

# **НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

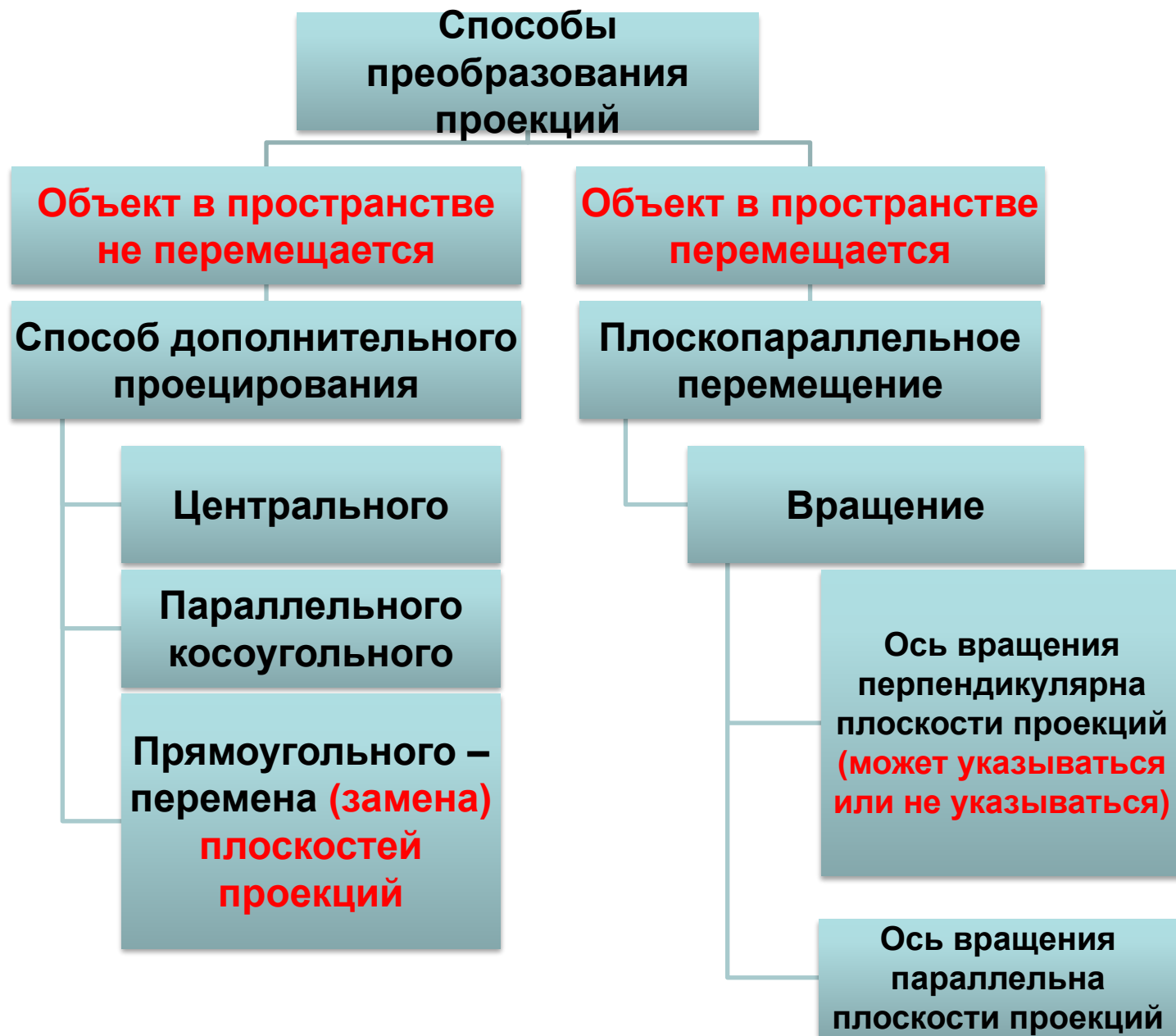
## **Лекция 3**

**Направление обучения –  
«Строительство»**

# Способы преобразования проекций

Способы преобразования проекций применяют для получения нового изображения объекта или группы объектов, которое позволяет упростить решение поставленной задачи.

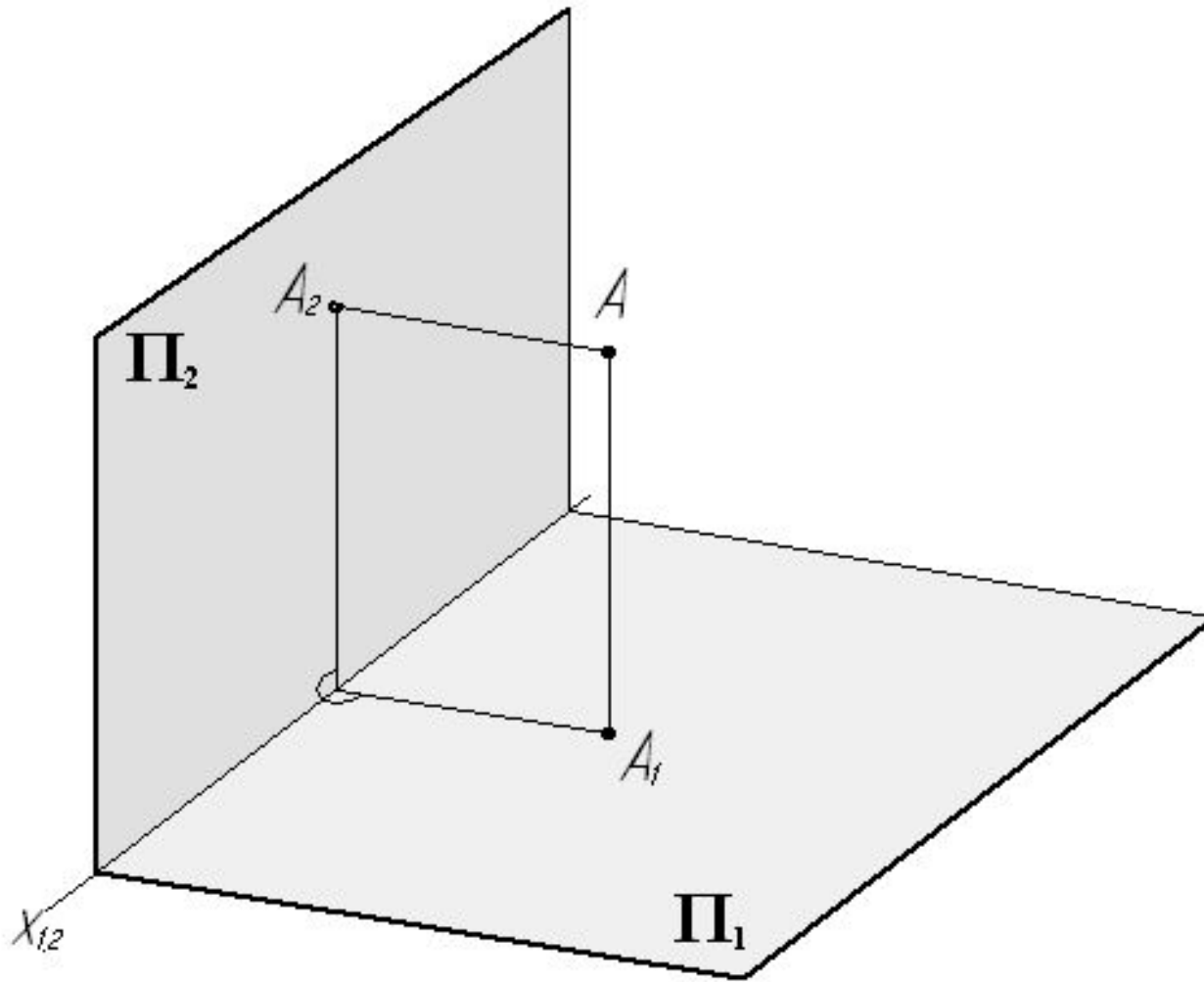
Как правило, это переход от общего положения к частному.



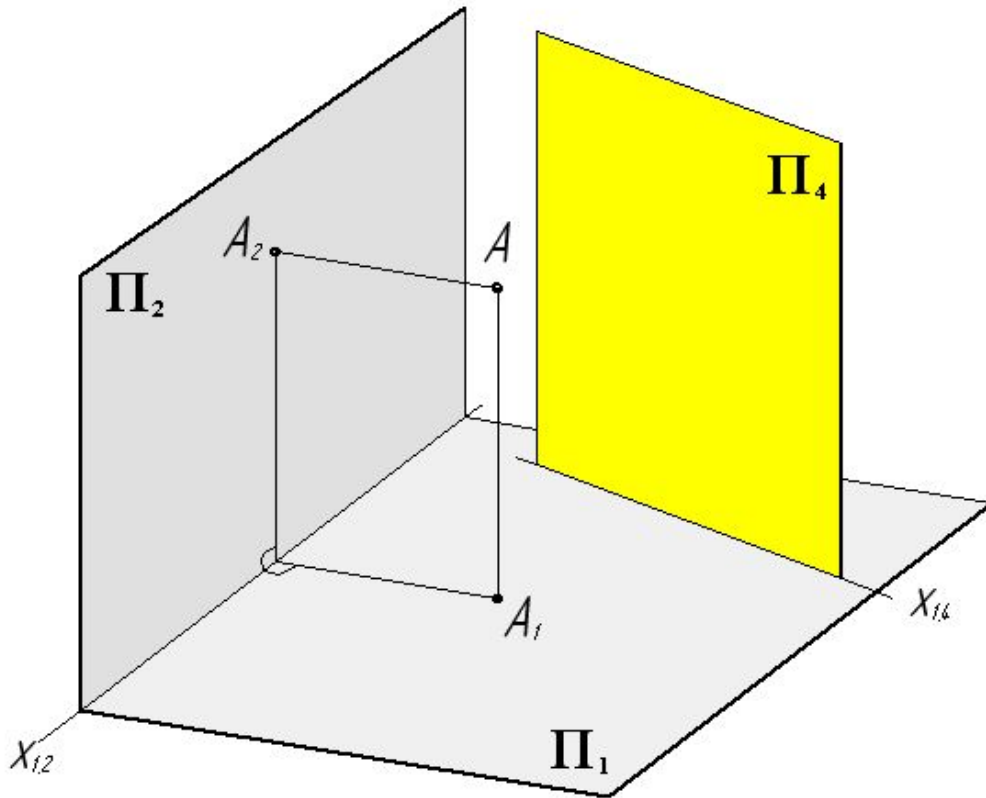
**Дополнительное прямоугольное  
проецирование –  
перемена плоскостей проекций**

- Подбираемая **дополнительная плоскость** проекций должна быть только **проецирующей**. Тем самым создаётся новая прямоугольная система плоскостей проекций.
- Подбираемые дополнительные плоскости проекций обозначаются  $\Pi_4$ ,  $\Pi_5$ ,  $\Pi_6$  и т.д.

В ортогональной системе двух плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_2$  взята произвольная точка  $A$  и построены ее проекции.



Введена дополнительная горизонтально-проецирующая плоскость проекций  $\Pi_4$ . Например, таким образом создана новая система ортогональных плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_4$  с осью  $x_{1,4}$



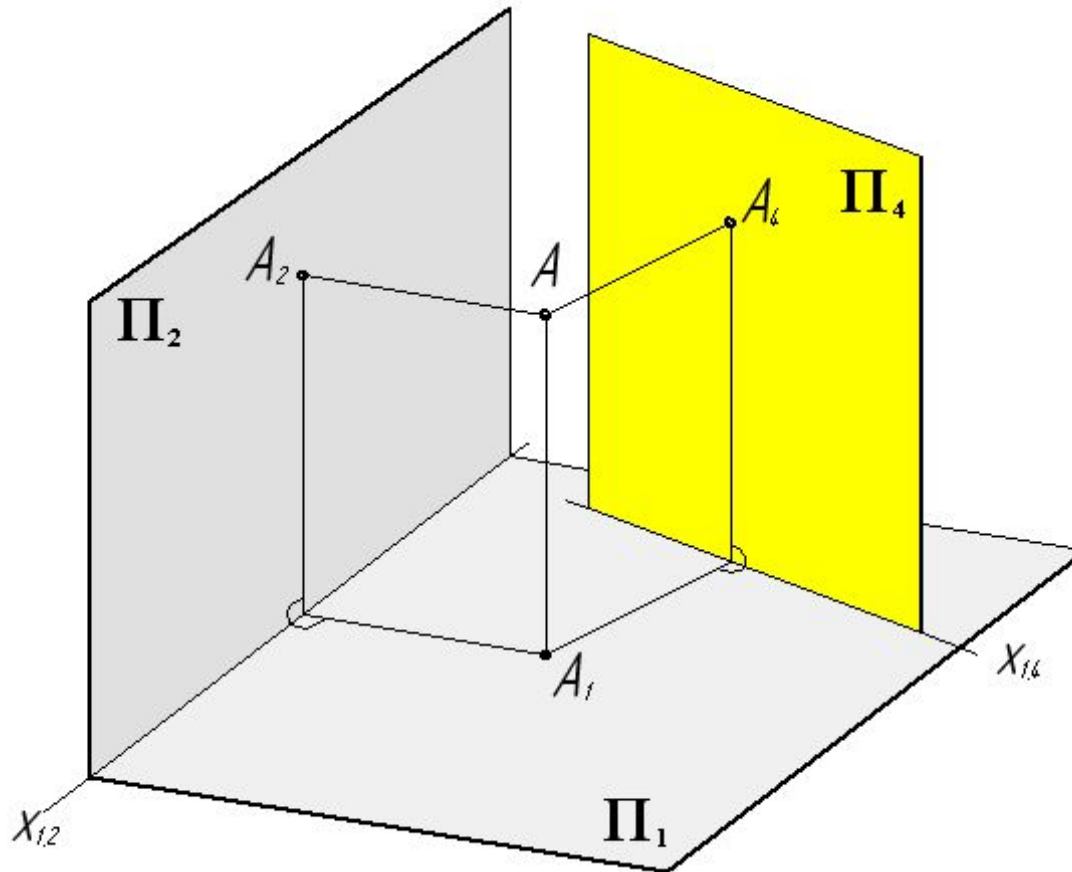
$$\begin{aligned} \Pi_4 &\perp \Pi_1 \\ \Pi_1 \cap \Pi_4 &= x_{1,4} \end{aligned}$$

$$x_{1,2} \Pi_1/\Pi_2 \longrightarrow x_{1,4} \Pi_1/\Pi_4$$

$\Pi_1 - \text{const}$



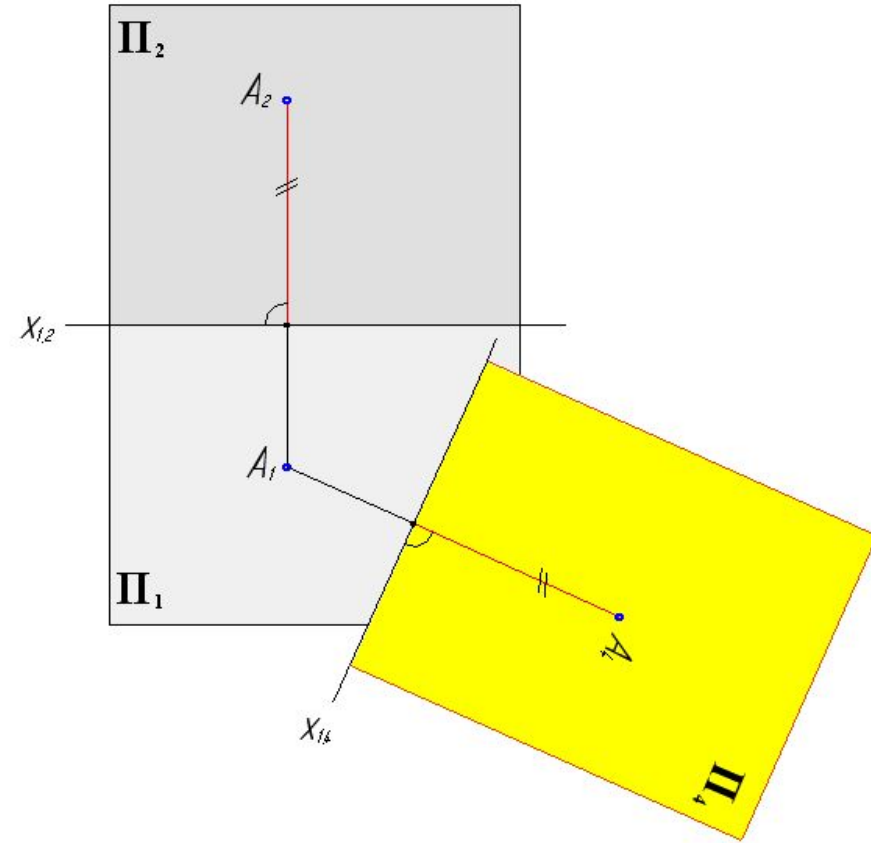
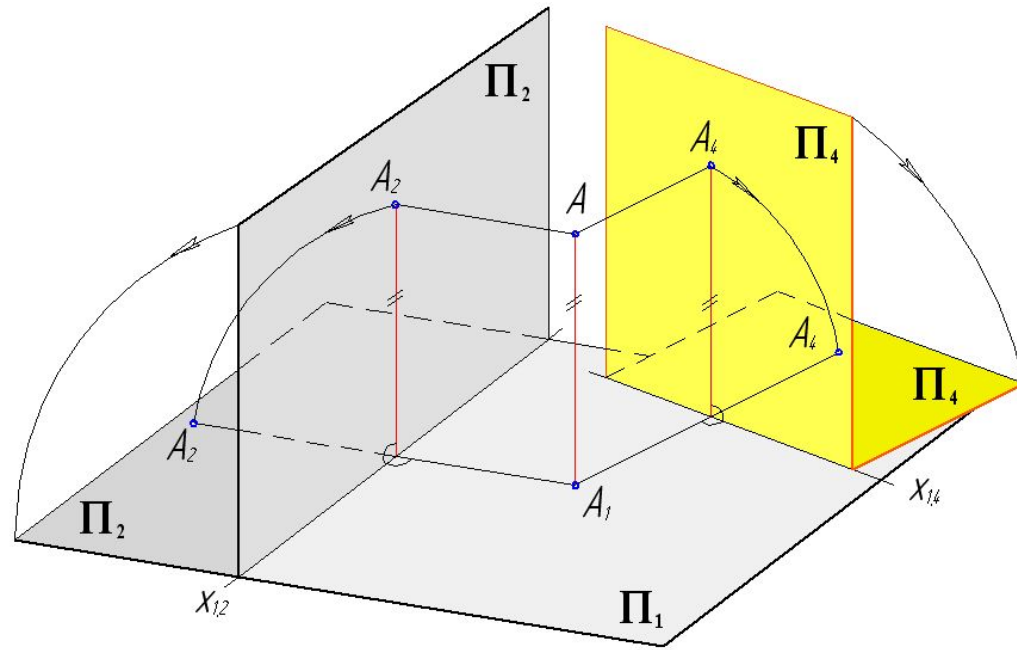
Точка  $A$  ортогонально проецируется на плоскость  $\Pi_4$



Так как точка  $A$  не изменяет своего положения относительно плоскостей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , то расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\Pi_1$  остается неизменным, как в системе  $\Pi_1/\Pi_2$ , так и в системе  $\Pi_1/\Pi_4$ .

$$(A, \Pi_1) = \text{const} \Rightarrow (A, A_1) = (A_2, x_{1,2}) = (A_4, x_{1,4}).$$

# Принцип построения эюра при использовании способа перемены плоскостей проекций



$$\begin{aligned} \Pi_4 &\perp \Pi_1 \\ \Pi_1 \cap \Pi_4 &= x_{1,4} \end{aligned}$$

$$x_{1,2} \Pi_1 / \Pi_2 \longrightarrow x_{1,4} \Pi_1 / \Pi_4$$

$\Pi_1$  - const

$$(A, \Pi_1) = \text{const} \Rightarrow (A, A_1) = (A_2, x_{1,2}) = (A_4, x_{1,4})$$

# Вращение

Каждая точка объекта вращается вокруг выбранной оси, перемещаясь по окружности, лежащей в плоскости перпендикулярной оси вращения.

