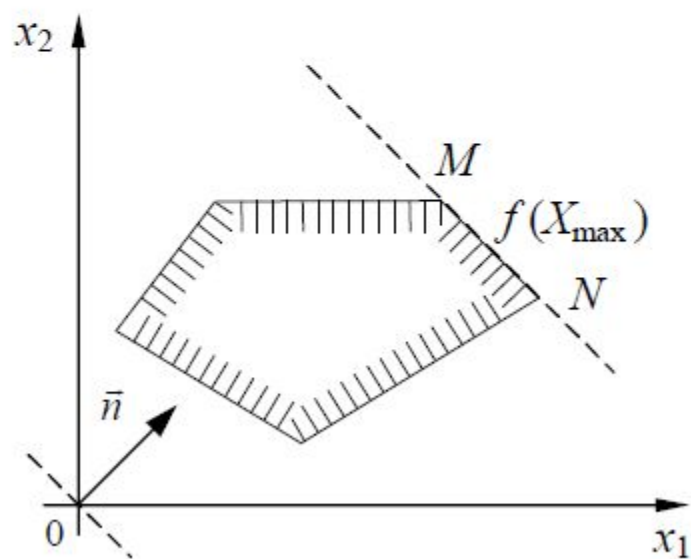


Рис. 2.2

Рис. 2.3. Задача ЛП не имеет решения, так как функция неограниченна сверху.

Рис. 2.4. Задача ЛП не имеет решения, так как система (2.1) несовместна.

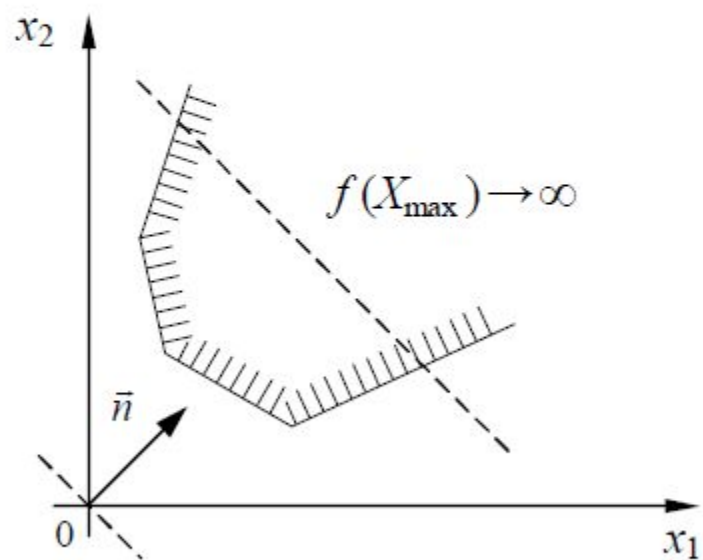


Рис. 2.3

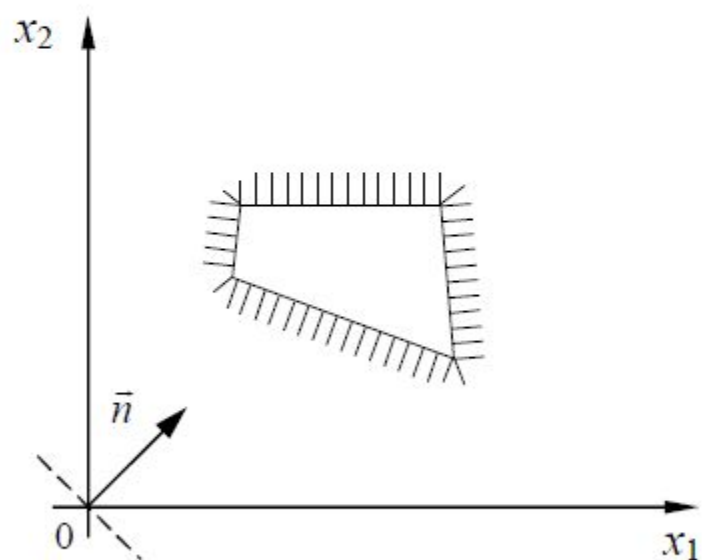


Рис. 2.4

**Пример.** Для производства двух видов изделий  $A$  и  $B$  предприятие использует три вида сырья  $S_1, S_2, S_3$ . Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в табл. 2.1.

