НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Лекция 3

Направление обучения – «Строительство»

Способы преобразования проекций

Способы преобразования проекций применяют для получения нового изображения объекта или группы объектов, которое позволяет упростить решение поставленной задачи.
Как правило, это переход от общего положения к частному.

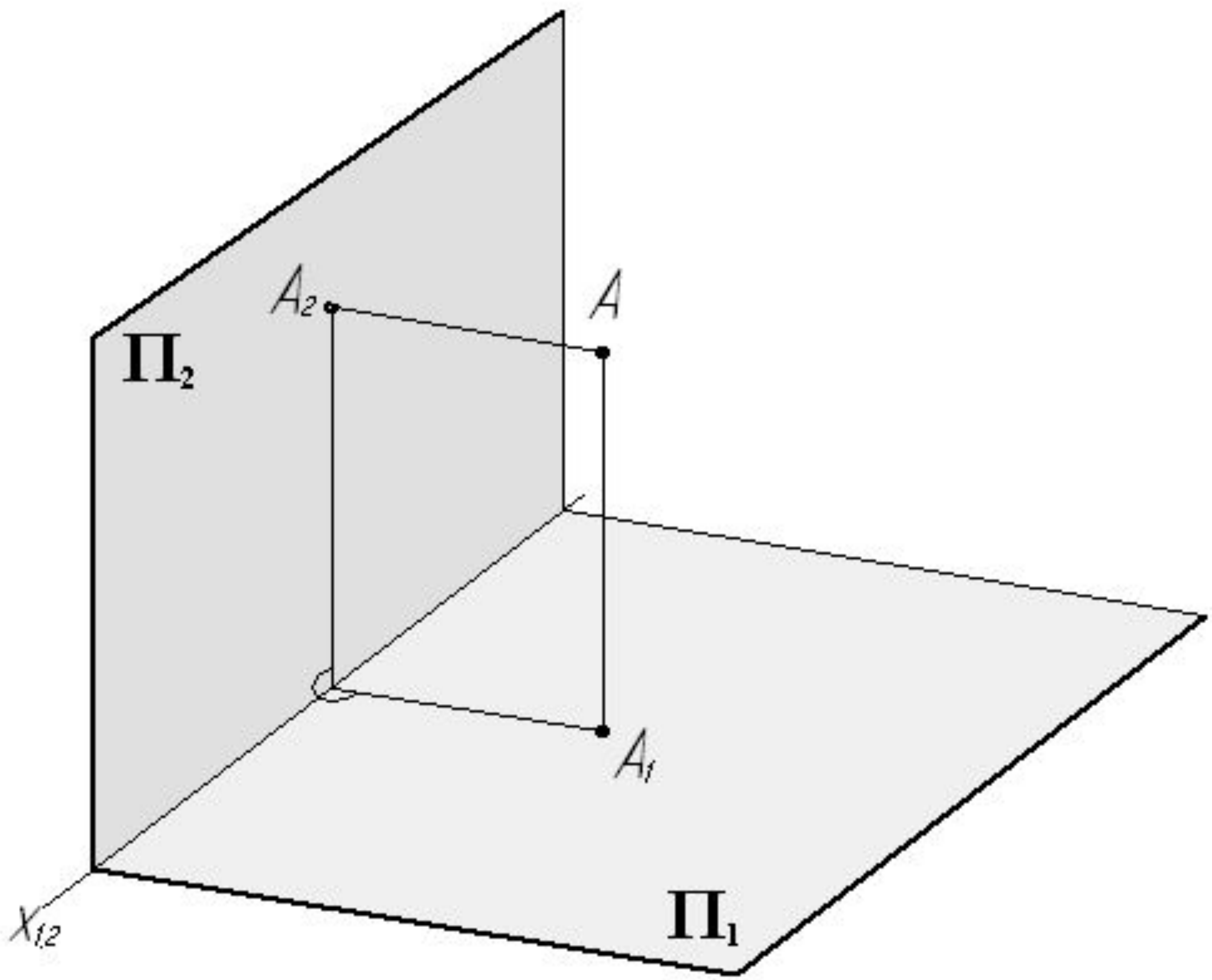
Способы преобразования проекций

- **Объект в пространстве не перемещается**
  - **Способ дополнительного проецирования**
    - **Центрального**
    - **Параллельного косоугольного**
    - **Прямоугольного – перемена (замена) плоскостей проекций**
- **Объект в пространстве перемещается**
  - **Плоскопараллельное перемещение**
    - **Вращение**
      - **Ось вращения перпендикулярна плоскости проекций (может указываться или не указываться)**
      - **Ось вращения параллельна плоскости проекций**