Осью вращения может быть только прямая частного положения – прямой уровня или проецирующей прямой.

# Ось вращения – прямая уровня

Плоскость вращения точки - проецирующую плоскость.

На плоскости проекций, параллельно которой расположена ось вращения, траектория перемещения точки имеет форму прямой, а на другой – форму эллипса, что не дает возможности ее использования.

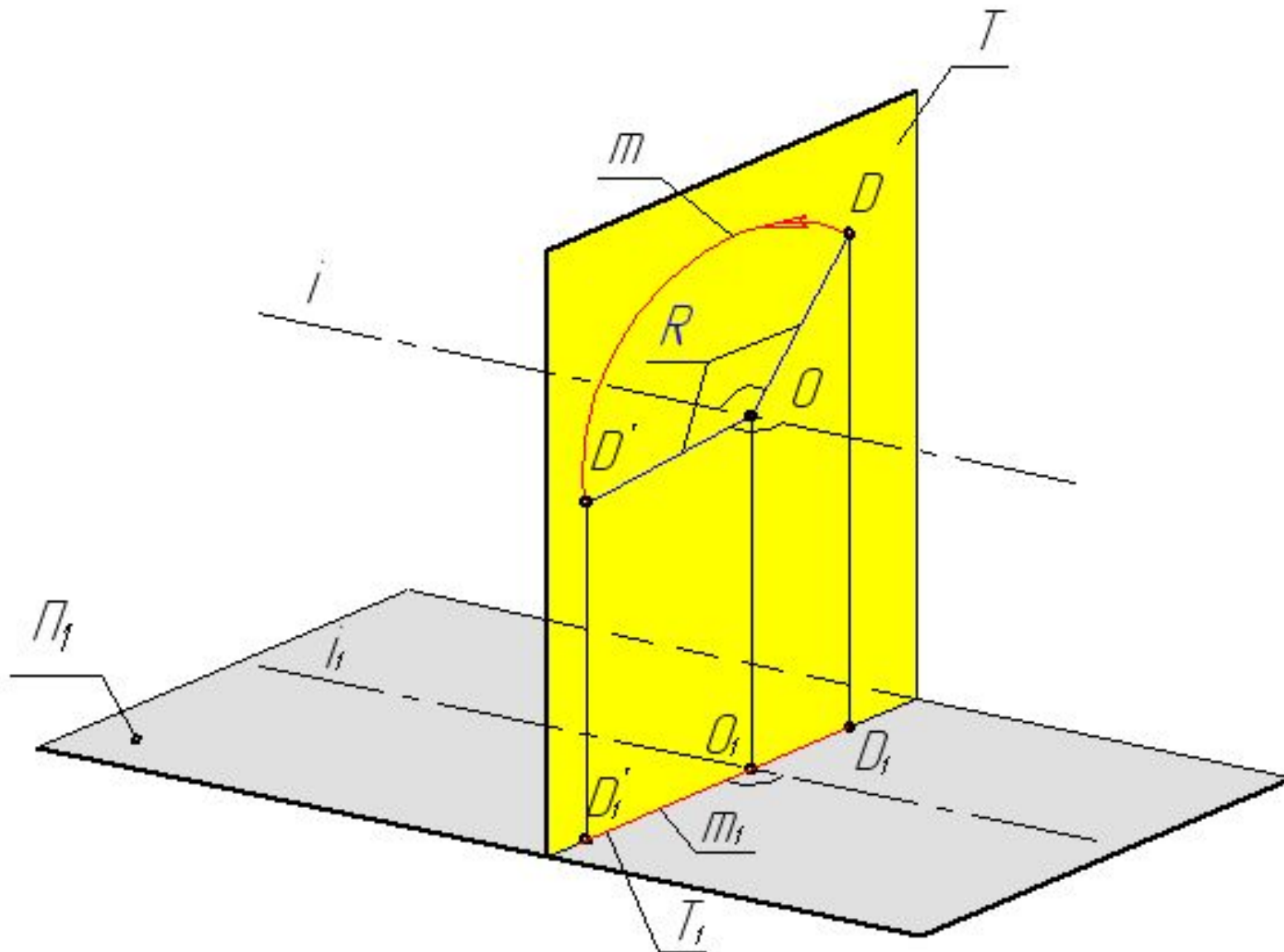
Все построения выполняются только на одной проекции.

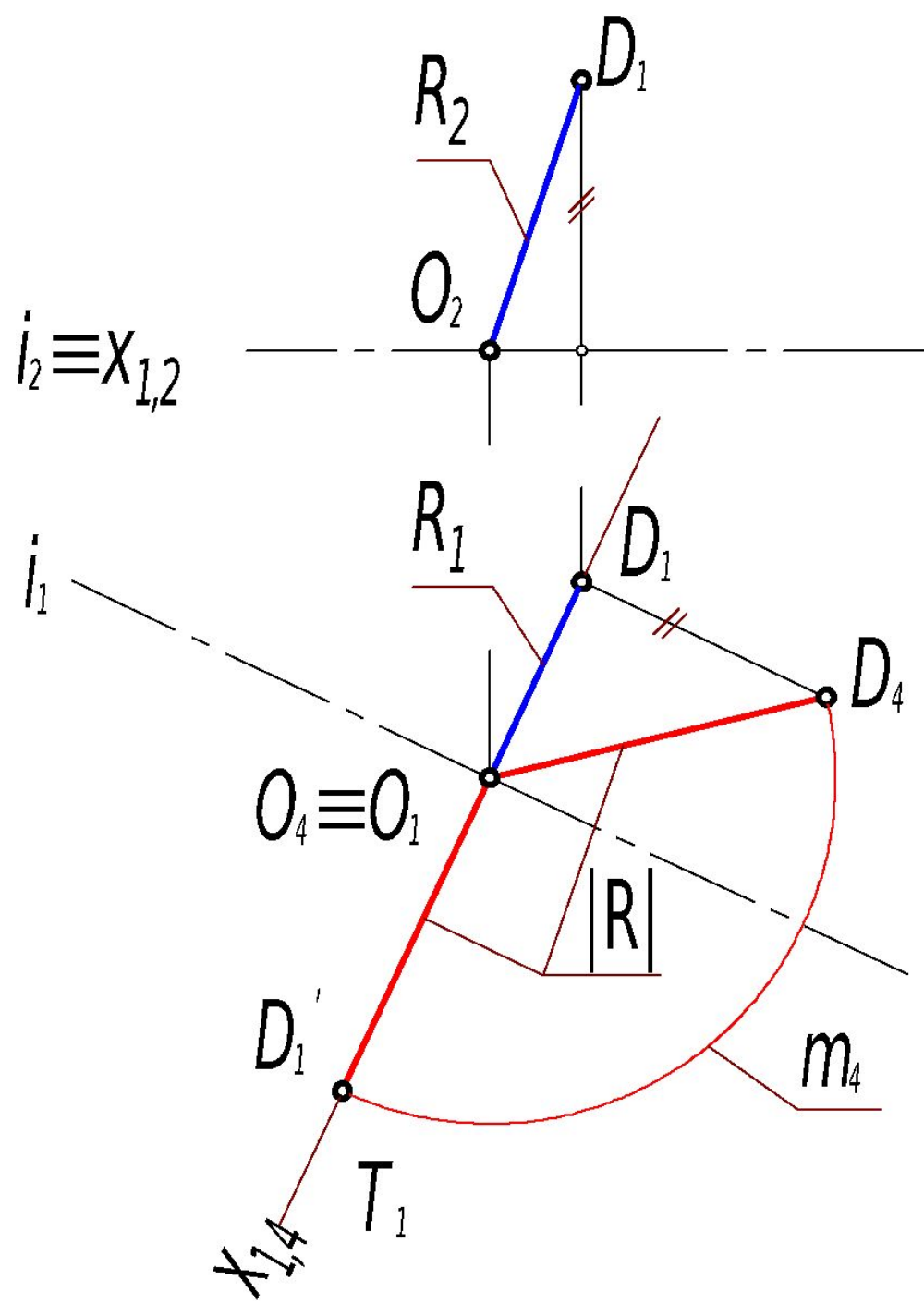
Вся задача сводится к определению истинной величины радиуса вращения точки.

Данный способ вращения имеет следующие ограничения:

- применим практически только к плоским фигурам;
- ось вращения должна лежать в плоскости поворачиваемой фигуры.

На рисунке ось вращения  $i$  является горизонталью





# **Базовые преобразования проекций**

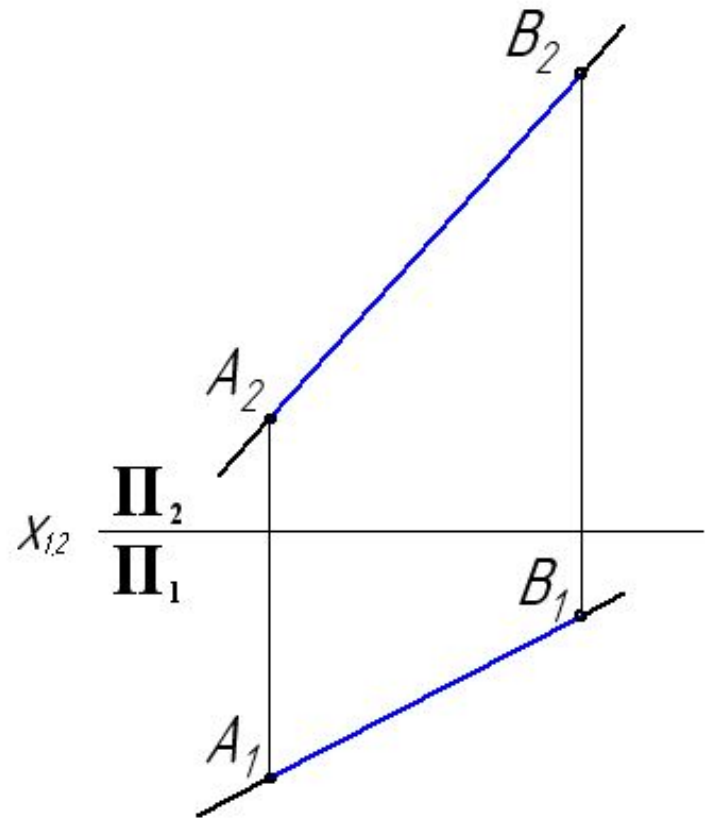
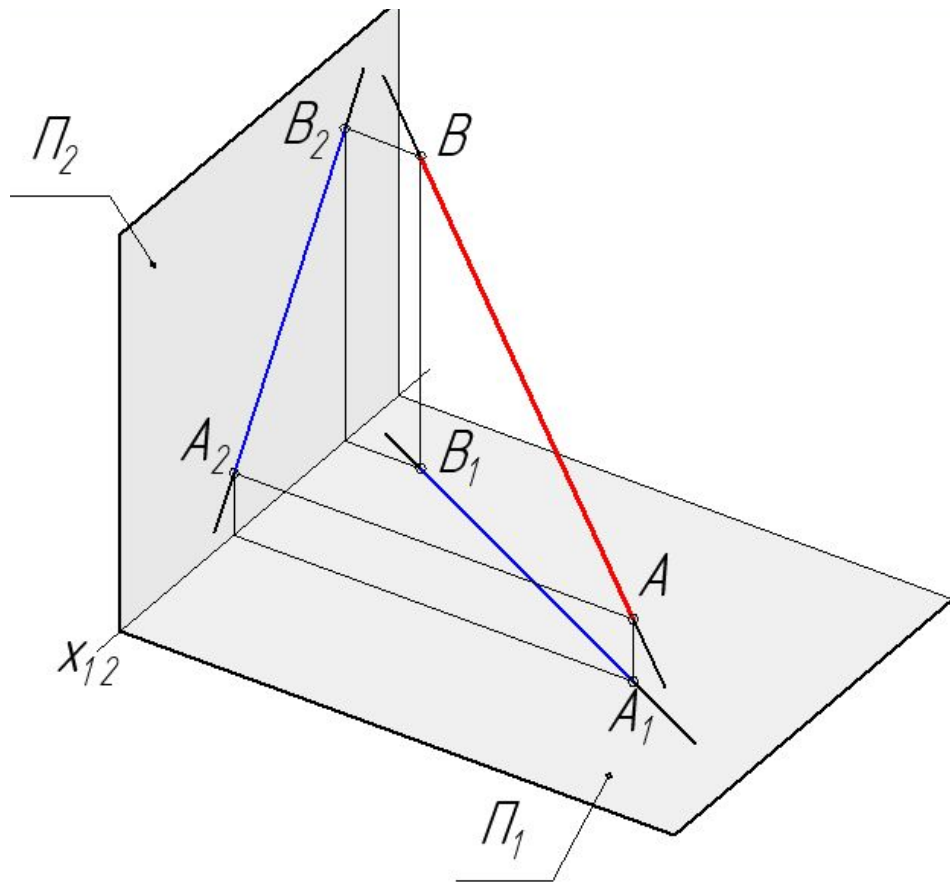


# Рассматриваются два варианта преобразования.

- **Вариант 1.** *Переход от заданного положения объекта (прямой линии или плоской фигуры) в параллельное положение по отношению к выбранной плоскости проекций.*
- **Вариант 2.** *Переход от заданного положения объекта (прямой линии или торсовой поверхности) в проецирующее положение по отношению к выбранной плоскости проекций.*

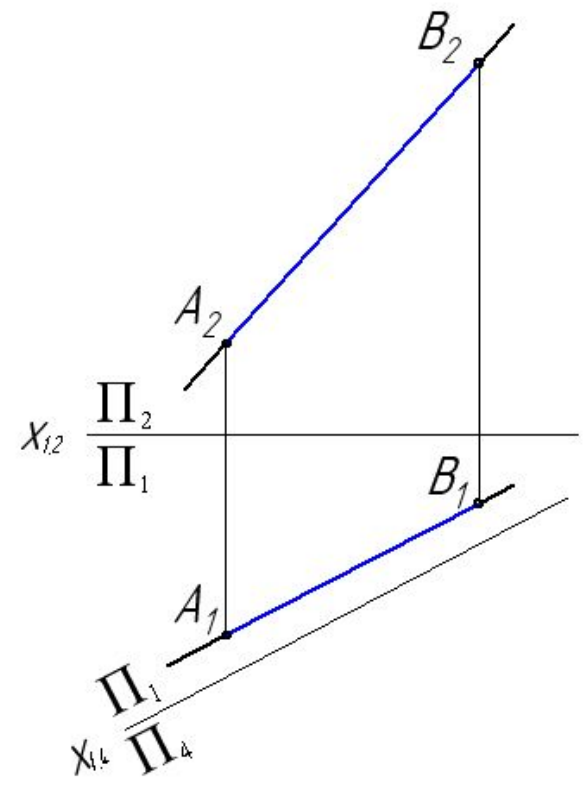
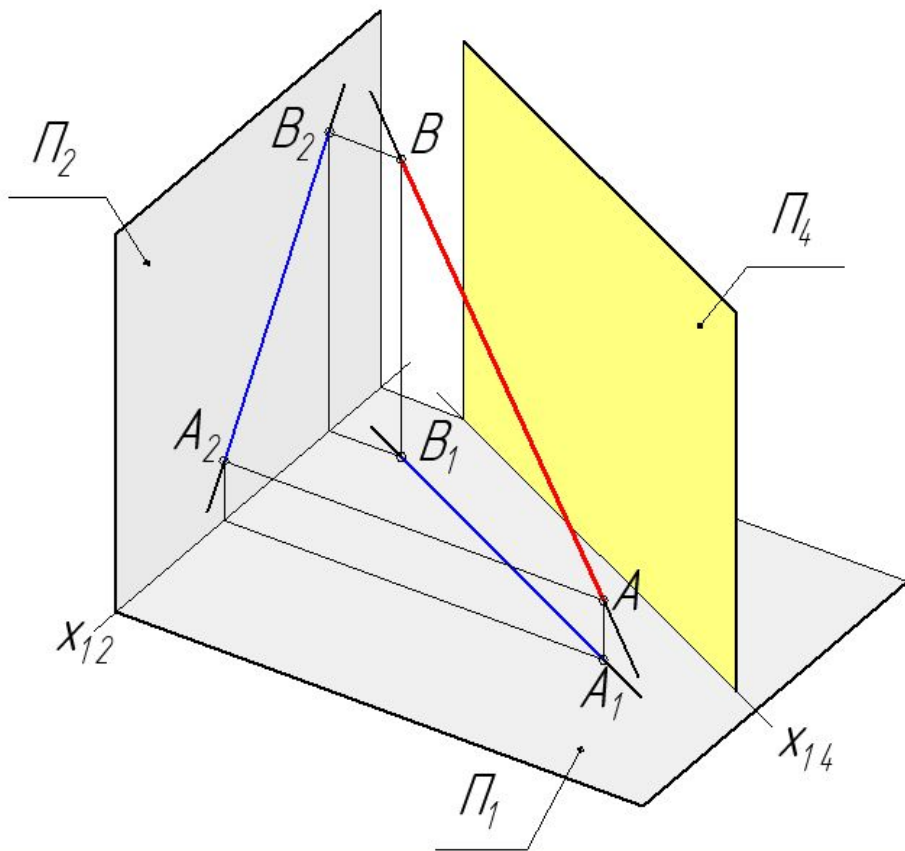
# **Базовое преобразование № 1.**