Прибыль от реализации одного изделия каждого вида равна  $c_1$  и  $c_2$ , а общее количество сырья вида  $S_i$  равно  $b_i, i = 1, 2, 3$ . Считая, что изделия  $A$  и  $B$  могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), требуется составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий будет максимальной.

Таблица 2.1

Сырье	$A$	$B$	Запасы
$S_1$	$a_{11} = 12$	$a_{12} = 4$	$b_1 = 300$
$S_2$	$a_{21} = 4$	$a_{22} = 4$	$b_2 = 120$
$S_3$	$a_{31} = 3$	$a_{32} = 12$	$b_3 = 252$
Прибыль	$c_1 = 30$	$c_2 = 40$	

*Решение.* Обозначим через  $x_1$  и  $x_2$  количество изделий первого и второго вида в плане предприятия. Поскольку производство продукции ограничено только сырьем каждого типа  $S_i$ , то получим условия:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2. \end{cases} \quad (2.3)$$

Переменные  $x_1$  и  $x_2$  не могут быть отрицательными по смыслу задачи.

Вычислим прибыль от реализации продукции и получим

$$f(X) = 30x_1 + 40x_2 \rightarrow \max, \quad X = (x_1, x_2).$$

Итак, мы получили стандартную модель с двумя переменными.

Решим задачу линейного программирования геометрически, придерживаясь плана, приведенного ранее.

1. Строим прямые  $l_1, l_2, l_3$  в плоскости  $x_1Ox_2$  (рис. 2.5):

$$l_1: 12x_1 + 4x_2 = 300, \quad \text{по двум точкам } A_1(25;0) \text{ и } B_1(0;75);$$

$$l_2: 4x_1 + 4x_2 = 120, \quad \text{по двум точкам } A_2(30;0) \text{ и } B_2(0;30);$$

$$l_3: 3x_1 + 12x_2 = 252, \quad \text{по двум точкам } A_3(84;0) \text{ и } B_3(0;21).$$

Обратимся к неравенствам (2.3). Отметим те полуплоскости, которые им удовлетворяют. Учтем на чертеже неотрицательность переменных  $x_1$  и  $x_2$  и получим многоугольник  $OB_3ECA_1$  решений данной системы неравенств (рис. 2.5).

2. Построим линию уровня – прямую  $l$ :  $30x_1 + 40x_2 = 0$  и нормальный вектор  $\vec{n} = \{30; 40\}$ .

3. Передвигая линию уровня  $l$  в направлении вектора  $\vec{n}$ , заметим, что в точке  $E$  целевая функция будет иметь наибольшее значение. Найдем координаты этой точки как координаты точки пересечения прямых  $l_2$  и  $l_3$ , решая систему соответствующих уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 52, \end{cases} \rightarrow x_1 = 12, x_2 = 8.$$

Таким образом, точка  $E(12;18)$  определяет наибольшее значение целевой функции.