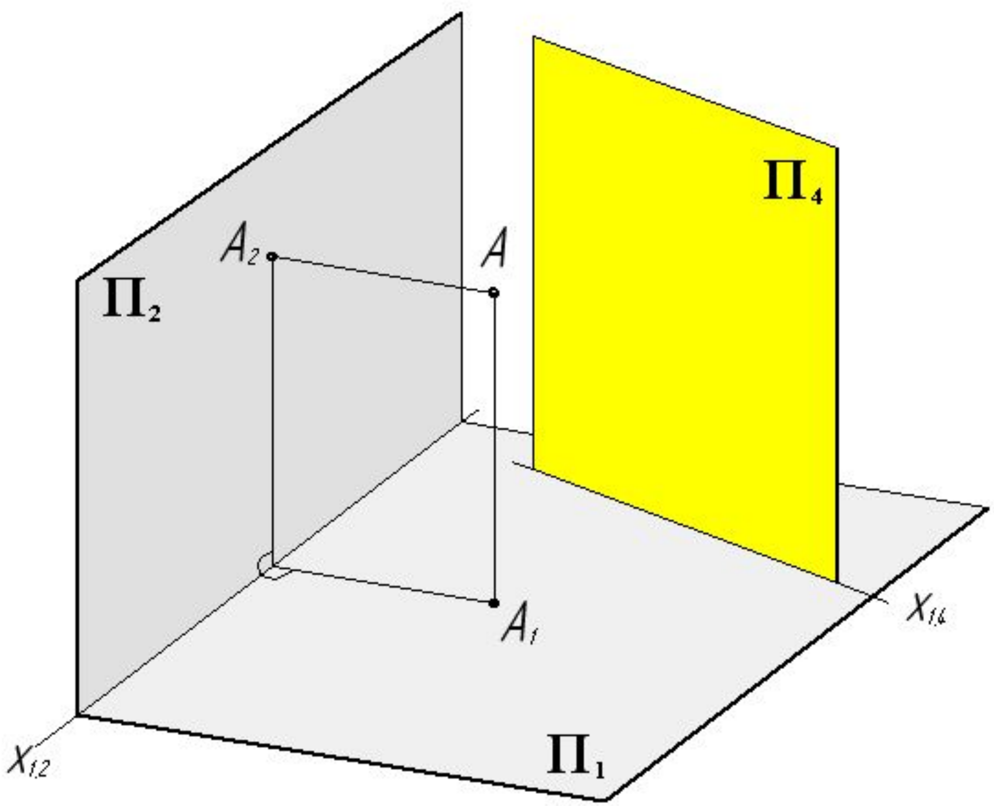
Дополнительное прямоугольное проецирование – перемена плоскостей проекций

- Подбираемая дополнительная плоскость проекций должна быть только проецирующей. Тем самым создаётся новая прямоугольная система плоскостей проекций.
- Подбираемые дополнительные плоскости проекций обозначаются Π_4, Π_5, Π_6 и т.д.

В ортогональной системе двух плоскостей проекций $П_1/П_2$ взята произвольная точка А и построены ее проекции.