**Преобразование прямой общего положения в прямую уровня  
(построение дополнительной проекции прямой линии на параллельной ей плоскости проекций)**



$$(\Pi_2 \perp \Pi_1)$$

$l(AB)$  - прямая общего положения

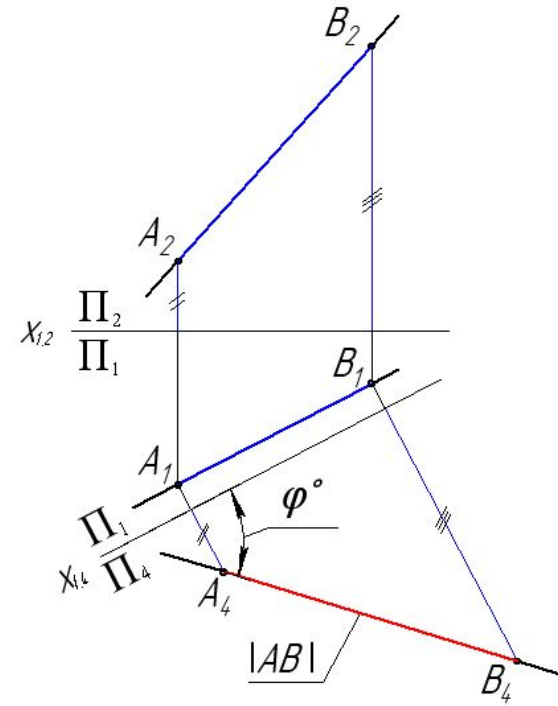
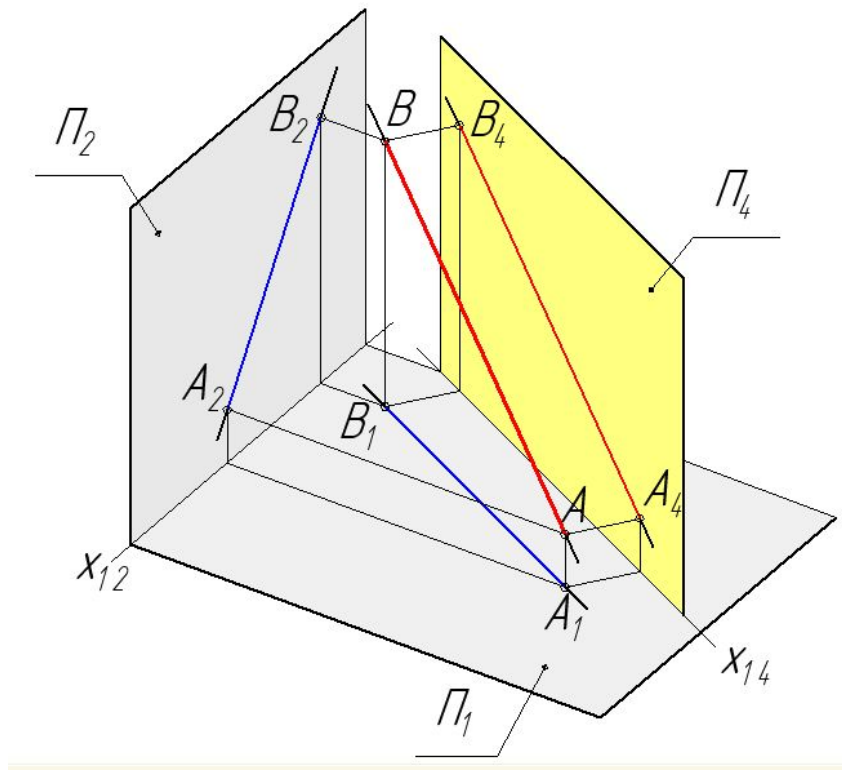


Подбирается дополнительная плоскость проекций  $\Pi_4$

$$(\Pi_4 \parallel l) \wedge ((\Pi_4 \perp \Pi_1) \vee (\Pi_4 \perp \Pi_2))$$

$$\text{На эюре } x_{14} \parallel l_1 \vee x_{24} \parallel l_2$$

В качестве примера взята  $\Pi_4 \perp \Pi_1$ , следовательно,  $x_{14} \parallel l_1$



Строится дополнительная проекция  $l(AB)$  на поле плоскости  $\Pi_4$ .

$$A_1A_4 \perp x_{1,4} \text{ и } B_1B_4 \perp x_{1,4},$$

$$(A_2x_{1,2}) = (A_4x_{1,4}) \text{ и } (B_2x_{1,2}) = (B_4x_{1,4})$$

# Базовое преобразование №2.

**Преобразование прямой общего положения в проецирующую прямую (построение дополнительной проекции прямой линии в виде точки)**

При прямоугольном проецировании прямая является проецирующей, если она перпендикулярна плоскости проекций. Следовательно, дополнительная плоскость проекций должна быть перпендикулярна заданной прямой

$$\Pi' \perp l,$$

Но, так как  $l$  – прямая общего положения, то  $\Pi'$  – также является плоскостью общего положения

$$\text{и } \Pi' \not\perp \Pi_1 \text{ и } \Pi' \not\perp \Pi_2,$$

Следовательно, чтобы получить проекцию прямой линии общего положения в виде точки способом перемены плоскостей проекций, нельзя сразу подобрать необходимую плоскость проекций.

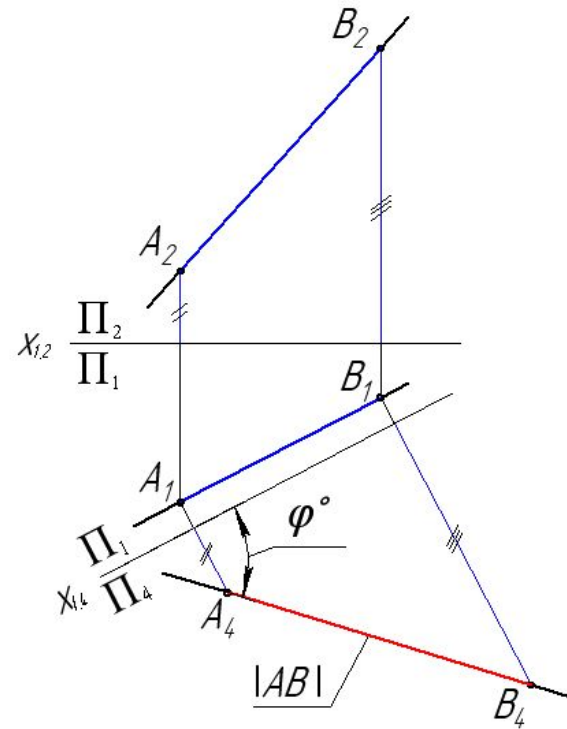
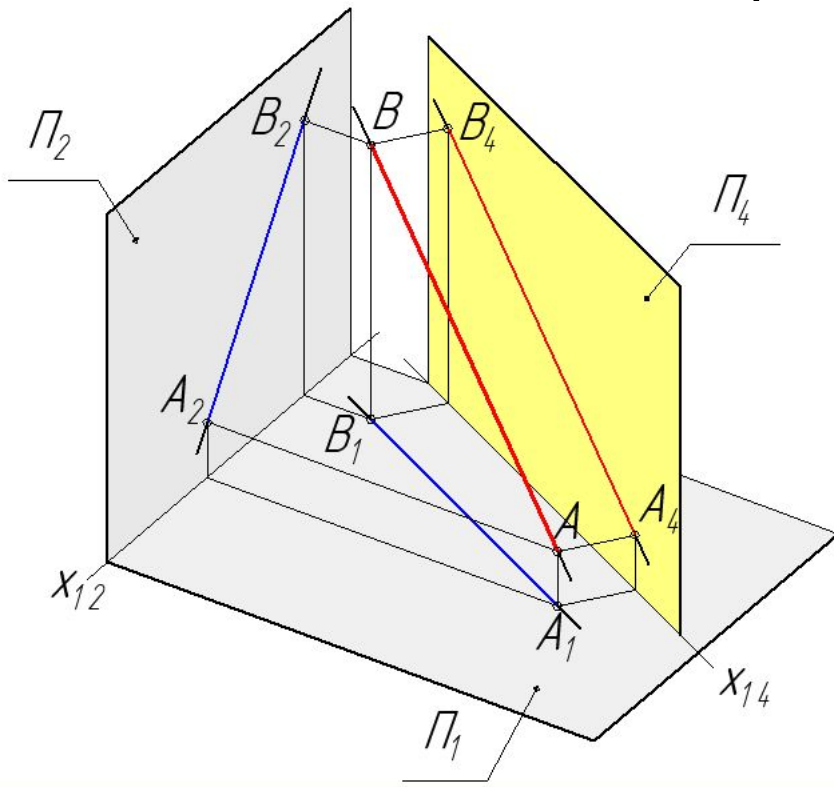
Данное преобразование выполняется в два этапа.

# 1-й этап

Прямая преобразуется в прямую уровня

$$(\Pi_4 \parallel l) \wedge (\Pi_4 \perp \Pi_1 \vee \Pi_4 \perp \Pi_2)$$

Это рассмотренная ранее базовая задача №1 на построение проекции прямой общего положения на плоскости проекций ей параллельной.

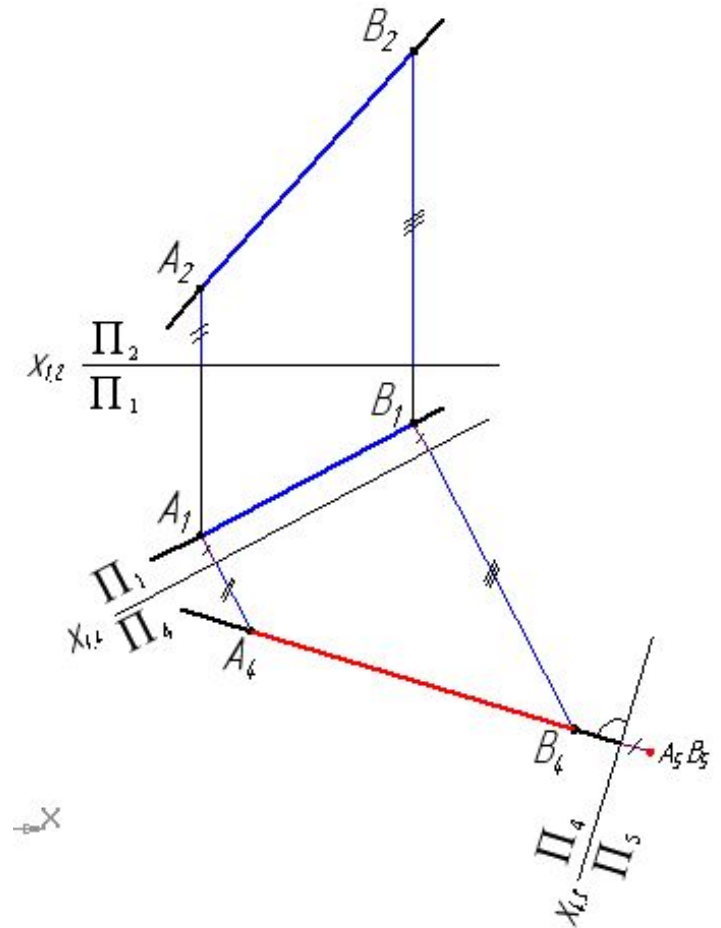
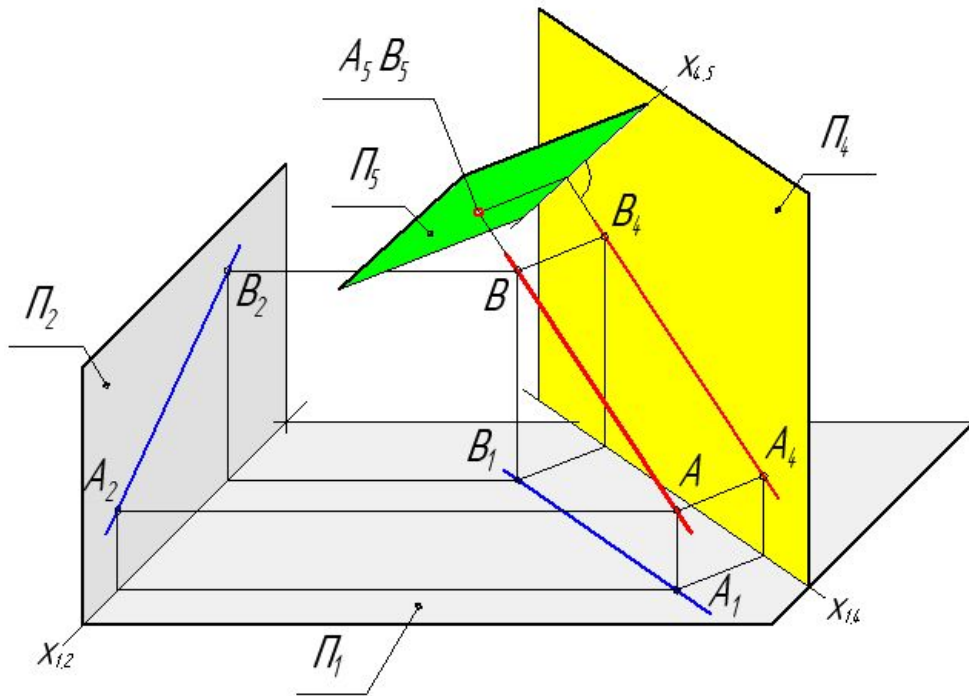




# 2-й этап

Из прямой уровня прямая преобразуется в проецирующую прямую

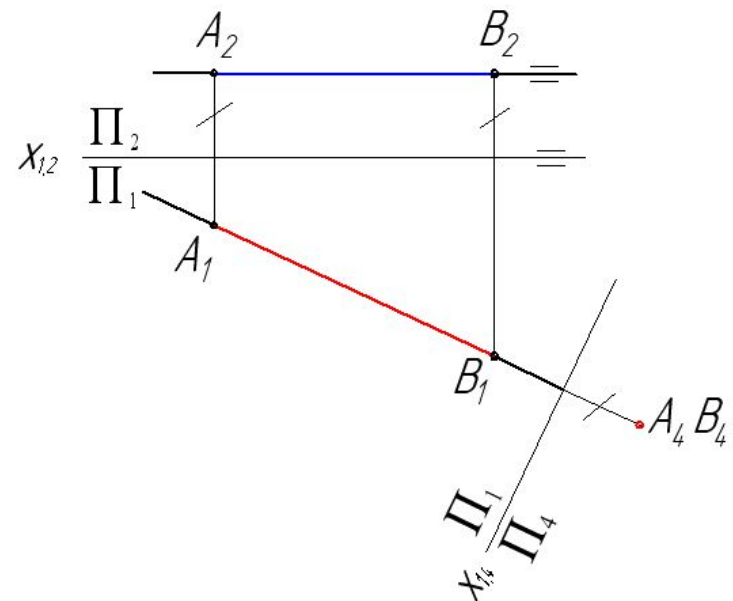
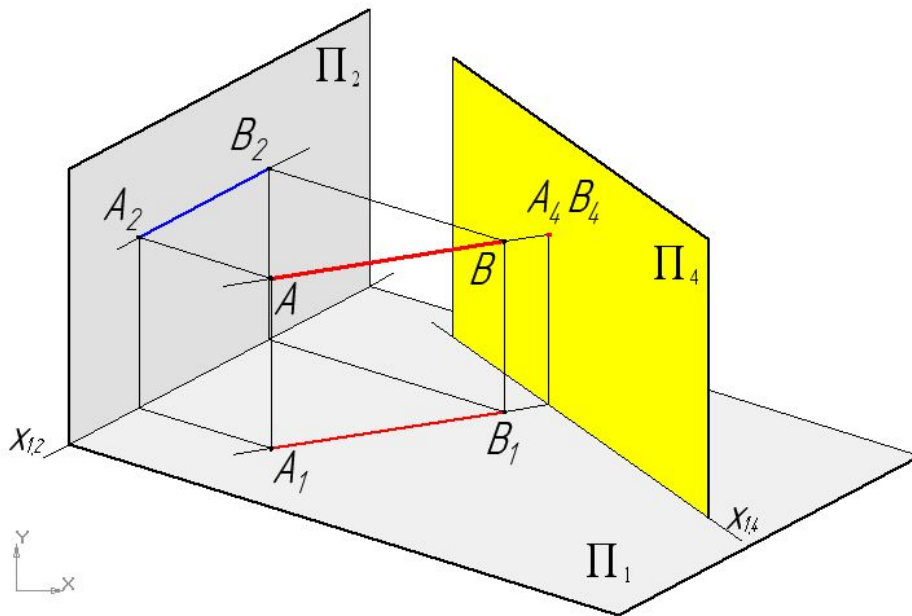
$$(\Pi_5 \perp l) \wedge (\Pi_5 \perp \Pi_4)$$



$$\begin{aligned} & \mathbf{x}_{4,5} \perp \mathbf{AB} \\ (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1, \mathbf{x}_{1,4}) &= (\mathbf{A}_5 \mathbf{B}_5, \mathbf{x}_{4,5}) \end{aligned}$$

# Для прямой уровня данное преобразование выполняется за один этап

Прямая уровня ( $h$  или  $f$ ) параллельна плоскости проекций. Следовательно, если  $\Pi' \perp (h \text{ или } f)$ , то  $\Pi' \perp (\Pi_1 \text{ или } \Pi_2)$ , что удовлетворяет требованиям способа перемены плоскостей проекций.