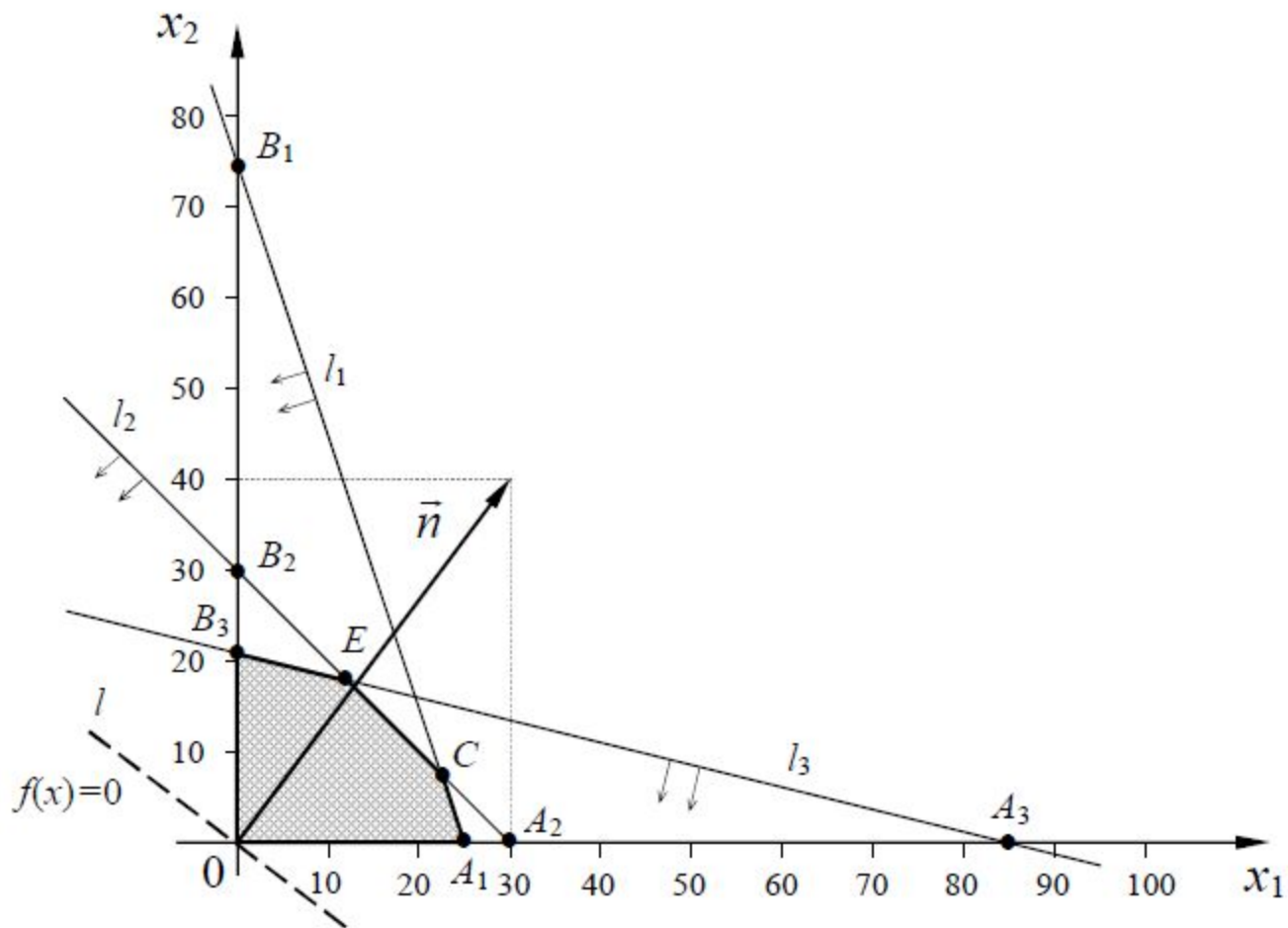


Рис. 2.5



4. Найдем величину целевой функции, подставив найденные значения переменных, и запишем окончательный ответ

$$X_{\max} = (12, 18), \rightarrow f_{\max} = f(X_{\max}) = 1080.$$

Наибольшая прибыль будет равна 1080 (y.e).