Введена дополнительная горизонтально-проецирующая плоскость проекций $П_4$. Например,. Таким образом создана новая система ортогональных плоскостей проекций $П_1/П_4$ с осью $x_{1,4}$



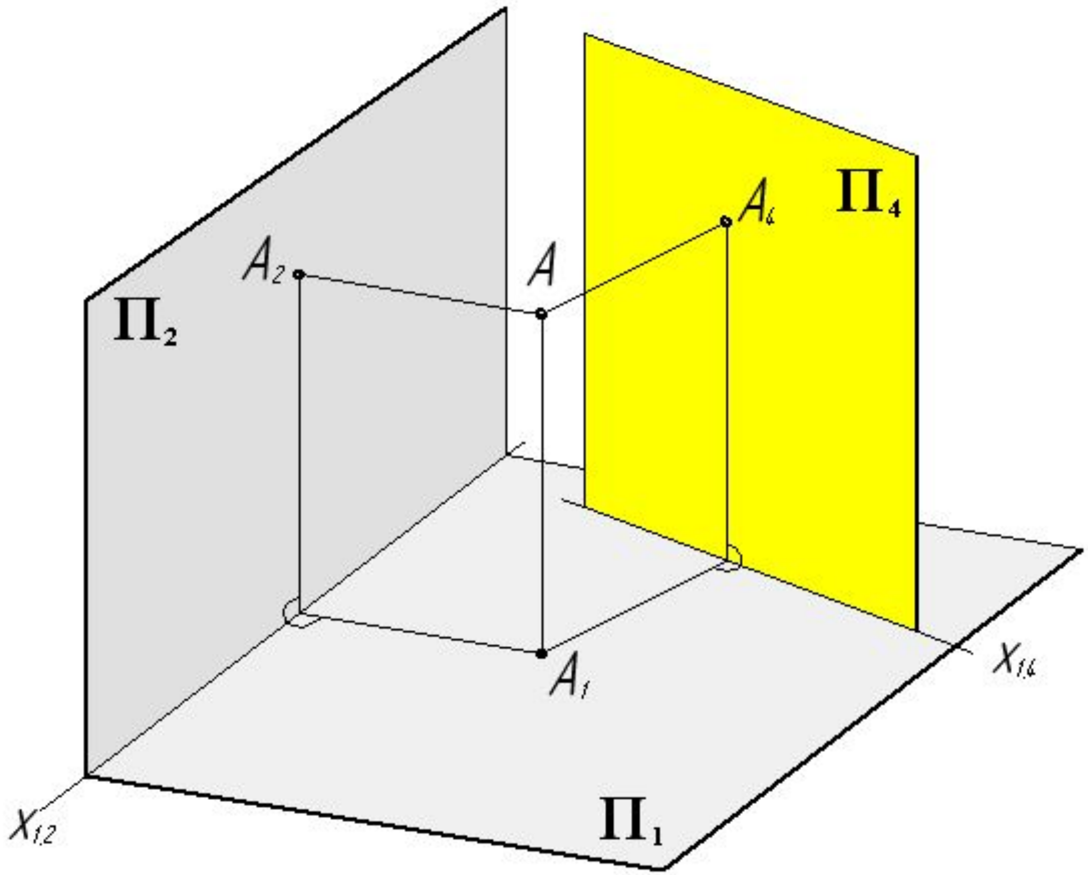
$$П_4 \perp П_1$$

$$П_1 \cap П_4 = x_{1,4}$$

$$x_{1,2}\ П_1/П_2 \longrightarrow x_{1,4}\ П_1/П_4$$

$П_1$ - const

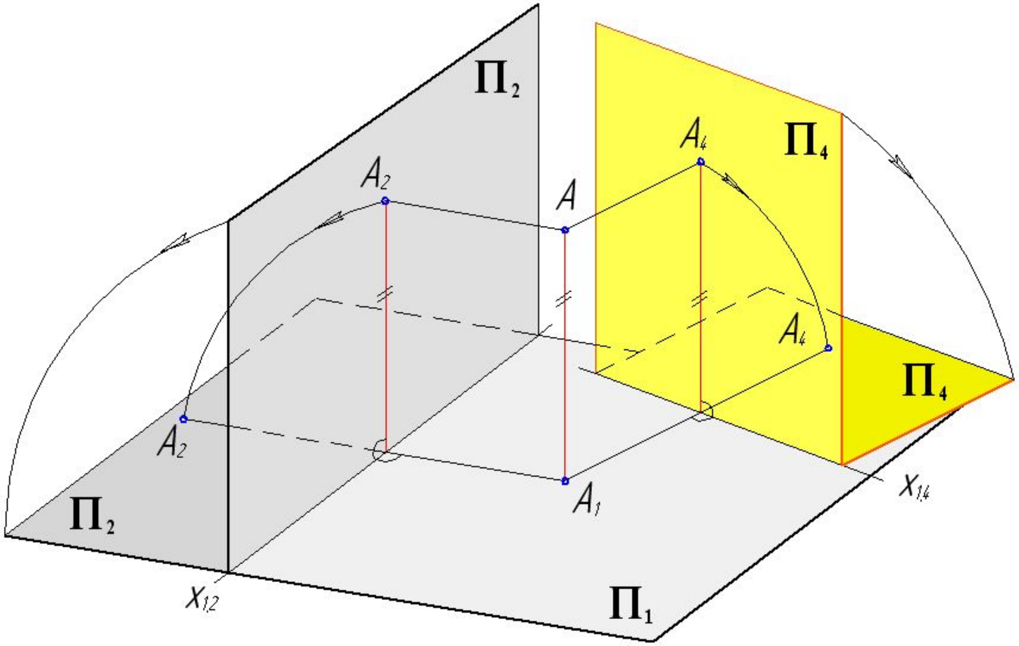