# Базовое преобразование № 3.

**Преобразование плоскости  
(торсовой поверхности) общего  
положения в проецирующую  
поверхность**

**(построение проекции плоскости  
в виде прямой линии)**

- Плоскость является проецирующей, если она перпендикулярна плоскости проекций.
- Следовательно, подбираемая новая плоскость проекций  $\Pi_4$  должна быть перпендикулярна заданной плоскости, например  $T$ .

$$(\Pi_4 \perp T)$$

- Если плоскости взаимно перпендикулярны, то каждая из них должна содержать хотя бы одну прямую, перпендикулярную другой плоскости.

$$(\Pi_4 \perp T) \Rightarrow (\Pi_4 \perp l \wedge l \subset T)$$

$$(\Pi_4 \perp \Pi_1) \vee (\Pi_4 \perp \Pi_2)$$

Если  $(l \perp \Pi_4)$  и  $(\Pi_4 \perp \Pi_1 \vee \Pi_4 \perp \Pi_2)$

то  $(l \parallel \Pi_1 \vee l \parallel \Pi_2)$

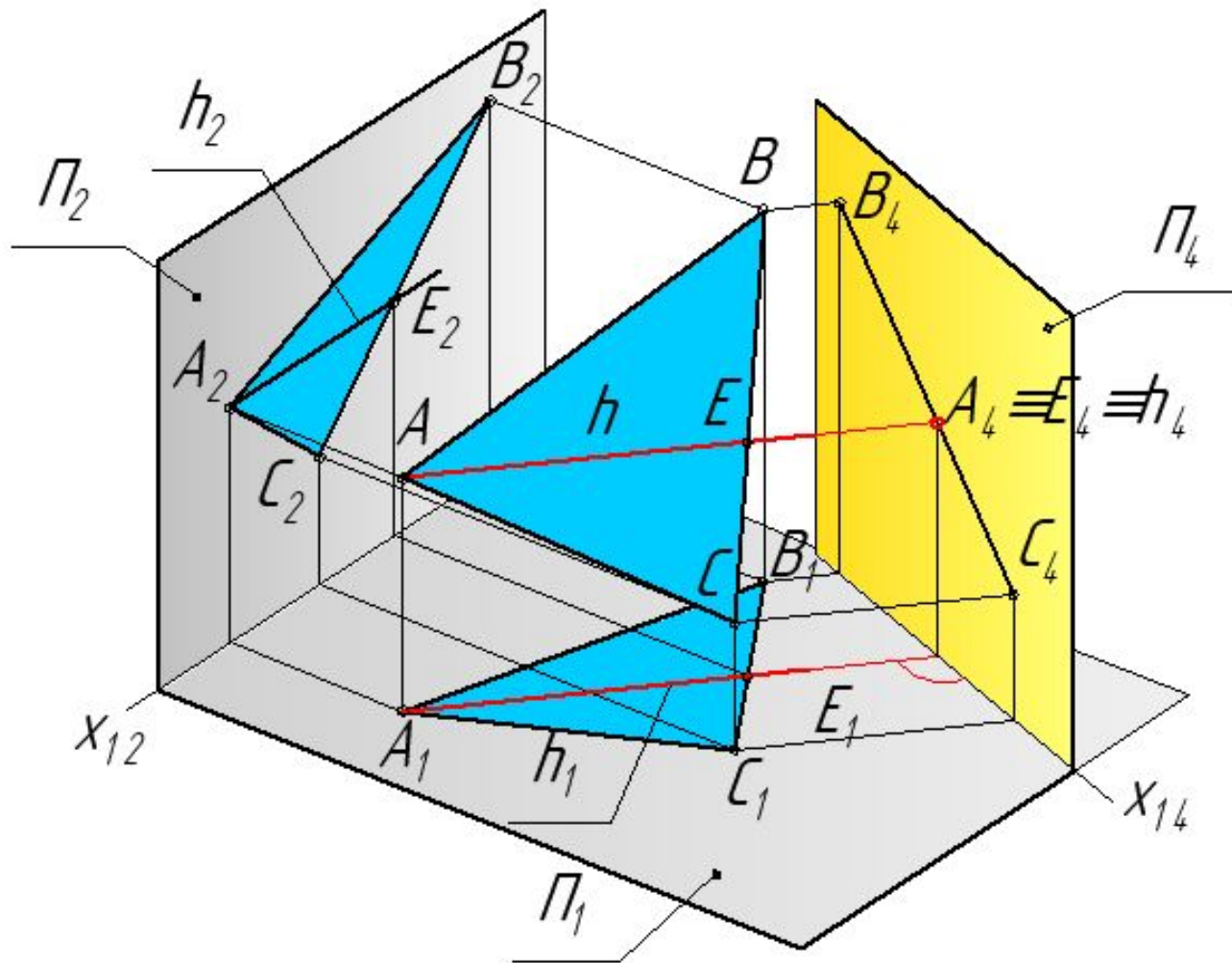
$$\Rightarrow (l \equiv h) \vee (l \equiv f)$$

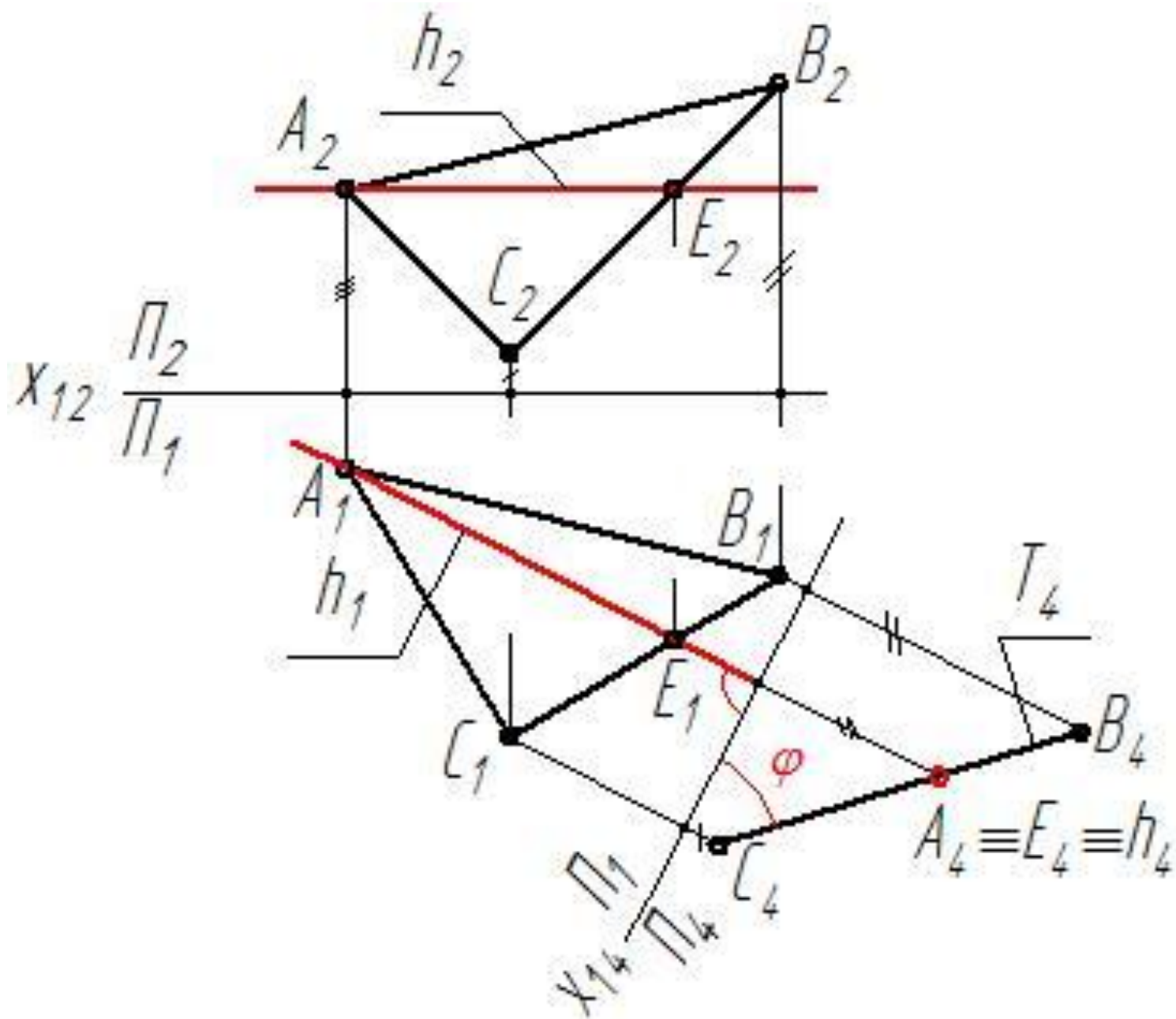
*Следовательно,*

*если  $(\Pi_4 \perp \Pi_1)$ , то  $(\Pi_4 \perp h, h \subset T)$  и  $(x_{1,4} \perp h_1)$*

*если  $(\Pi_4 \perp \Pi_2)$ , то  $(\Pi_4 \perp f, f \subset T)$  и  $(x_{2,4} \perp f_2)$*

В качестве примера  $\Pi_4 \perp \Pi_1$





# Базовое преобразование № 4.

**Построение проекции плоской  
фигуры на параллельной ей  
плоскости проекций**



**Решение задачи способом**  
**замены плоскостей**  
**проекций**

## П' || Т

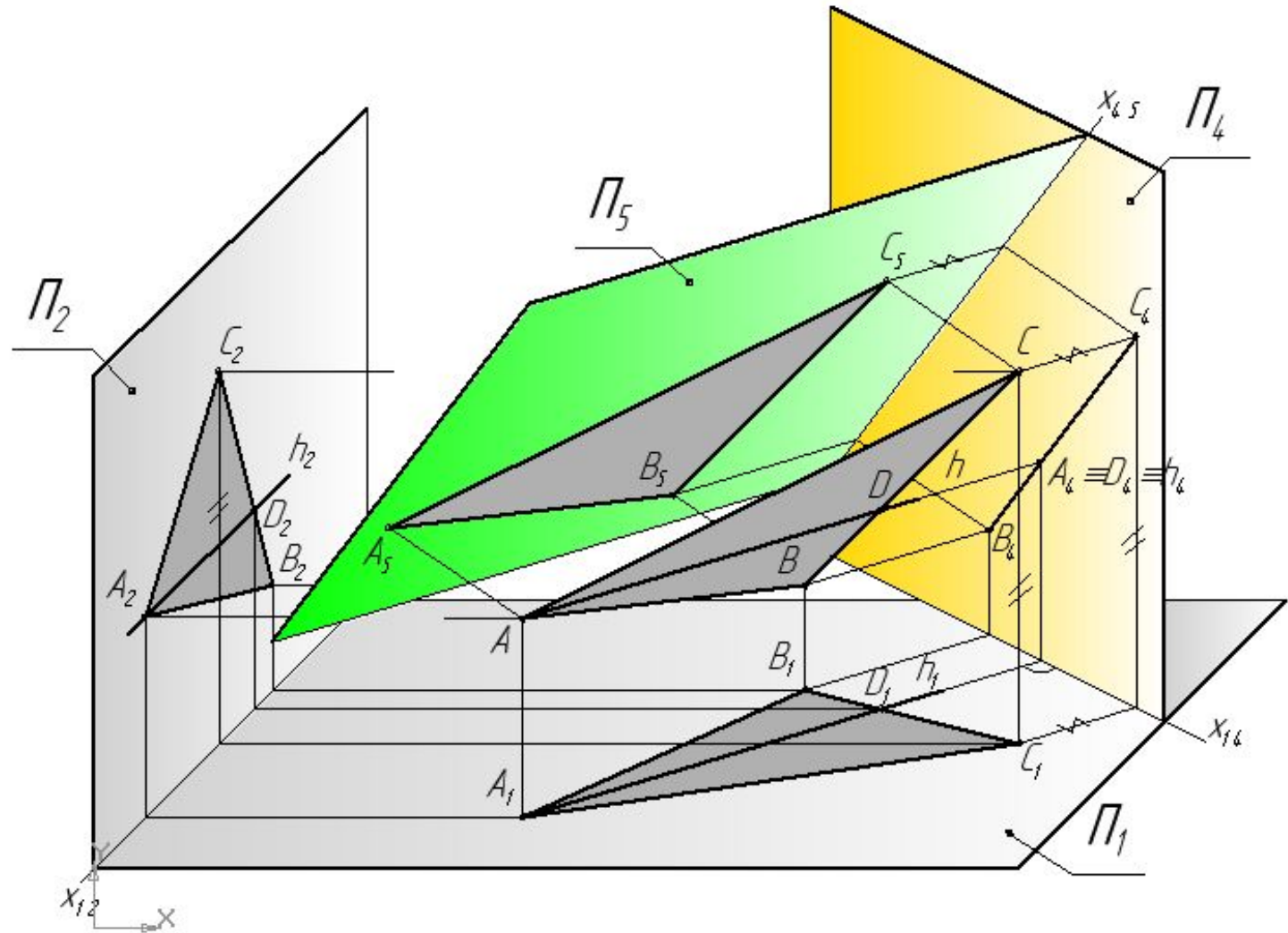
Так как плоскость Т – плоскость общего положения, то и любая плоскость ей параллельная, в том числе и проекций П', также будет плоскостью общего положения, т.е.  $\Pi' \perp \Pi_1$  и  $\Pi' \perp \Pi_2$ , что противоречит способу замены плоскостей проекций. Следовательно, **задача должна решаться в два этапа.**

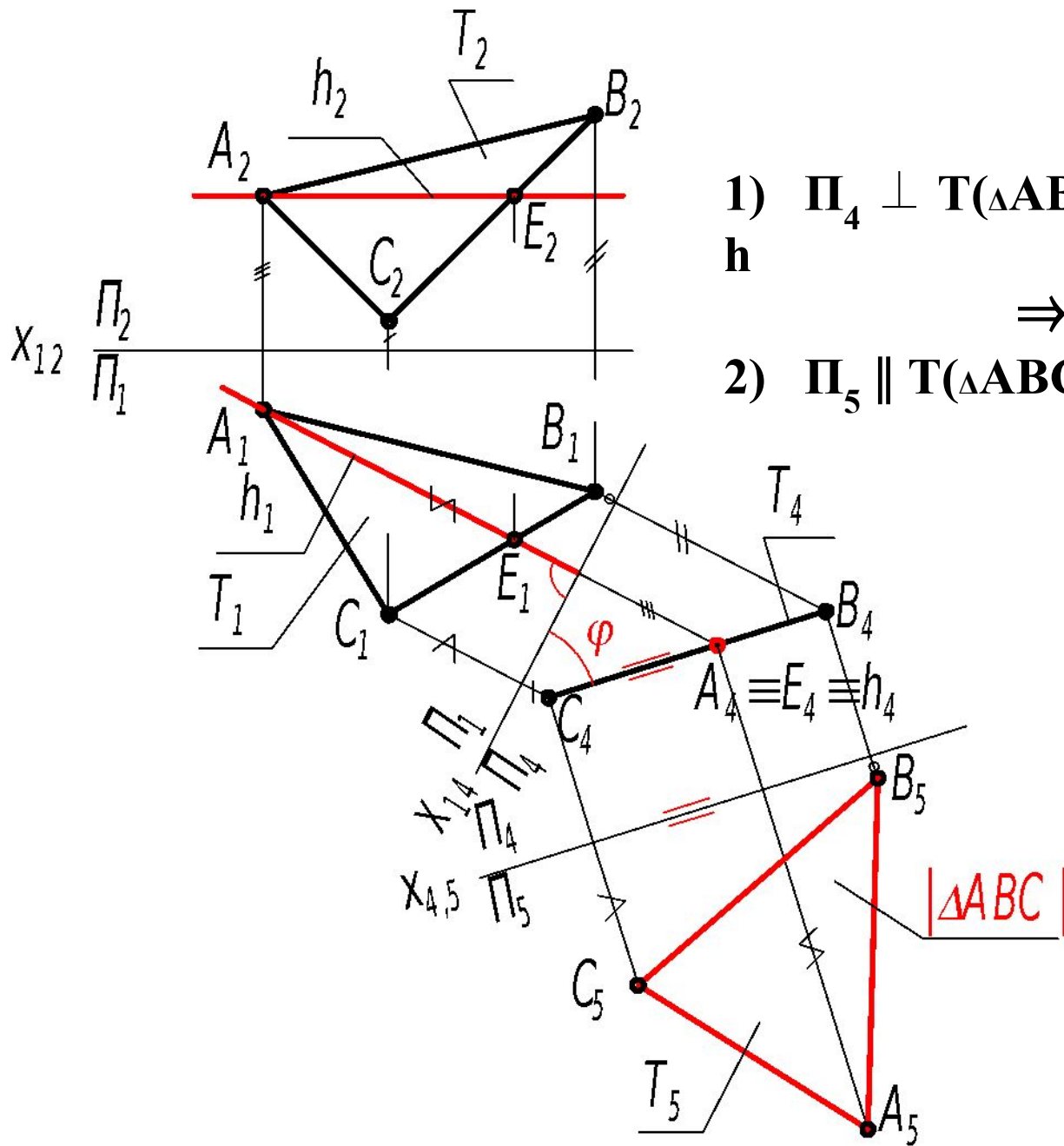
**1-й этап.**  $\Pi_4 \perp Т$  (базовая задача №3).