## *Графический метод решения ЗЛП в Excel*

Для решения заданной задачи линейного программирования воспользуемся программой Excel (см. Рисунок 1). В Основную таблицу введены коэффициенты ограничений и целевой функции. Границы ограничений (это прямые) строим по двум точкам. Важно выбрать точки так, чтобы можно было наглядно по графикам границ увидеть область ограничений. В нашем случае правые части ограничений и коэффициенты ограничений положительны. Поэтому в качестве первой точки можно взять  $x_1 = 0$ , координата  $x_2$  вычисляется из уравнения соответствующей границы. Вторая точка определяется аналогично:  $x_2 = 0$ , координата  $x_1$  вычисляется из уравнения соответствующей границы.

## Графический метод решения ЗЛП в Excel

В Таблице 1 (см. Рисунок 1) в ячейку A10 введено число 0, в ячейку B10 введена формула =C3/B3. В ячейку B11 введено число 0, в ячейку A11 введена формула =C3/A3. Аналогично заполняются ячейки Таблицы 2 и Таблицы 3.

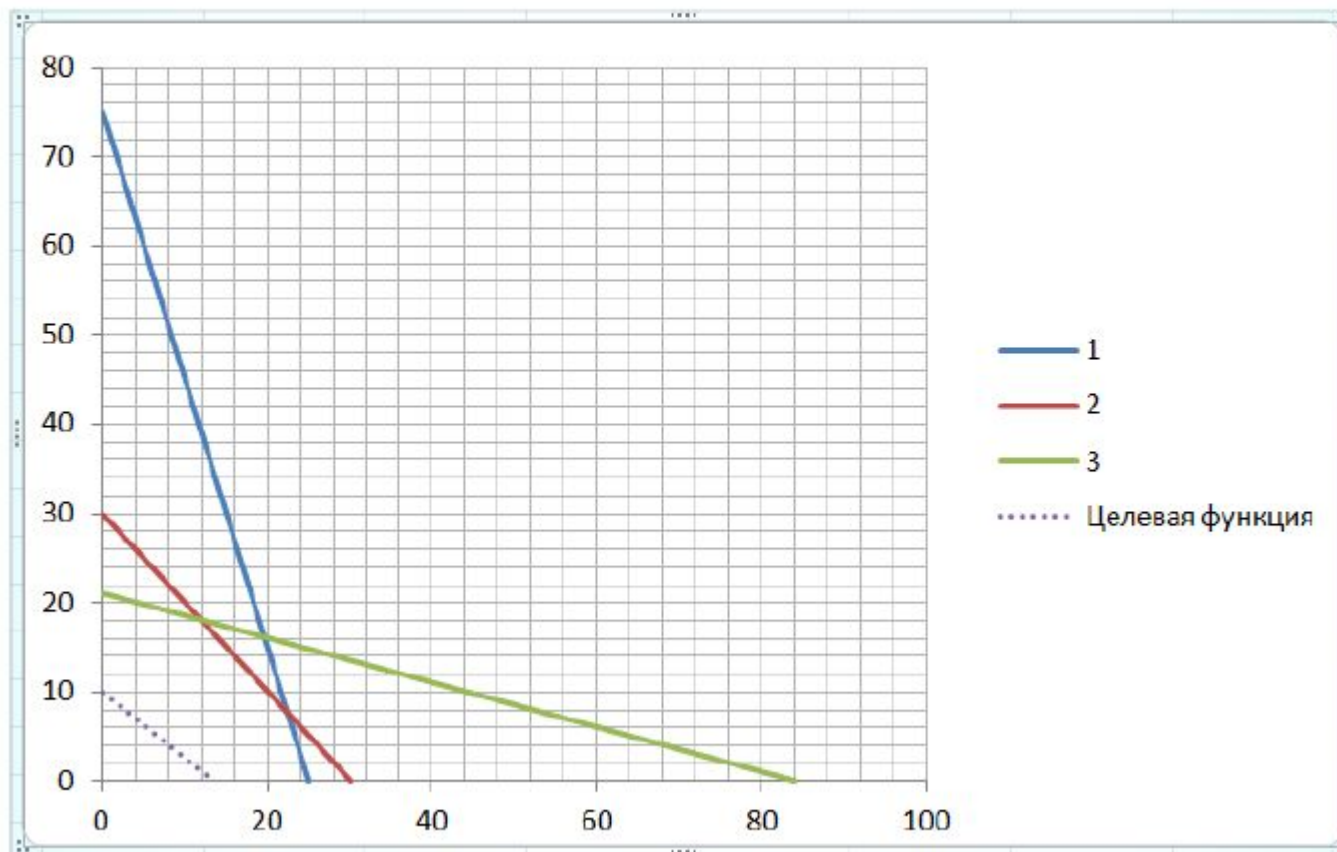
Ячейки Таблицы 4 соответствуют точкам для построения части прямой  $30x_1 + 40x_2 = C$ , где  $C$  – значение целевой функции. В начале вводим некоторое значение числа  $C$ , далее по этому числу определяем точки для построения целевой функции. Число  $C$  будем изменять и по графику целевой функции визуально определим вершину, в которой целевая функция принимает максимальное значение.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Основная таблица							
2	x1	x2	b					
3	12	4	300					
4	4	4	120					
5	3	12	252					
6	30	40						
7								
8	Таблица 1			Таблица 2			Таблица 3	
9	x1	x2		x1	x2		x1	x2
10	0	75		0	30		0	21
11	25	0		30	0		84	0
12								
13				Таблица 4				
14				x1	x2			
15	C =	400		0	10			
16				13,33333	0			