Точка А ортогонально проецируется на плоскость $П_4$

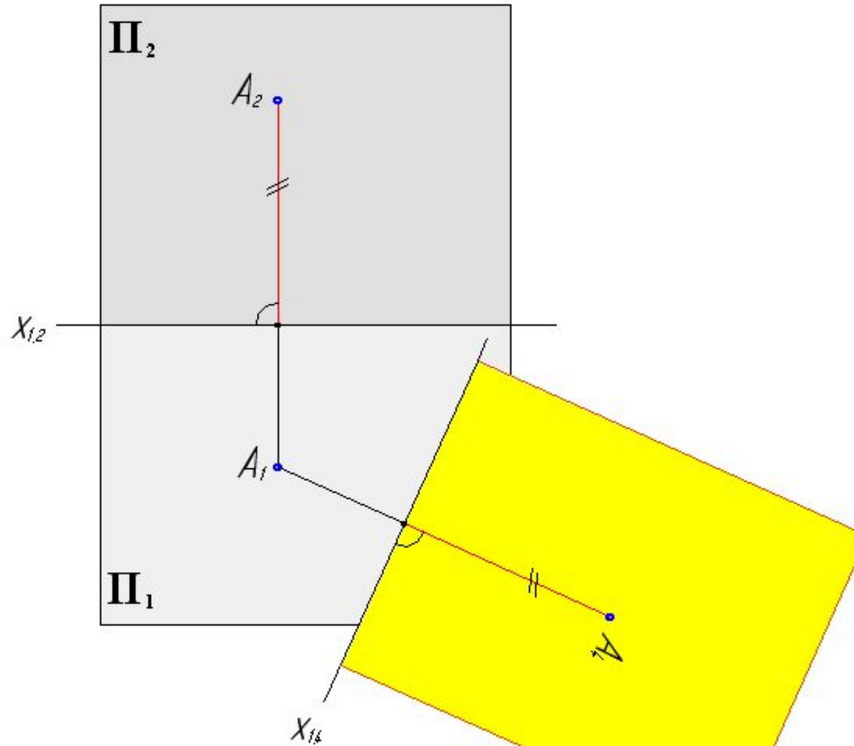


Так как точка А не изменяет своего положения относительно плоскостей $П_1$ и $П_2$, то расстояние от точки А до плоскости $П_1$ остается неизменным, как в системе $П_1/П_2$, так и в системе $П_1/П_4$.

$(A,П_1) = const \Rightarrow (A,A_1) = (A_2,x_{1,2}) = (A_4,x_{1,4})$.