**2-й этап.**  $\Pi_5 || Т$ .

1).  $\Pi_4 \perp T(\triangle ABC), \Pi_4 \perp \Pi_1 \Rightarrow \Pi_4 \perp h$

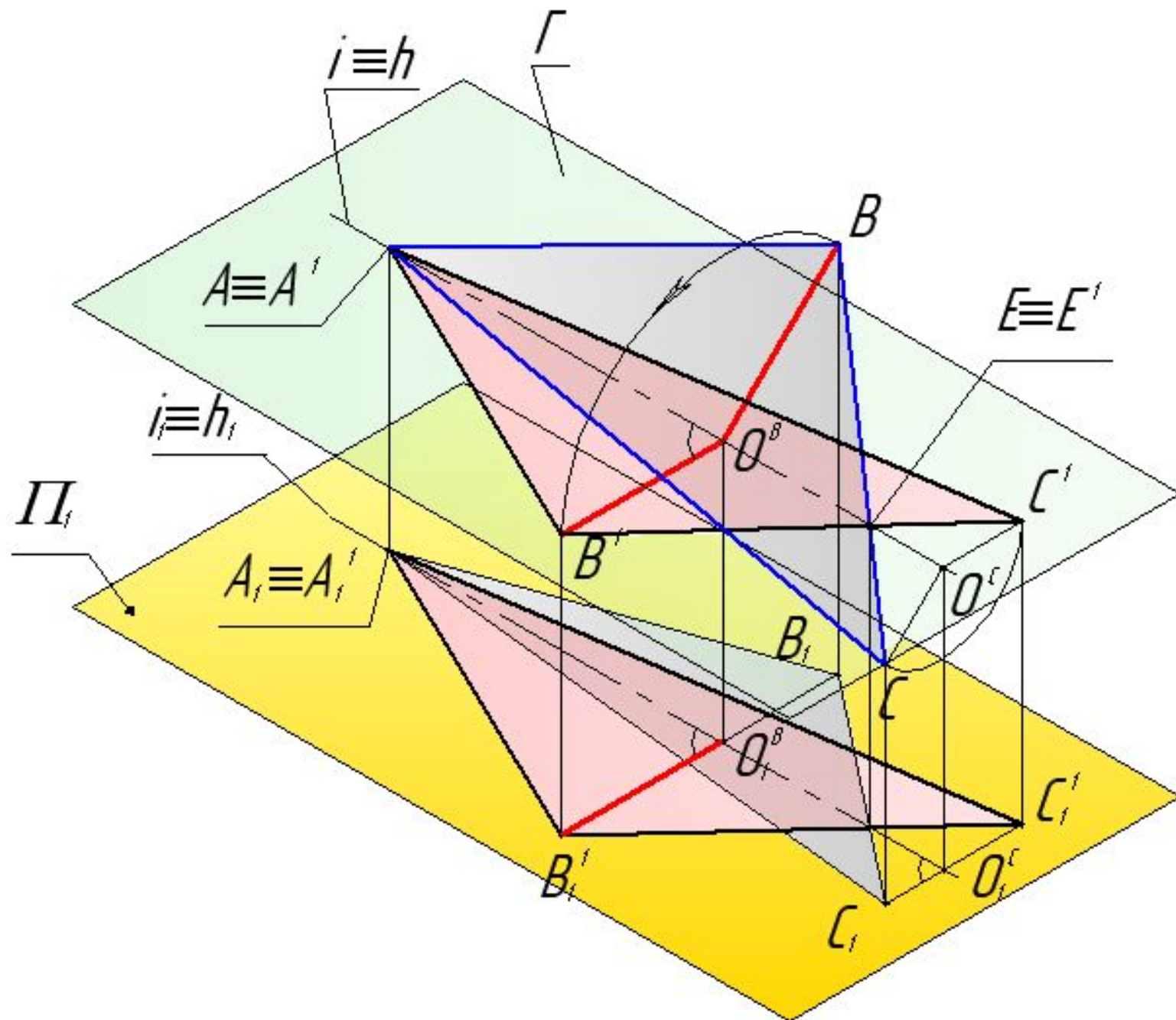
2).  $\Pi_5 \parallel T(\triangle ABC), \Pi_5 \perp \Pi_4$

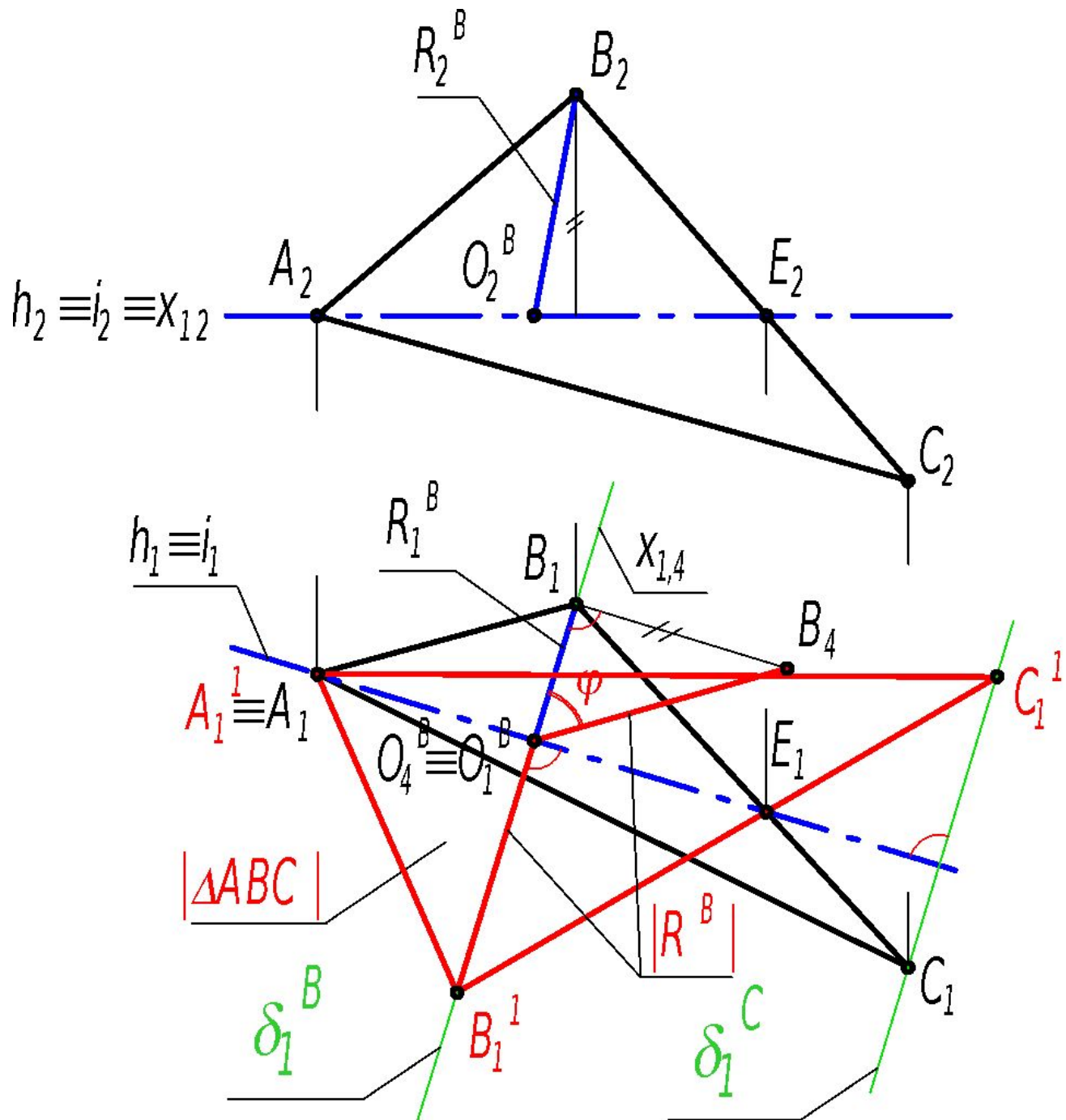


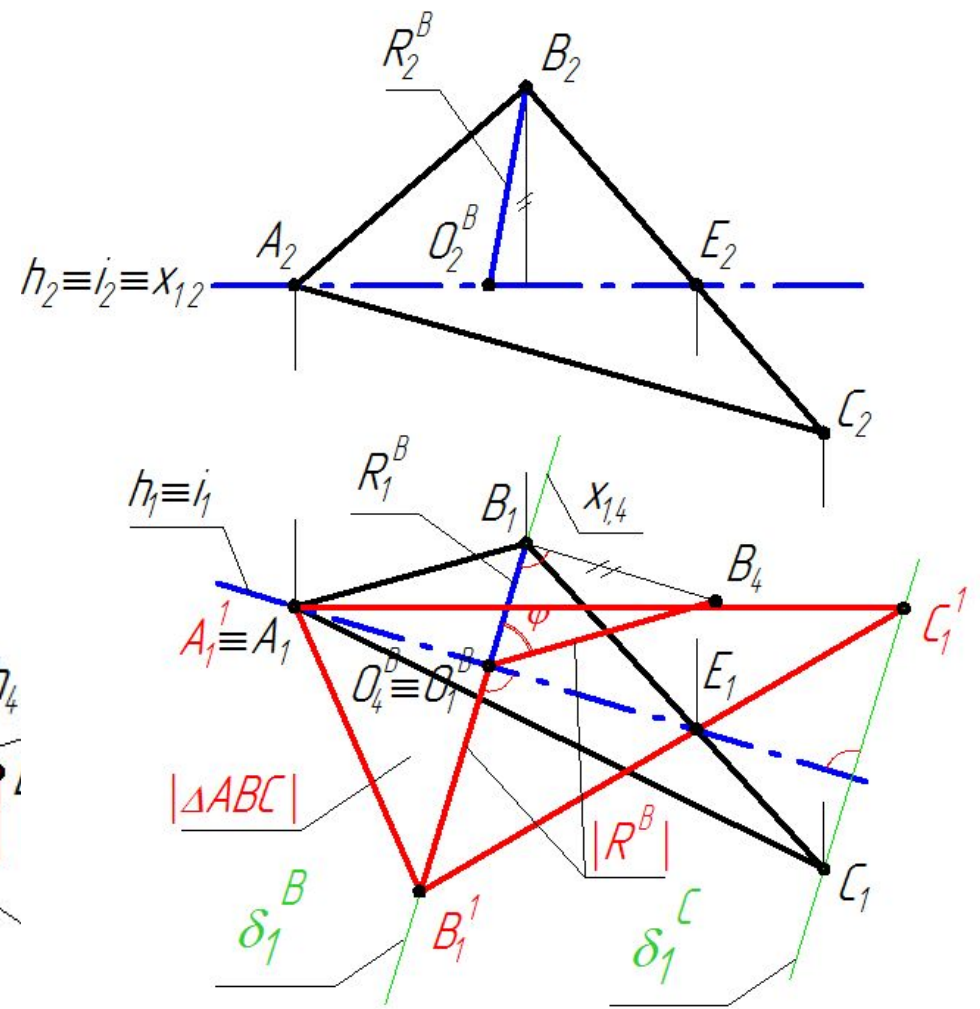
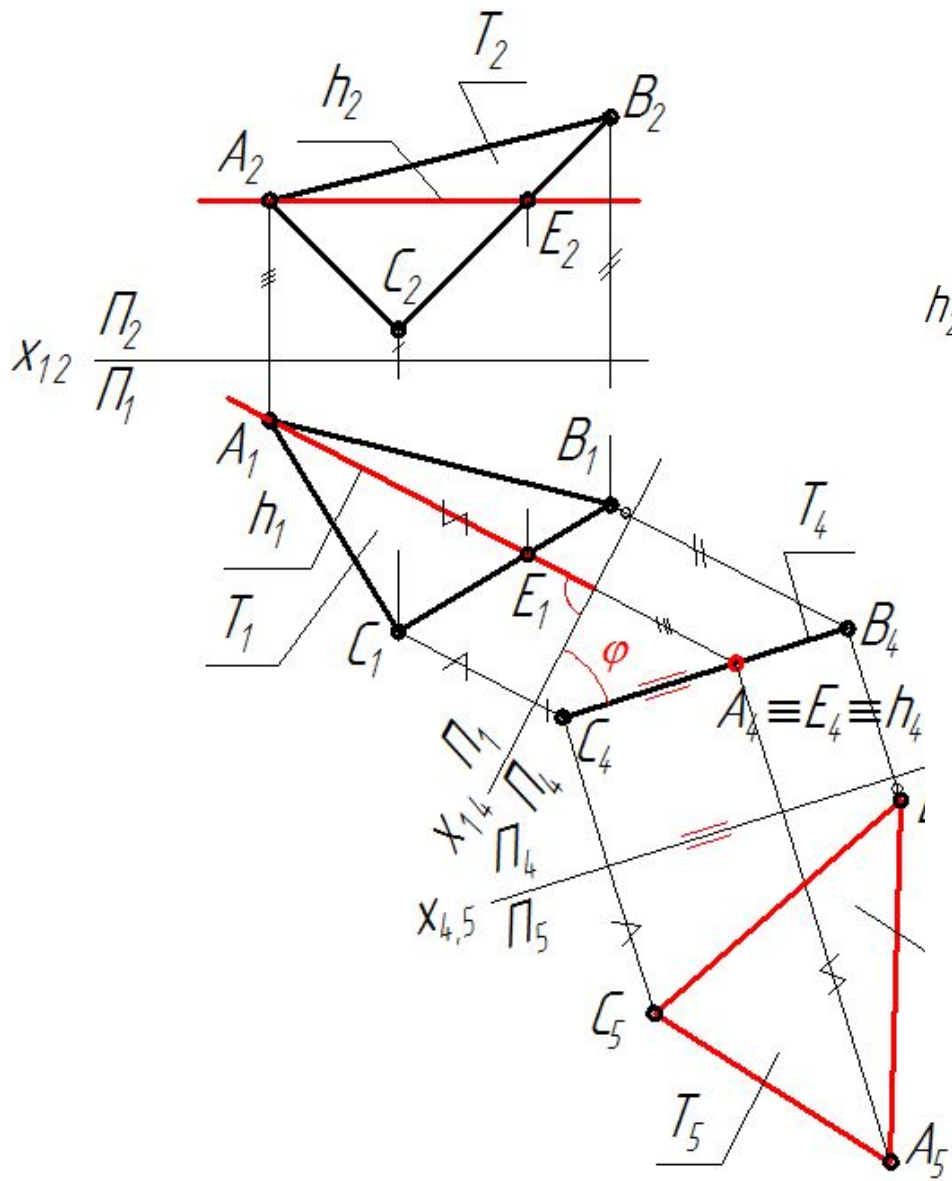


- 1)  $\Pi_4 \perp T(\Delta ABC), \Pi_4 \perp \Pi_1 \Rightarrow \Pi_4 \perp h$   
 $\Rightarrow x_{1,4} \perp h_1$
- 2)  $\Pi_5 \parallel T(\Delta ABC), \Pi_5 \perp \Pi_4 \Rightarrow x_{4,5} \parallel T_4$