**Рисунок 1.** Расчет данных для построения границ и целевой функции

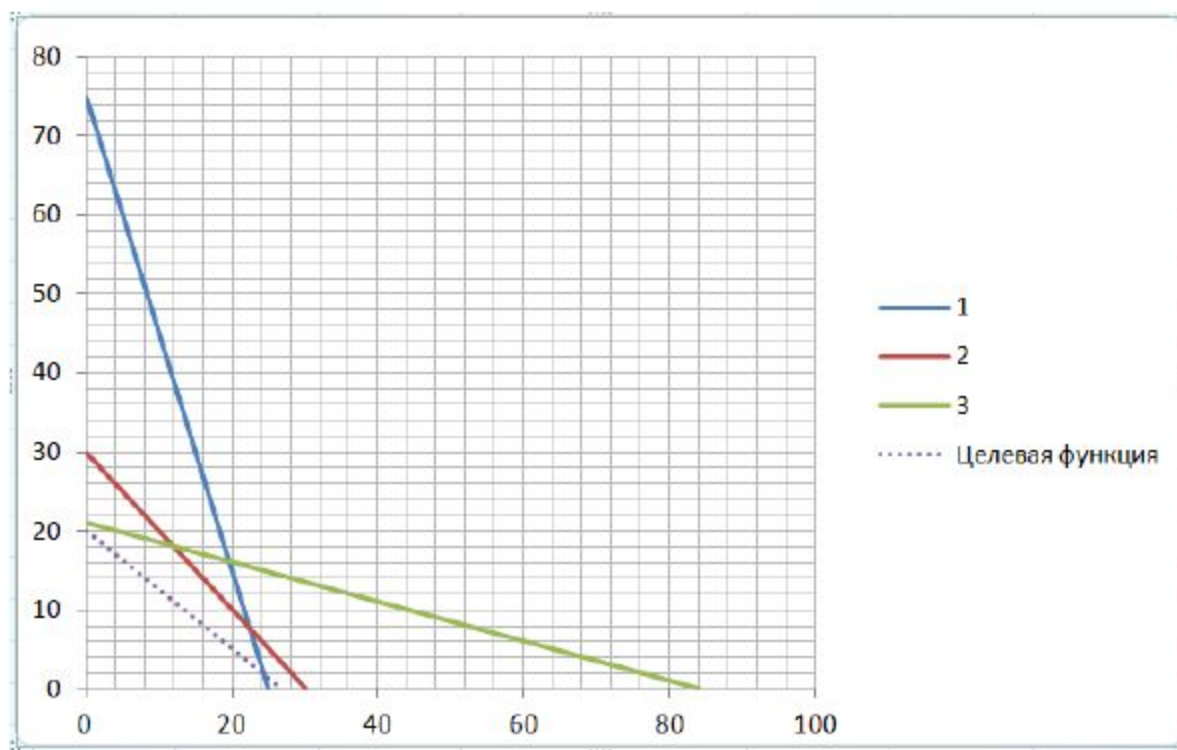
В ячейку B15 введено число 400 (число выбиралось произвольно). В ячейке D15 введено число 0, в ячейку E15 введена формула  $=B15/B6$ . В ячейку E16 введено число 0, в ячейку D16 введена формула  $=B15/A6$ .