Принцип построения эпюра при использовании способа перемены плоскостей проекций





$$\Pi_4 \perp \Pi_1$$

$$\Pi_1 \cap \Pi_4 = x_{1,4}$$

$x_{1,2}\ \Pi_1/\Pi_2 \longrightarrow x_{1,4}\ \Pi_1/\Pi_4$

$(A,\Pi_1) = \text{const} \Rightarrow (A,A_1) = (A_2,x_{1,2}) = (A_4,x_{1,4})$.

Π_1 - const

Вращение

Каждая точка объекта вращается вокруг выбранной оси, перемещаясь по окружности, лежащей в плоскости перпендикулярной оси вращения.

Осью вращения может быть ***<u>только</u>*** прямая частного положения – прямой уровня или проецирующей прямой.

Ось вращения – прямая уровня

Плоскость вращения точки - проецирующую плоскость.

На плоскости проекций, параллельно которой расположена ось вращения, траектория перемещения точки имеет форму прямой, а на другой – форму эллипса, что не дает возможности ее использования.

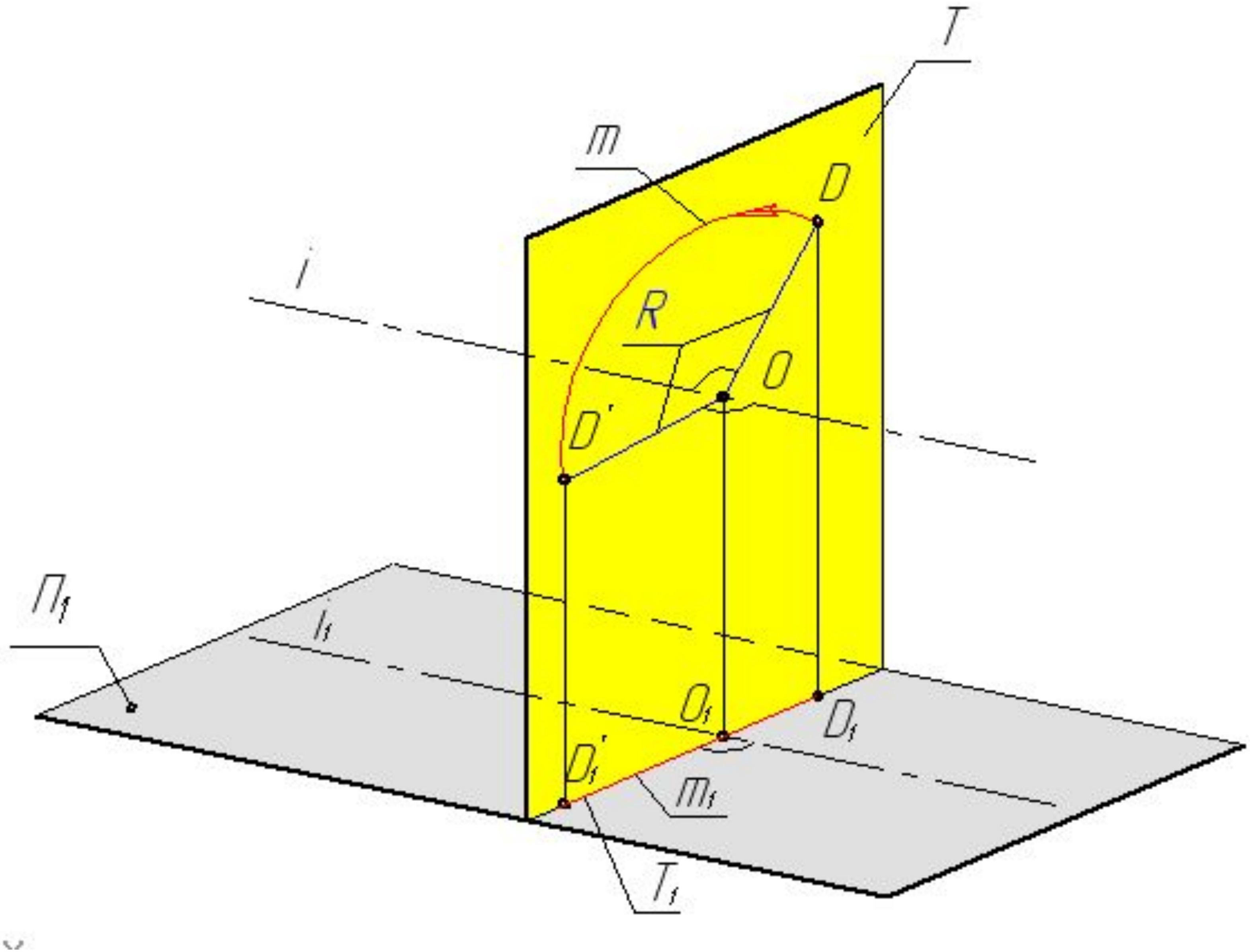
Все построения выполняются только на одной проекции.