**Решение задачи способом**  
**вращения вокруг прямой**  
**уровня**







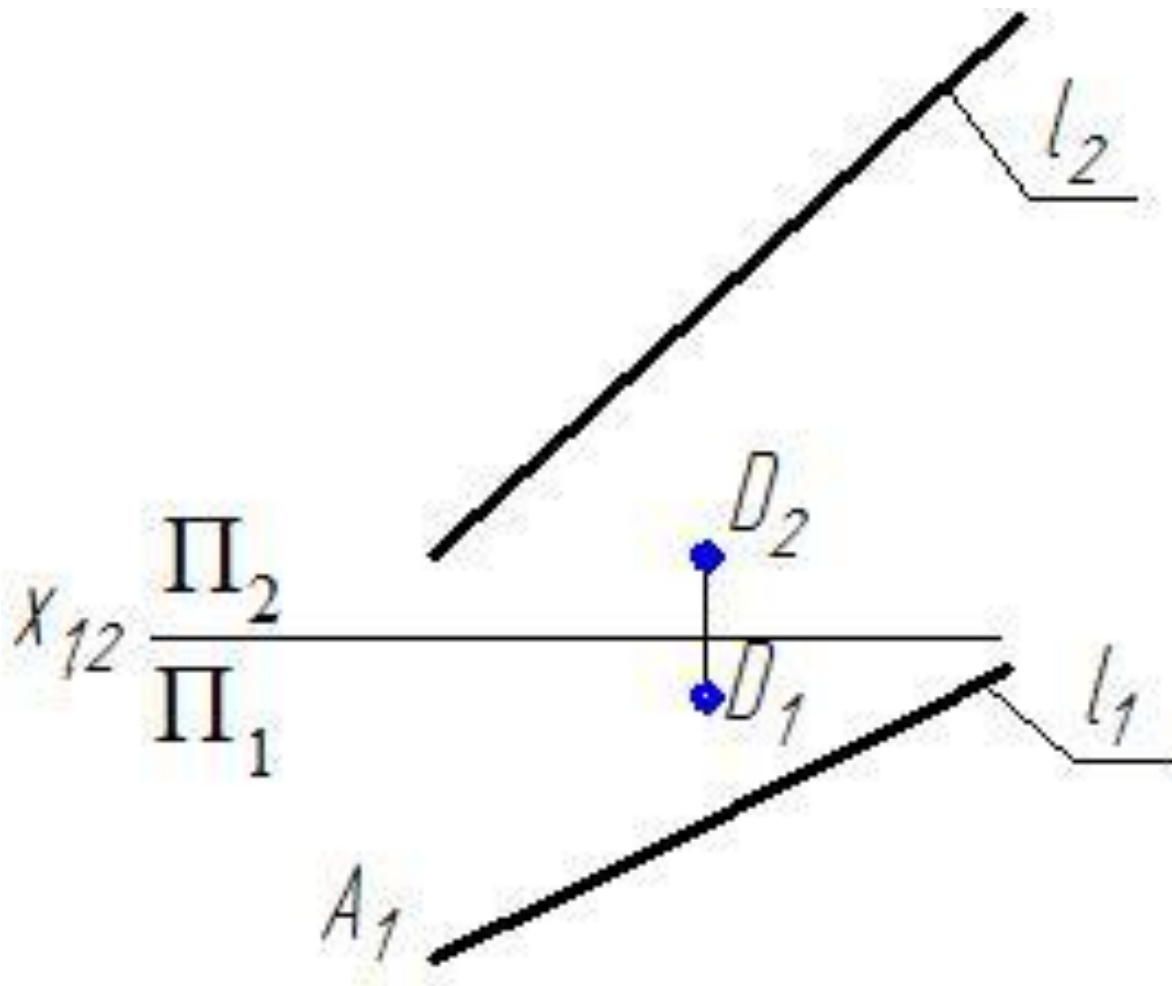


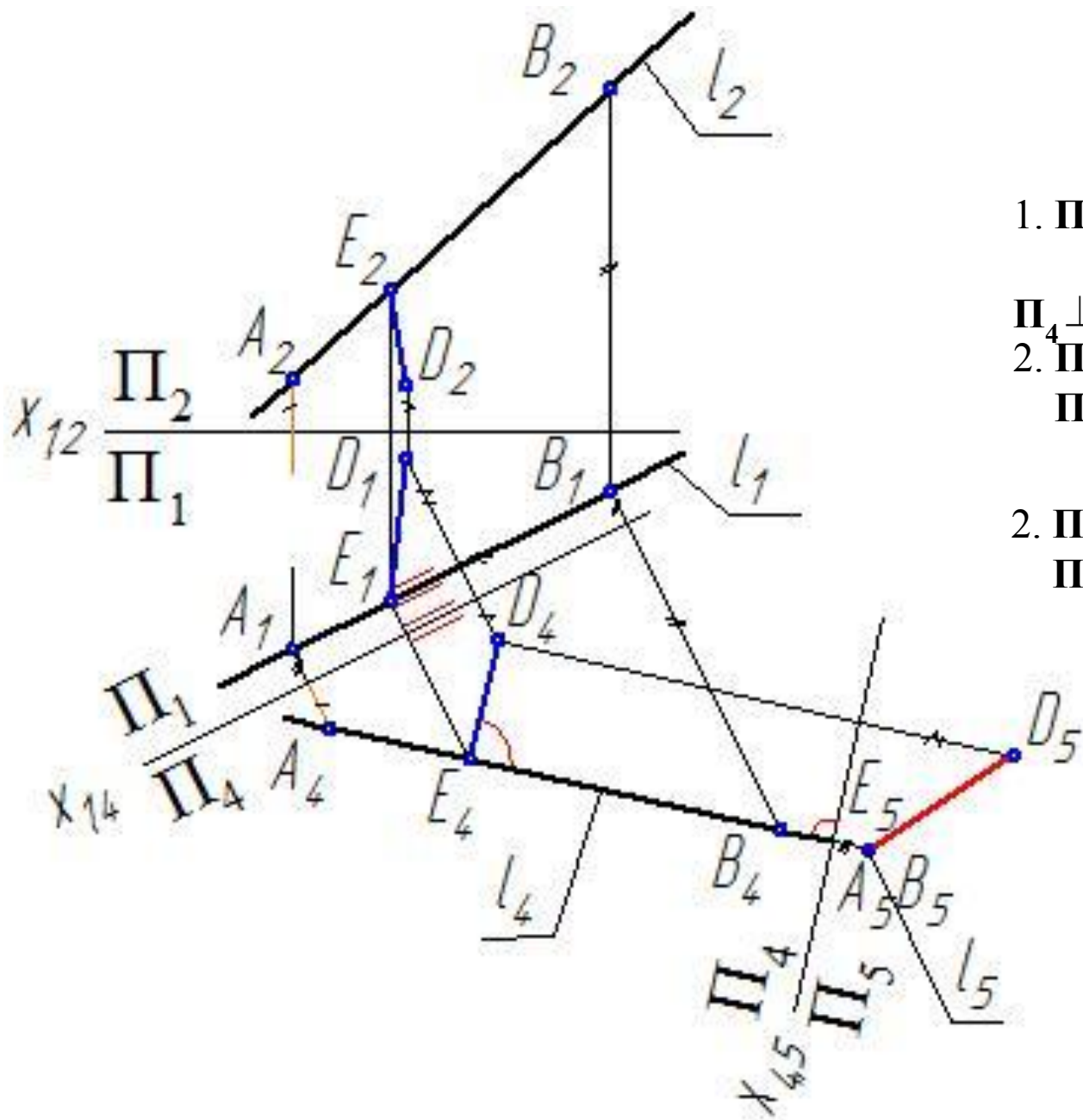
# **МЕТРИЧЕСКИЕ И КОНСТРУКТИВНЫЕ ЗАДАЧИ**

- Метрическими называются задачи, в ходе решения которых определяется значение измеряемой величины – расстояния между двумя точками (длина отрезка), величины линейного угла или истинной формы и размеров плоской фигуры.
- Конструктивными называются задачи, в ходе решения которых создается геометрический объект по наперед заданным параметрам. В определенном смысле конструктивную задачу можно рассматривать как обратную метрической задаче.

Базовая задача	Метрическая задача
№1	<p>Определение истинной величины расстояния между двумя точками (длины отрезка прямой).</p> <p>Определение истинной величины угла наклона прямой к плоскости проекций.</p> <p>Определение истинной величины расстояния между параллельными прямыми.</p>
№2	<p>Определение истинной величины расстояния от точки до прямой.</p> <p>Определение истинной величины расстояния между скрещивающимися прямыми.</p> <p>Определение истинной величины двугранного угла, если задана линия пересечения плоскостей.</p>
№3	<p>Определение истинной величины расстояния от точки до плоскости.</p> <p>Определение истинной величины расстояния между параллельными плоскостями.</p> <p>Определение истинной величины угла наклона плоскости к плоскости проекций.</p>
№4	<p>Определение истинной величины угла между пересекающимися прямыми или истинной величины плоской фигуры.</p> <p>Определение истинной величины угла между скрещивающимися прямыми.</p> <p>Определение истинной величины угла между прямой и плоскостью.</p> <p>Определение истинной величины угла между двумя плоскостями, если линия пересечения плоскостей не задана.</p>

# Расстояние от точки до прямой





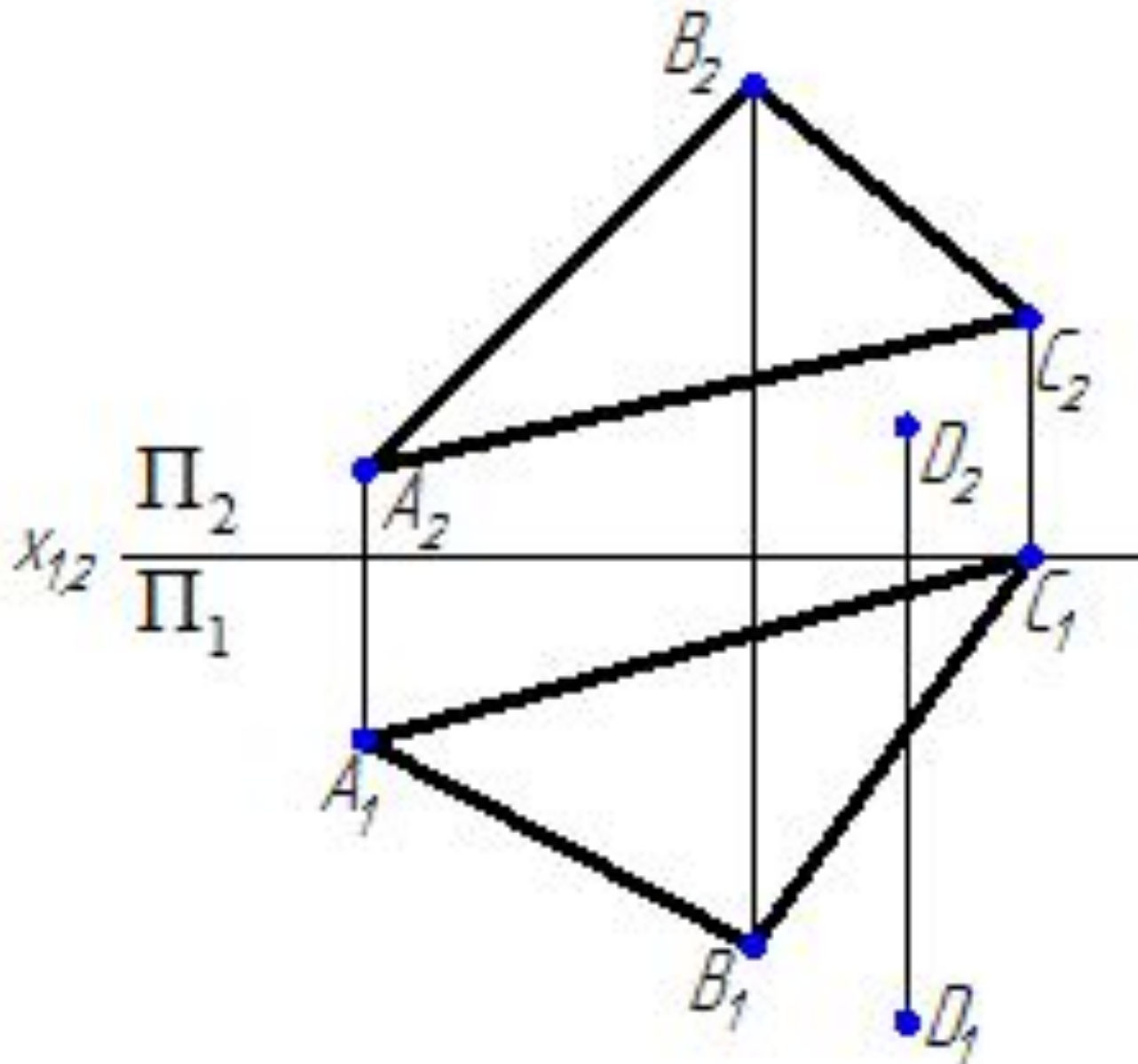
$$1. \Pi_4 \parallel l \Rightarrow x_{14} \parallel l_1$$

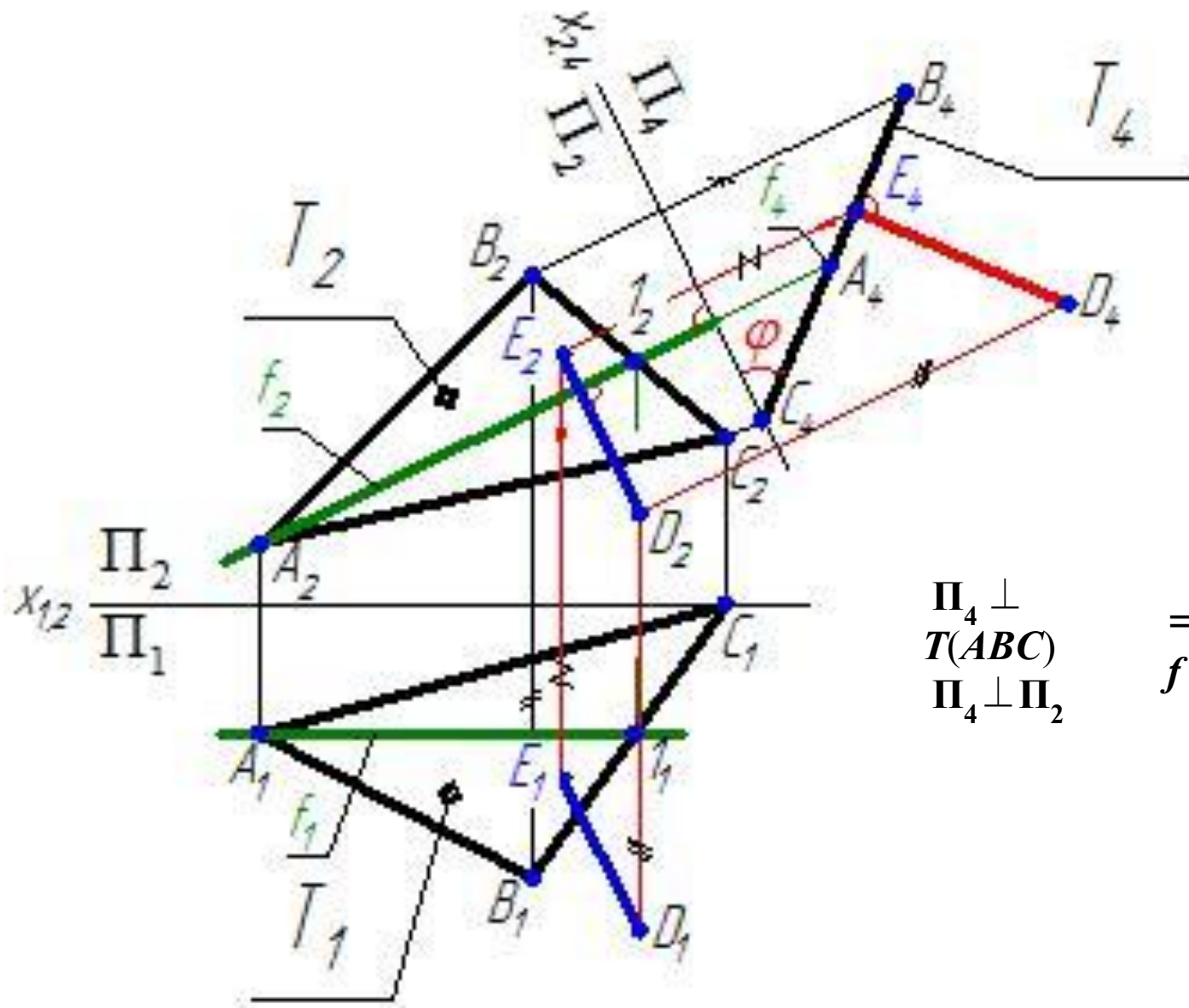
$$\begin{aligned} & \Pi_4 \perp \Pi_1 \\ 2. \Pi_5 \parallel DE & \Rightarrow x_{45} \parallel D_4E_4 \\ & \Pi_5 \perp \Pi_4 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$2. \Pi_5 \perp l \Rightarrow x_{45} \perp l_4$$

# Расстояние от точки до плоскости





$$\begin{aligned}
 & \Pi_4 \perp T(ABC) \\
 & \Pi_4 \perp \Pi_2 \\
 & \Rightarrow \Pi_4 \perp f \\
 & \Rightarrow x_{24} \perp f_2
 \end{aligned}$$