На Рисунке 2 представлены графики границ и целевой функции.

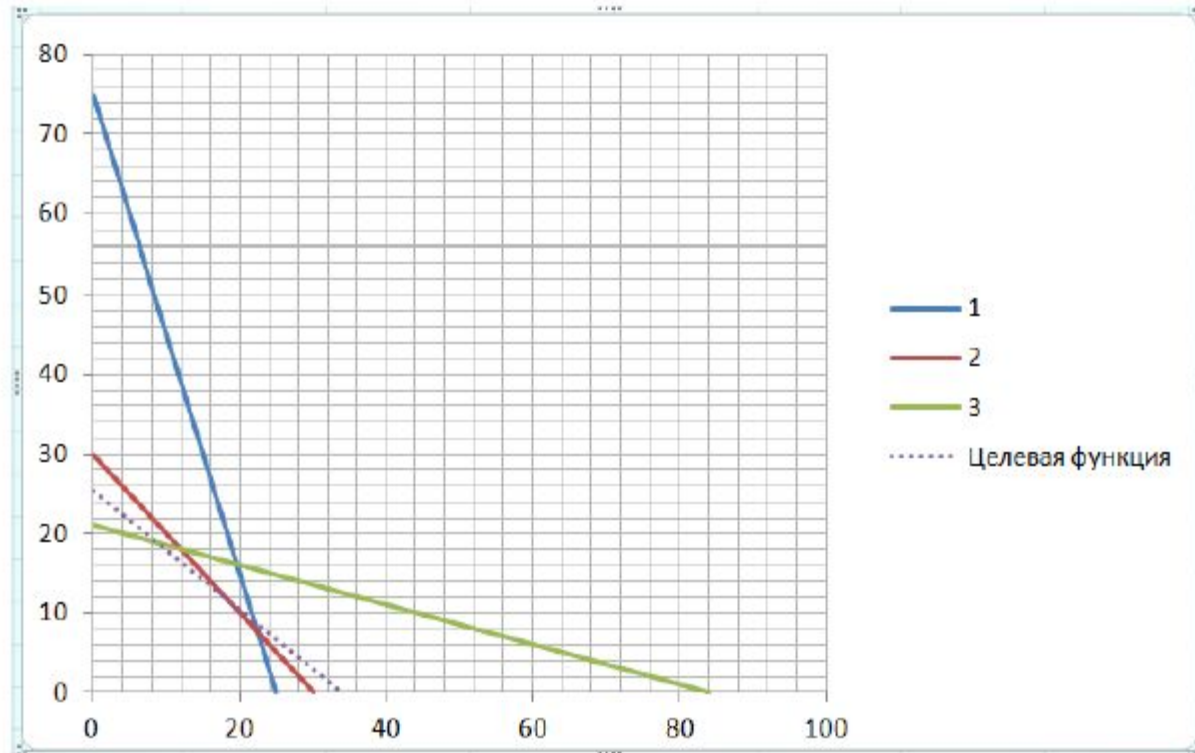


**Рисунок 2.** Графики границ и целевой функции

Визуально область ограничений находится в первой четверти «ниже» всех границ, определяемых прямыми 1, 2 и 3. Изменим значения параметра  $C$ :  $C = 800$ ;  $C = 1020$ . На Рисунке 3 представлены графики границ и целевой функции при значении  $C = 800$ . На Рисунке 4 представлены графики границ и целевой функции при значении  $C = 1200$ .