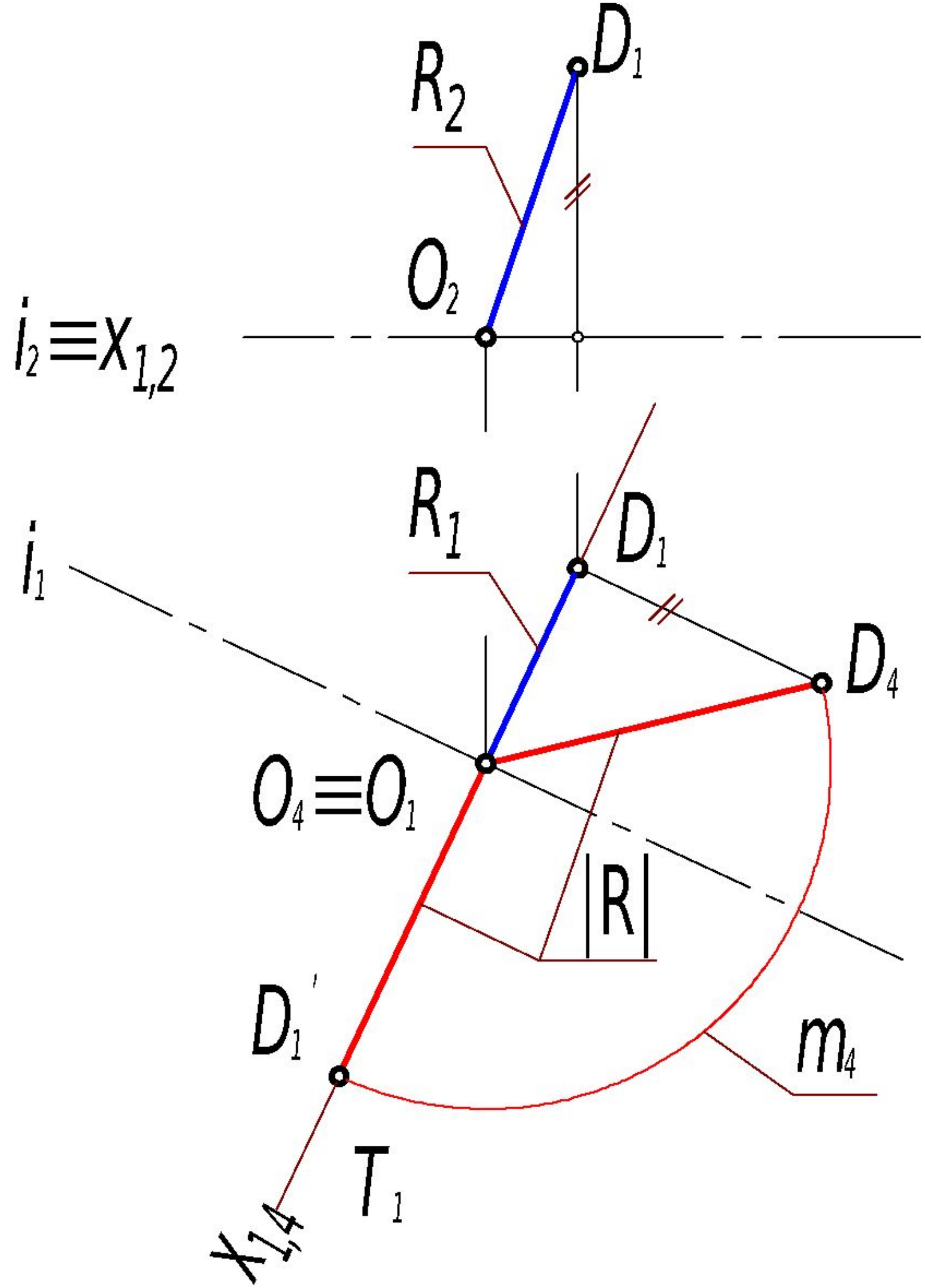
Вся задача сводится к определению истинной величины радиуса вращения точки.