# Угол между прямой и плоскостью

$$\angle \varphi = l^{\wedge} \alpha$$

$D$  – произвольная точка

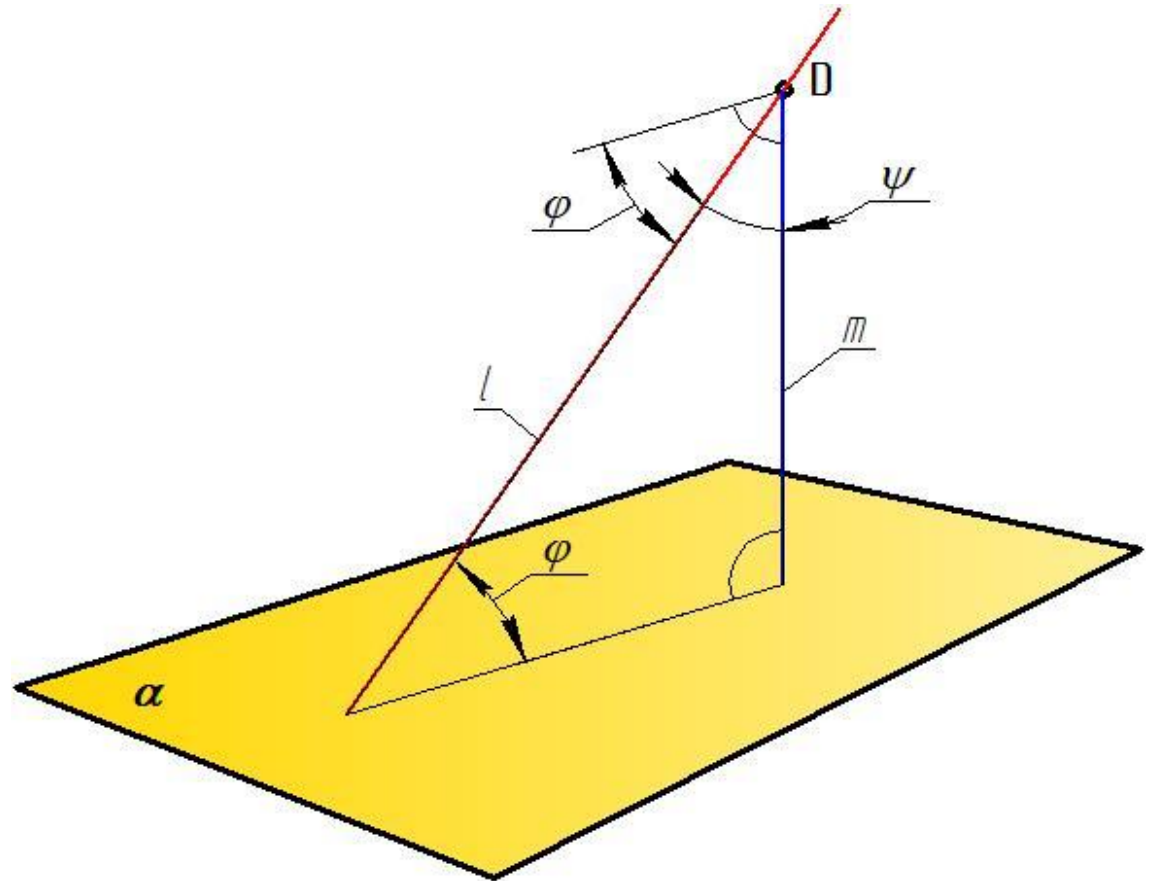
$$D \in l$$

$$m \perp$$

$$\angle^{\alpha} \psi =$$

$$m^{\wedge} l$$
$$\varphi = 90^{\circ} -$$

$\psi$

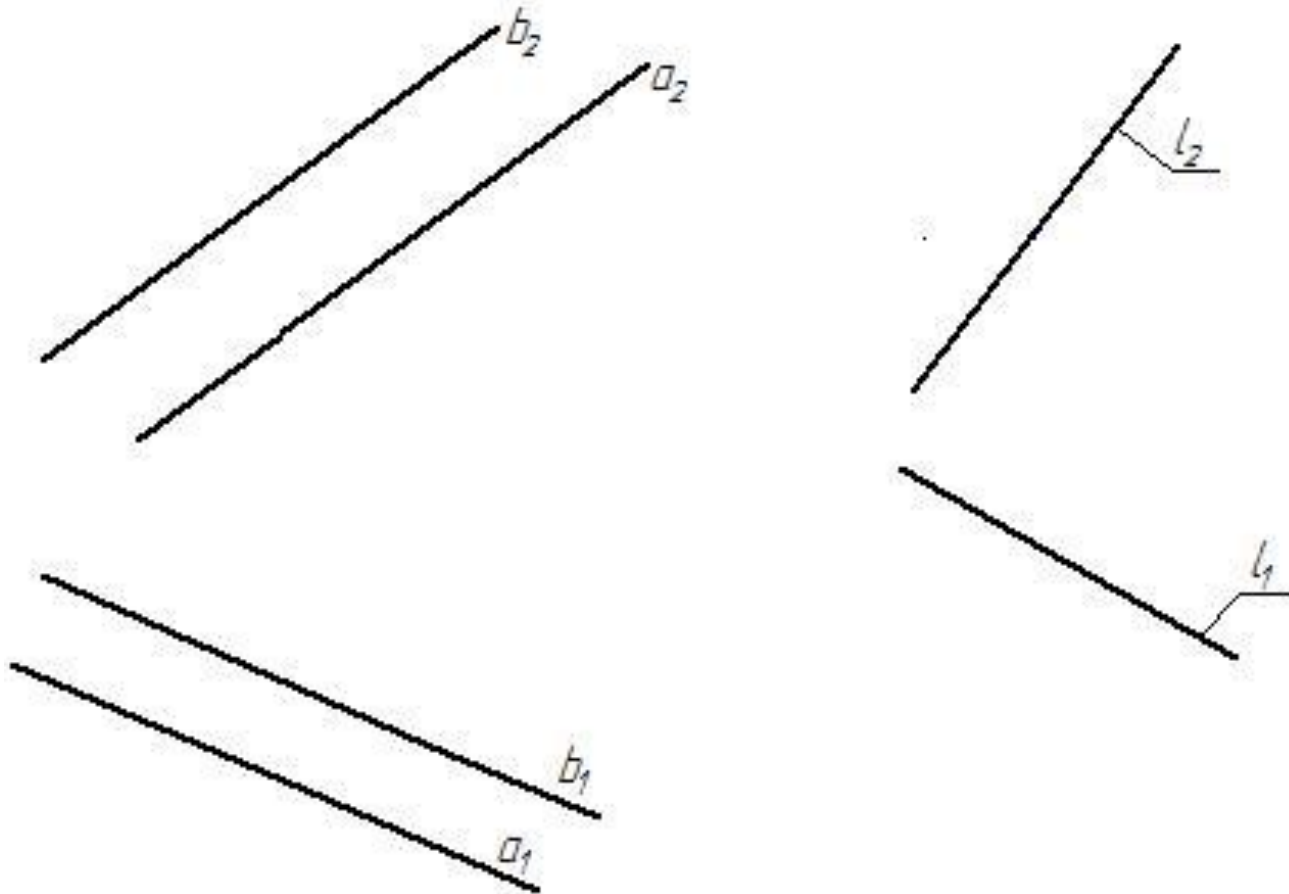




# Угол между прямой и плоскостью

## Исходные данные

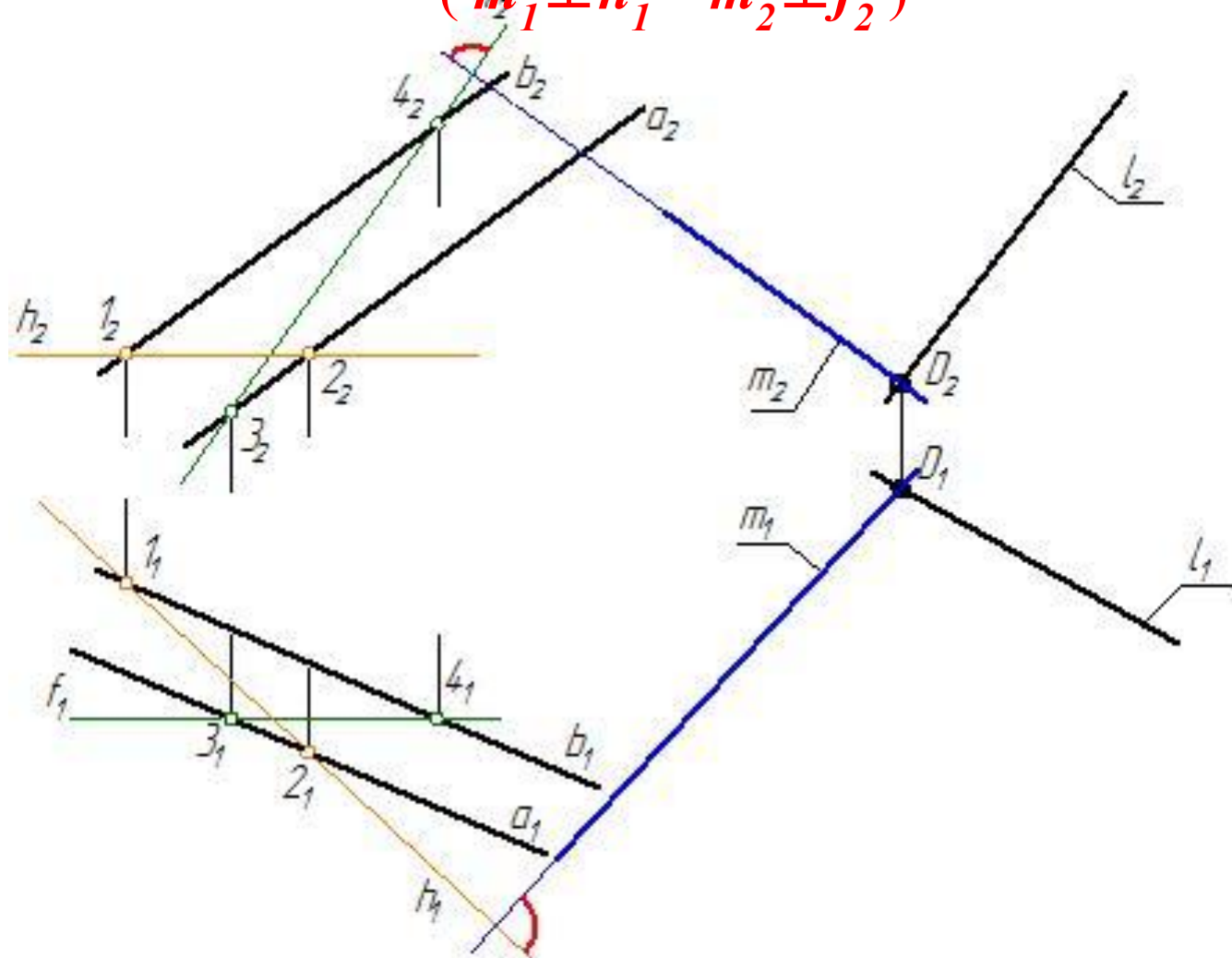
Заданы прямая  $l$  и плоскость  $\alpha(a, b)$



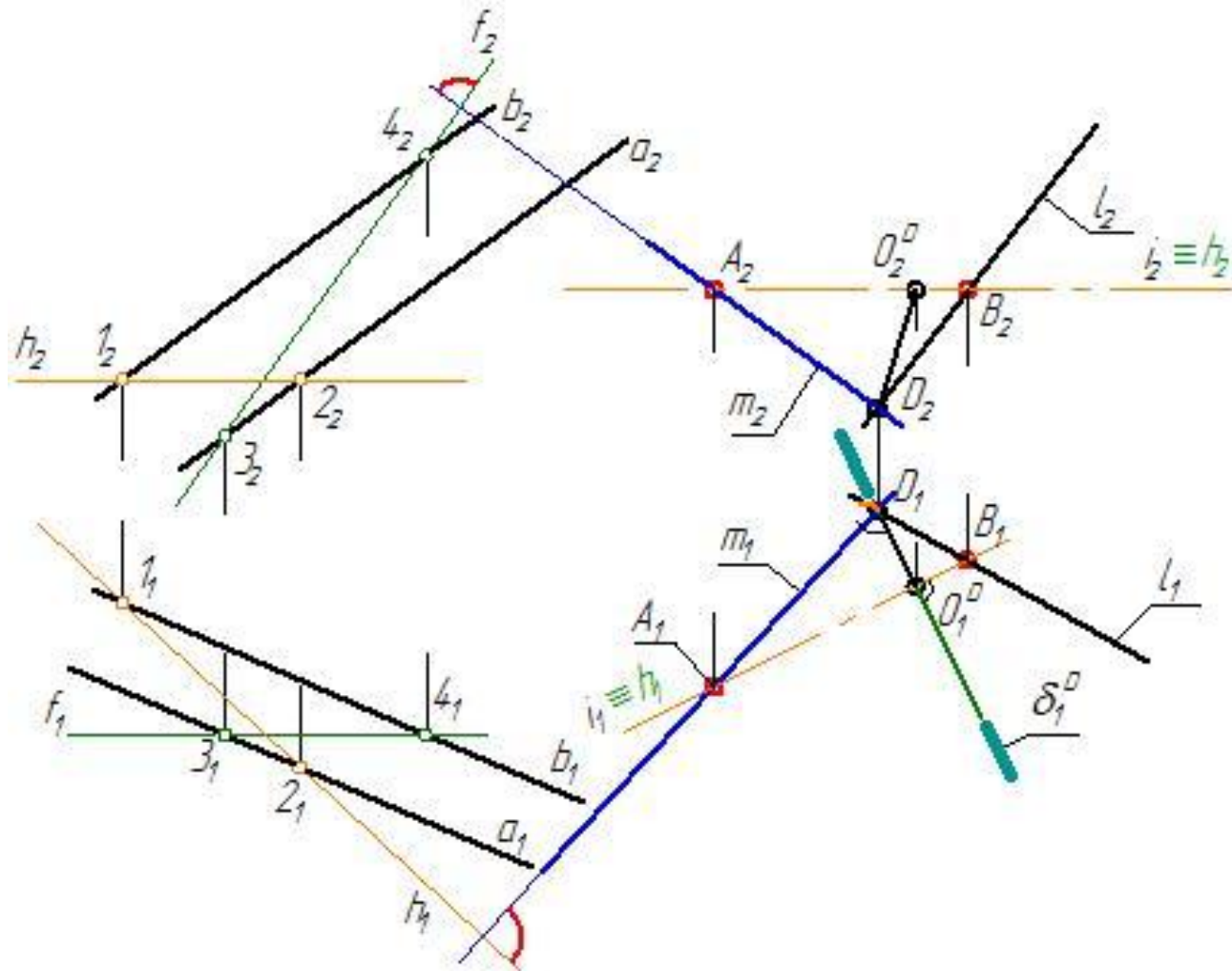
1. На прямой  $l$  выбирается произвольная точка  $D$ .
2. Через точку  $D$  проводят перпендикуляр к заданной плоскости.

$$m \perp \alpha$$

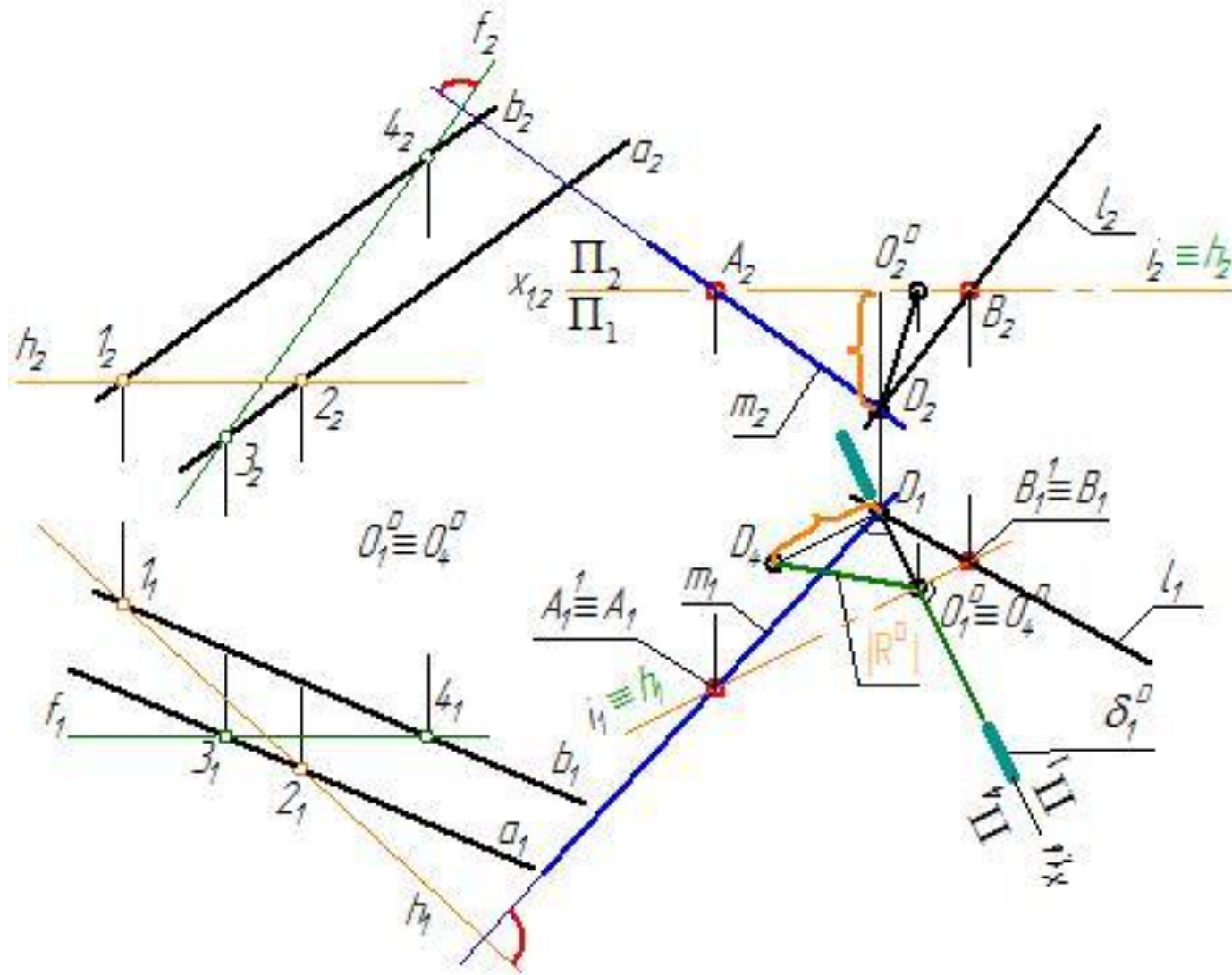
$$(m_1 \perp h_1 \quad m_2 \perp f_2)$$



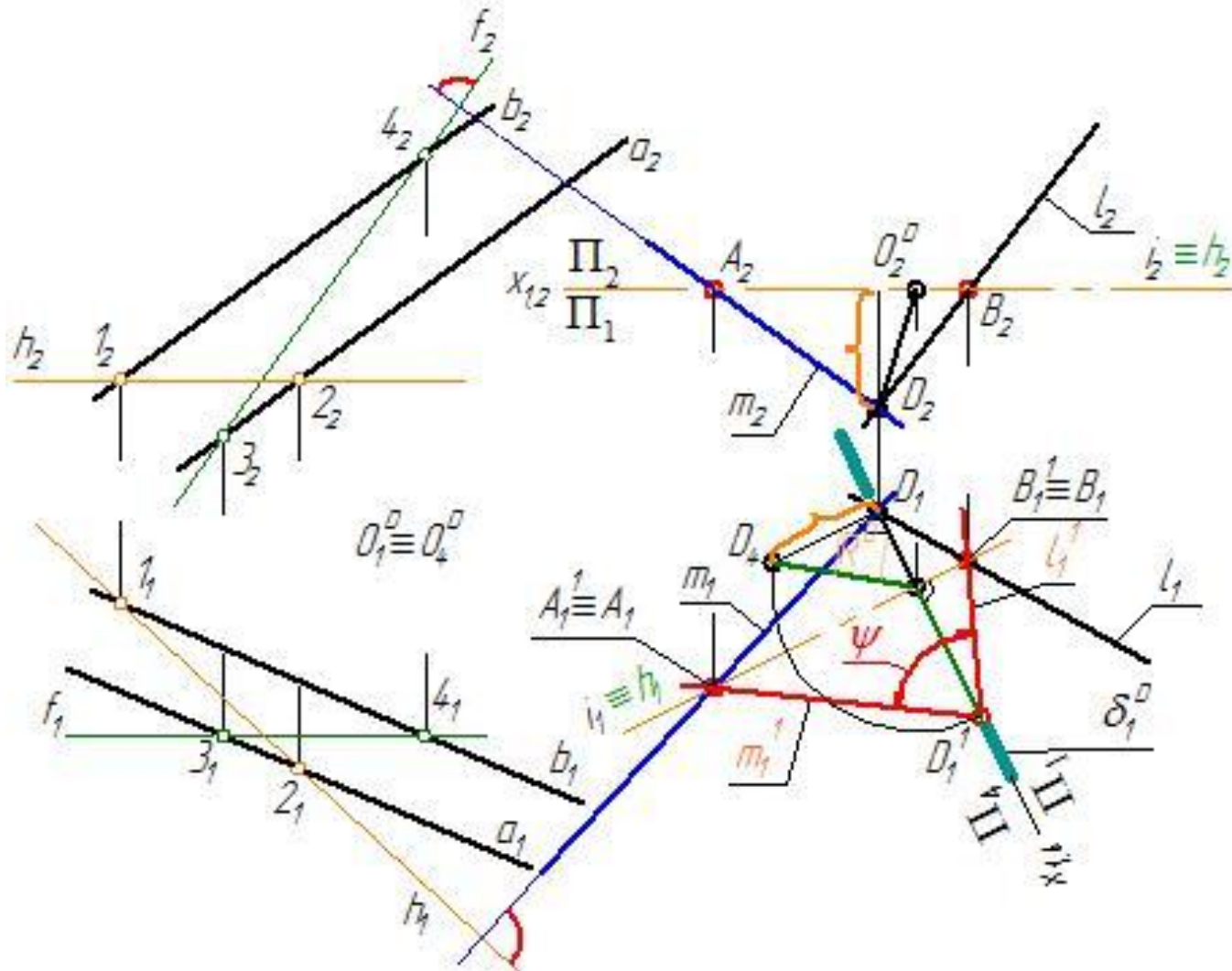
3. В плоскости, образованной прямыми  $m$  и  $l$ , проводят горизонталь (фронталь), которая является осью вращения ( $h \equiv i$ ).
4. Задают плоскость вращения  $\delta$  точки  $D$  вокруг оси  $i$ .  $\delta_1 \perp i_1$
5. Отмечают центр вращения точки  $D$  – точку  $O$ .