**Рисунок 3.** Графики границ и целевой функции при  $C = 800$



**Рисунок 4.** Графики границ и целевой функции при  $C = 1020$

Из последнего рисунка видно, что максимальное значение целевая функция принимает в вершине, которая определяется пересечением прямых 2 и 3. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252, \end{cases}$$

получаем  $x_1 = 12$ ;  $x_2 = 18$ . Подставим найденные значения в целевую функцию и найдем максимальное значение целевой функции  $z$ . В итоге получаем окончательно

$$\begin{cases} x_1 = 12, \\ x_2 = 18, \end{cases}$$
$$z_{\max} = 1080.$$

**Замечание.** Для построения графиков прямых в программе Excel на вкладке «Вставка» в группе «Диаграммы» нажмем кнопку Точечная и выберем подтип «Точечная с прямыми отрезками». Далее на вкладке «Конструктор» в группе «Данные» нажмем кнопку «Выбрать данные». В окне «Выбор источника данных» в группе «Элементы легенды (ряды)» нажмем кнопку «Добавить» и в окне «Изменение ряда» заполняем поля: «Имя ряда:», «Значение X:», «Значение Y:».

## Симплекс-метод в программе Excel

### Метод Жордана-Гаусса решения систем линейных уравнений

Метод Жордана-Гаусса рассмотрим на основе примера.

**Пример 1.** Найти решение системы

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3, \\ -4x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \end{cases}$$

методом Жордана-Гаусса.

**Решение.** Запишем расширенную матрицу этой системы в виде таблицы

Таблица 1			
x1	x2	x3	b
3	-4	2	3
-4	5	7	2
5	3	-6	-4

**Рисунок 7.** Расширенная матрица системы



Среди элементов основной матрицы системы выберем разрешающий элемент. Разрешающий элемент – это любой, не равный нулю элемент. Выберем в качестве первого разрешающего элемента элемент, стоящий на пересечении второй строки и первого столбца, его значение равно -4. Заметим, что в качестве разрешающего элемента можно было выбрать любой элемент первых трех столбцов расширенной матрицы системы (все они не равны нулю).

Преобразуем расширенную матрицу системы с помощью разрешающего элемента. Для этого запишем пустую таблицу (см. Рисунок 2).

Таблица 2			
x1	x2	x3	b

**Рисунок 8.** Пустая Таблица 2.

Далее будем заполнять Таблицу 2 по приведенным ниже правилам, осуществляя все преобразования по предыдущей Таблице 1. Для наглядности разделим заполнение Таблицы 2 по разным рисункам.

Выбираем в Таблице 2 элемент, соответствующий разрешающему элементу. В нашем случае – это элемент, стоящий на пересечении второй строки и первого столбца. Все элементы первого столбца Таблицы 2 над выбранным элементом и под выбранным элементом заполняем нулями. Все элементы второй строки делим на выбранный элемент (см Рисунок 3)

Таблица 2			
x1	x2	x3	b
0			
1	-5/4	-7/4	-1/2
0			

**Рисунок 9.** Заполнение Таблицы 2. Шаг первый

Заполняем все оставшиеся незаполненные элементы Таблицы 2 по следующему алгоритму. Выбираем незаполненный элемент Таблицы 2, для примера, выберем элемент – первая строка, четвертый столбец. В предыдущей Таблице 1 построим прямоугольник по двум элементам (эти элементы расположены в вершинах диагонали прямоугольника): разрешающий элемент и элемент, стоящей на пересечении первой строки и четвертого столбца (этот элемент соответствует заполняемому элементу Таблицы 2), см. Рисунок 4.

				Таблица 1			
x1	x2	x3	b	x1	x2	x3	b
3	-4	2	3	3	-4	2	3
-4	5	7	2	-4	5	7	2
5	3	-6	-4	5	3	-6	-4

**Рисунок 10.** Заполнение Таблицы 2. Шаг второй

Значение выбранного элемента Таблицы 2 вычисляется по правилу. В Таблице 1 значение элемента, стоявшего в противоположной вершине диагонали прямоугольника, проведенной от вершины разрешающего элемента (этот элемент соответствует выбранному элементу), минус произведение значений элементов вершин другой диагонали прямоугольника, деленное на значение разрешающего элемента:  $3 - 3 \cdot 2 / -4 = 3 + 3 / 2 = 9 / 2$  (см. Рисунок 5).

Таблица 2			
x1	x2	x3	b
0			9/2
1	-5/4	-7/4	-1/2
0			

**Рисунок 11.** Заполнение Таблицы 2. Шаг третий

Еще раз применим алгоритм вычисления значения элемента, стоящего на пересечении третьей строки и третьего столбца Таблицы 2:  
 $-6 - 5 \cdot 7 / -4 = -6 + 35 / 4 = 11 / 4$  (см. Рисунок 6)

Таблица 1				Таблица 2			
x1	x2	x3	b	x1	x2	x3	b
3	-4	2	3	0			9/2
-4	5	7	2	1	-5/4	-7/4	-1/2
5	3	-6	-4	0		11/4	

**Рисунок 12.** Заполнение Таблицы 2. Шаг третий (продолжение)

Аналогично вычисляются значения остальных элементов Таблицы 2 (см. Рисунок 7)

Таблица 2			
x1	x2	x3	b
0	-1/4	29/4	9/2
1	-5/4	-7/4	-1/2
0	37/4	11/4	-3/2

**Рисунок 13.** Заполнение Таблицы 2. Шаг третий (окончание)

Последняя таблица – это расширенная матрица системы линейных уравнений, которая равносильна исходной. Применим к этой таблице метод Жордана-Гаусса. Выберем разрешающий элемент для этой таблицы, т. е. любой элемент основной матрицы системы, не равный нулю. Важно подчеркнуть, что разрешающий элемент не должен находиться в выбранных ранее строках и столбцах для разрешающего элемента (в данном случае – это вторая строка и первый столбец).

Для разрешающего элемента – первая строка и второй столбец вычислим значения элементов Таблицы 3 по описанному выше алгоритму (см. Рисунок 8)

Таблица 2				Таблица 3			
x1	x2	x3	b	x1	x2	x3	b
0	-1/4	29/4	9/2	0	1	-29	-18
1	-5/4	-7/4	-1/2	1	0	-38	-23
0	37/4	11/4	-3/2	0	0	271	165

**Рисунок 14.** Метод Жордана-Гаусса для выбранного разрешающего элемента

**Замечание.** Значения элементов Таблицы 3, которые соответствуют первому столбцу Таблицы 2, можно не пересчитывать.

Выберем разрешающий элемент для Таблицы 3. Он определяется однозначно – третья строка и третий столбец (еще раз повторим, что разрешающий элемент не должен находиться в выбранных ранее строках и столбцах для разрешающего элемента). Применим метод Жордана-Гаусса для Таблицы 3 с выбранным разрешающим элементом (см. Рисунок 9).

Таблица 3			
x1	x2	x3	b
0	1	-29	-18
1	0	-38	-23
0	0	271	165




Таблица 4			
x1	x2	x3	b
0	1	0	-93/271
1	0	0	37/271
0	0	1	165/271

**Рисунок 15.** Метод Жордана-Гаусса для выбранного разрешающего элемента



**Замечание.** Значения элементов Таблицы 4, которые соответствуют первому и второму столбцу Таблицы 3, можно не пересчитывать.

Последняя таблица – это расширенная матрица системы уравнений, которая равносильна исходной. Поэтому

$$\begin{cases} x_1 = -37 / 271, \\ x_2 = -93 / 271, \\ x_3 = 165 / 271. \end{cases}$$