6. Способом замены плоскостей проекций определяют истинную величину радиуса вращения точки  $D$ .



7. Выполняют поворот точки  $D$  до совмещения с плоскостью уровня, в которой расположена ось вращения.
8. Проводят новые проекции  $m^1$  и  $l^1$  прямых  $m$  и  $l$ .
9. Отмечают угол  $\psi$ , образованный прямыми  $m^1$  и  $l^1$ .







# Угол между плоскостями

$$\angle \varphi = \alpha \wedge \beta$$

$$\psi = 180^\circ - \varphi$$

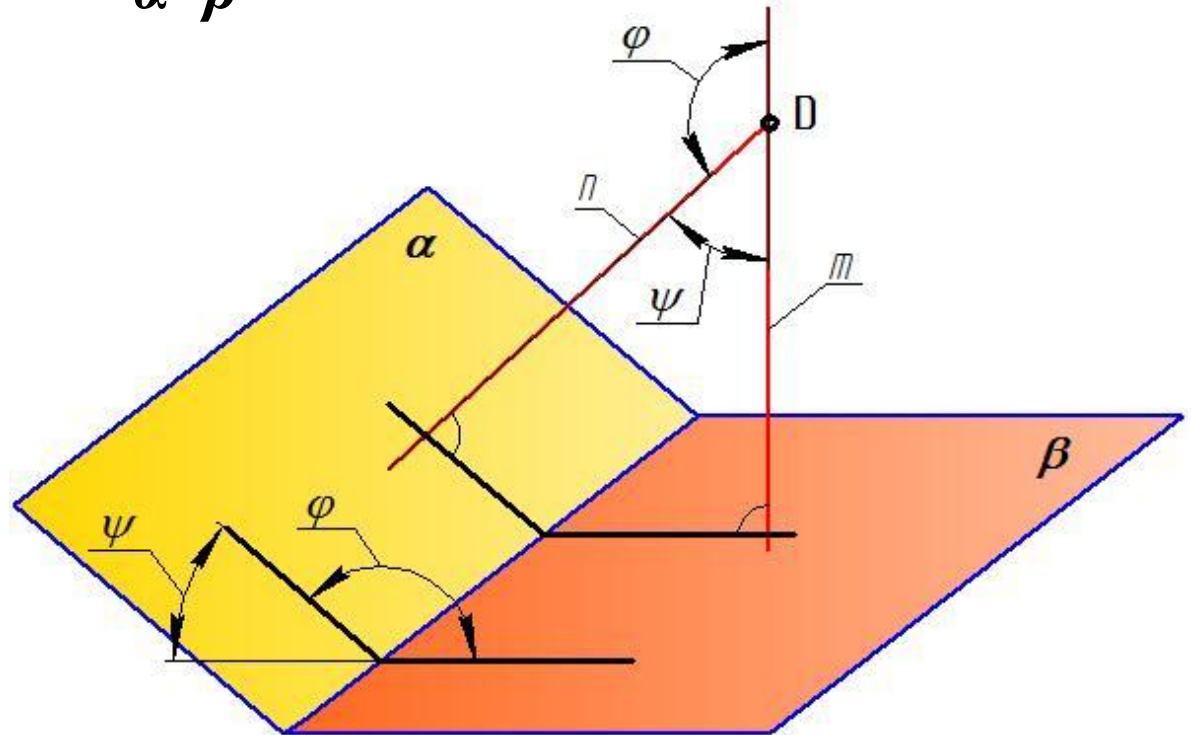
$D$  – произвольная точка

$$n \perp \alpha ; m \perp \beta$$

$$\angle \psi =$$

$$m \wedge n$$

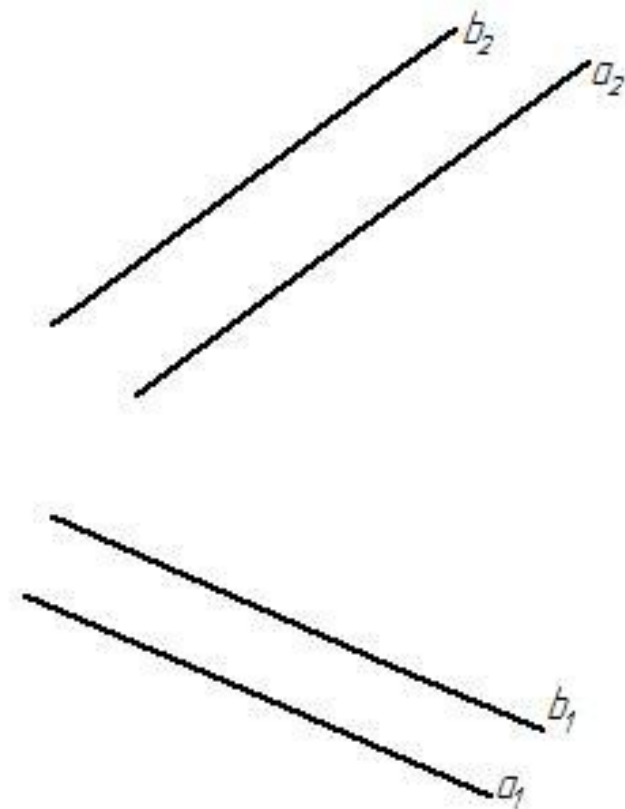
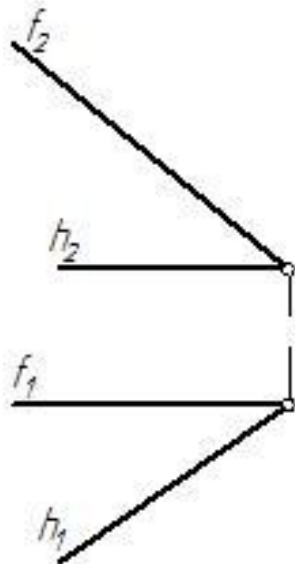
$$\varphi = 180^\circ - \psi$$



# Угол между плоскостями

## Исходные данные

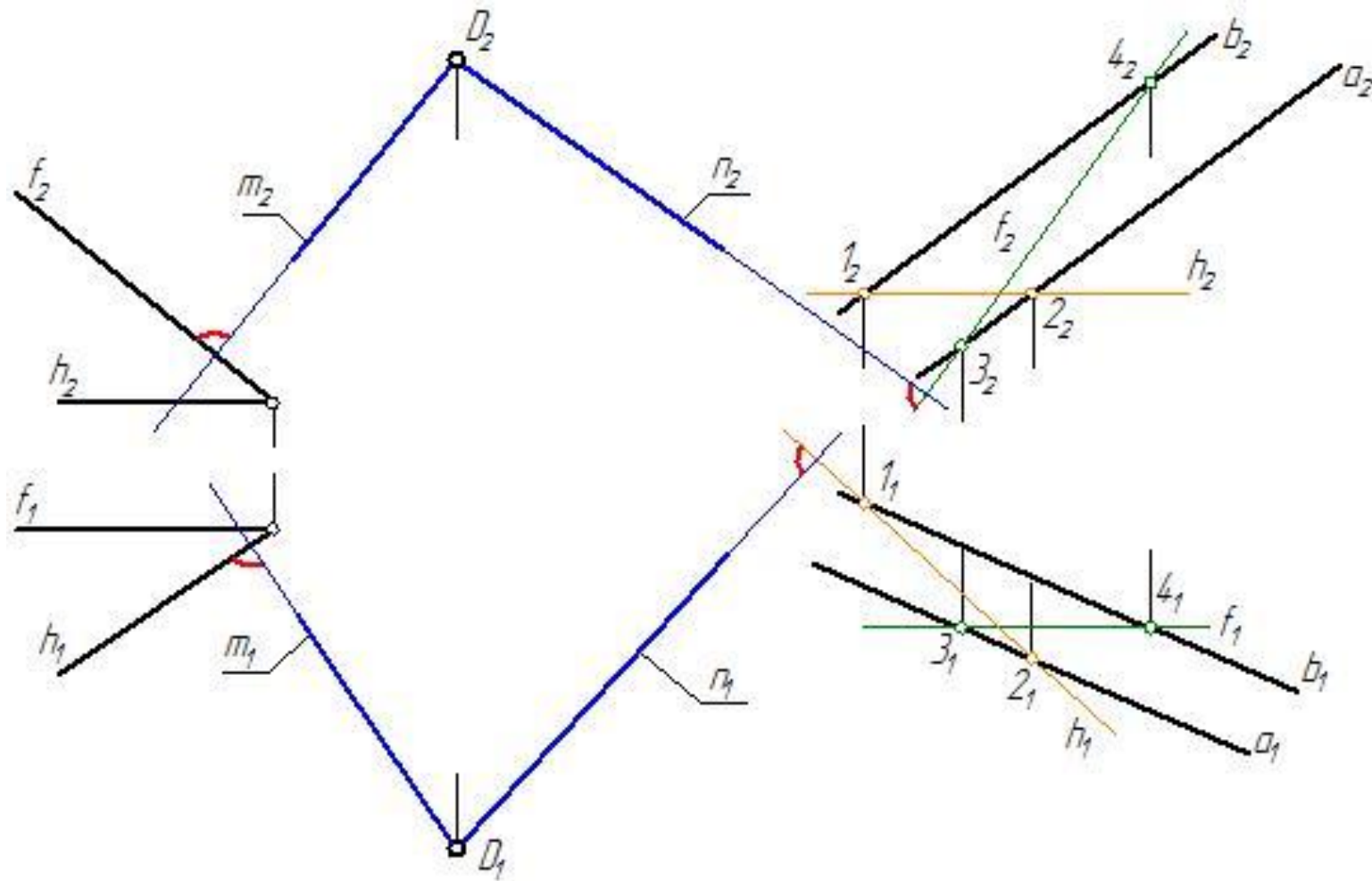
Заданы плоскости  $\alpha(h, f)$  и  $\beta(a, b)$



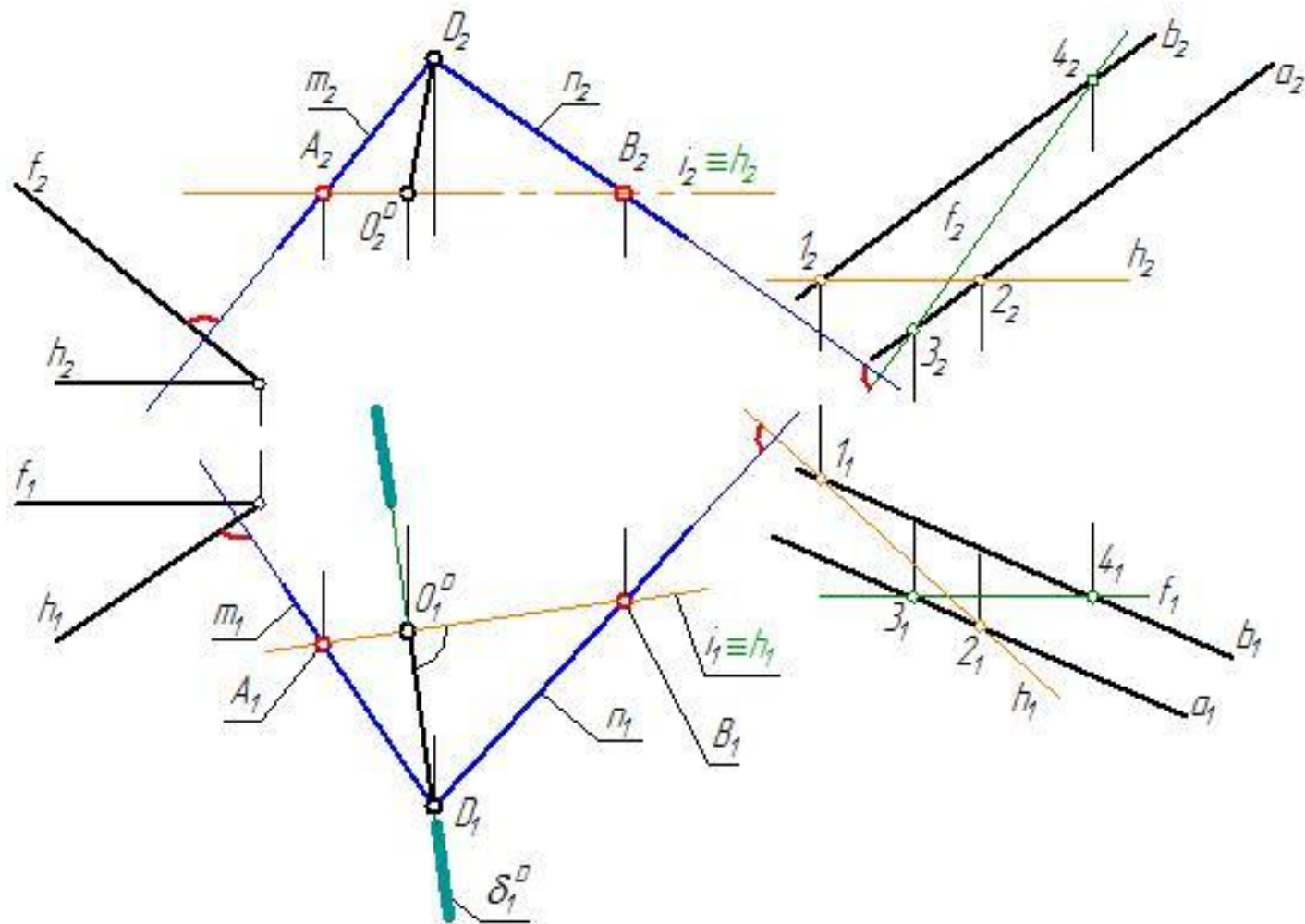


1. Вводится произвольная точка D.
2. Через точку D проводят перпендикуляры к каждой из заданных плоскостей.  $m \perp \alpha$   $n \perp \beta$

$$(l_1 \perp h_1 \quad l_2 \perp f_2)$$

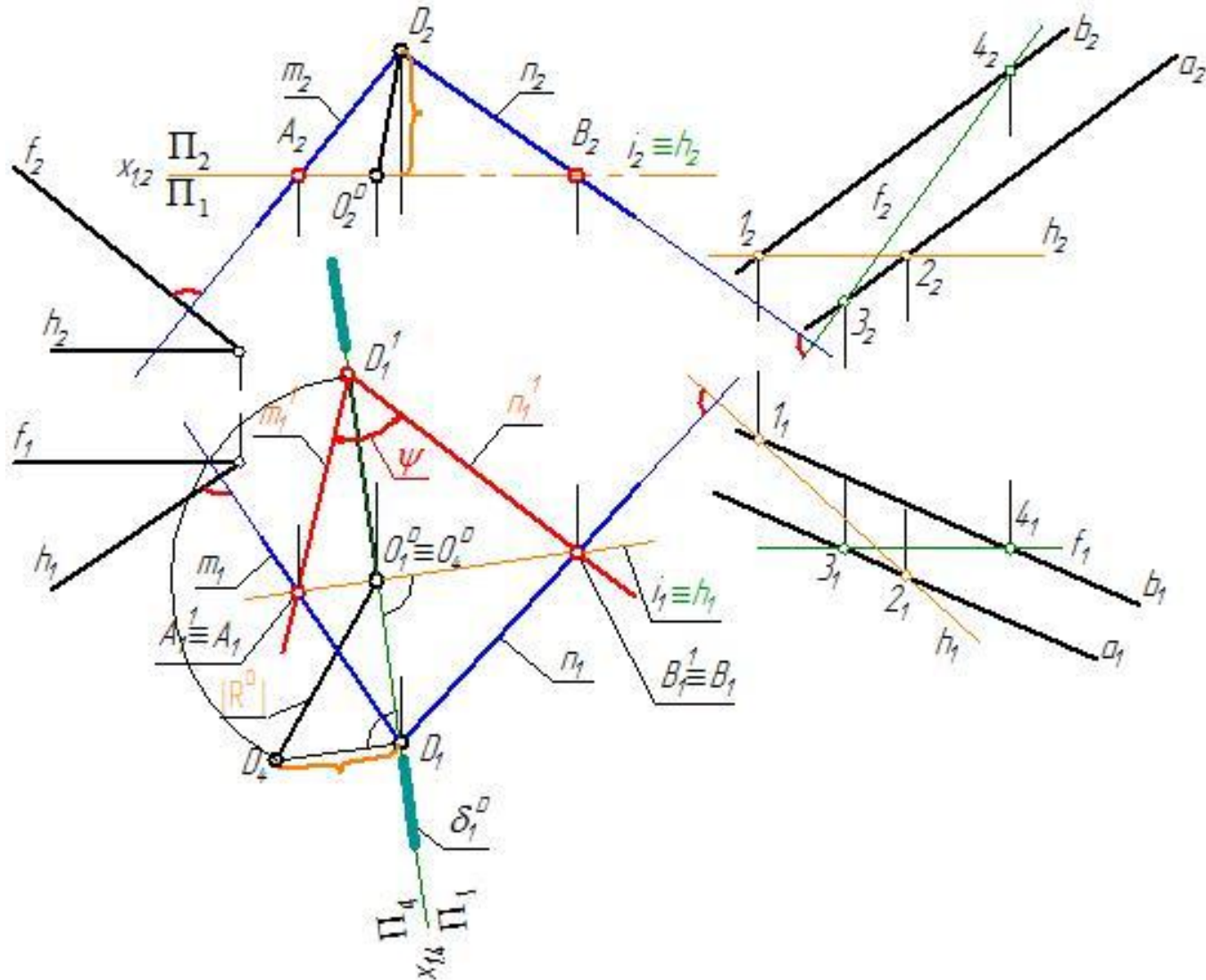


3. В плоскости, образованной прямыми  $m$  и  $n$ , проводят горизонталь (фронталь), которая является осью вращения ( $h \equiv i$ ).
4. Задают плоскость вращения  $\delta$  точки  $D$  вокруг оси  $i$ .  $\delta_1 \perp i_1$
5. Отмечают центр вращения точки  $D$  – точку  $O$ .





7. Выполняют поворот точки  $D$  до совмещения с плоскостью уровня, в которой расположена ось вращения.
8. Проводят новые проекции  $m^1$  и  $n^1$  прямых  $m$  и  $n$ .
9. Отмечают угол  $\psi$ , образованный прямыми  $m^1$  и  $n^1$ .



10. Достраивают угол  $\psi$  до развернутого и отмечают угол  $\varphi$ .