Данный способ вращения имеет следующие ограничения:

- применим практически только к плоским фигурам;
- ось вращения должна лежать в плоскости поворачиваемой фигуры.

На рисунке ось вращения $\boldsymbol{i}$ является горизонталью





D_1
R_2
O_2
$i_2 \equiv x_{1,2}$
R_1
D_1
i_1
D_4
$O_4 \equiv O_1$
$|R|$
D_1'
m_4
T_1
$x_{1,4}$

Базовые преобразования проекций

Рассматриваются два варианта преобразования.

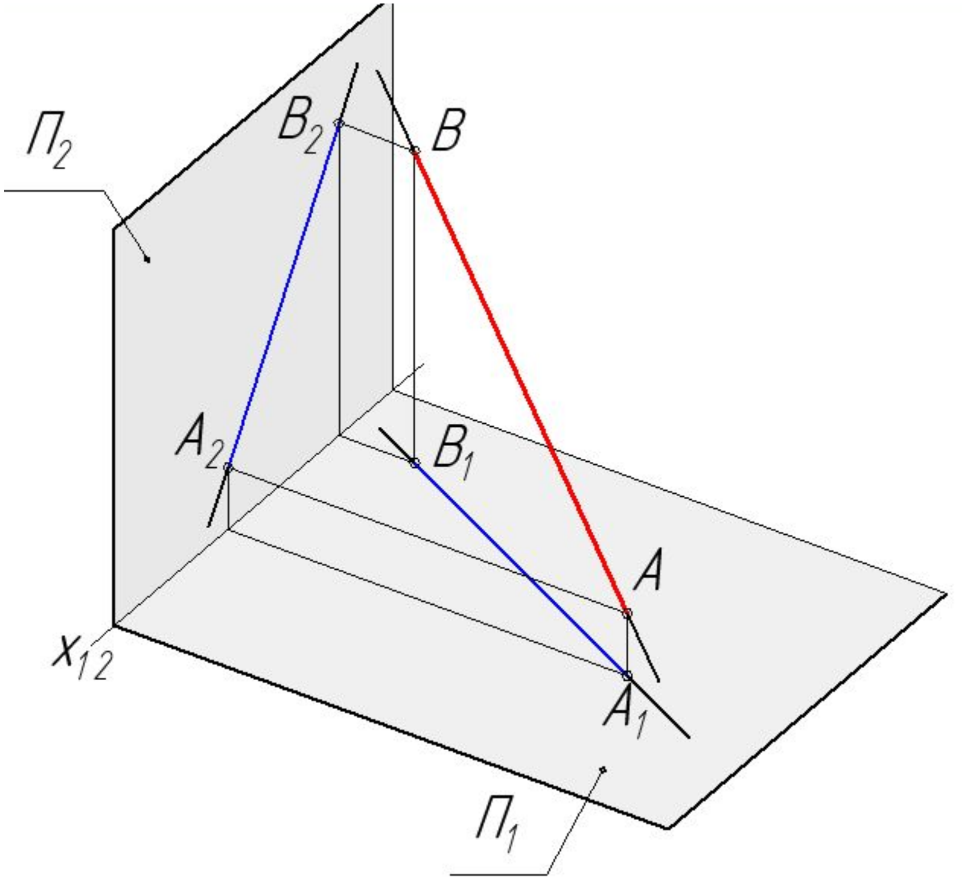
- **Вариант 1**. ***Переход от заданного положения объекта (прямой линии или плоской фигуры) в параллельное положение по отношению к выбранной плоскости проекций***.

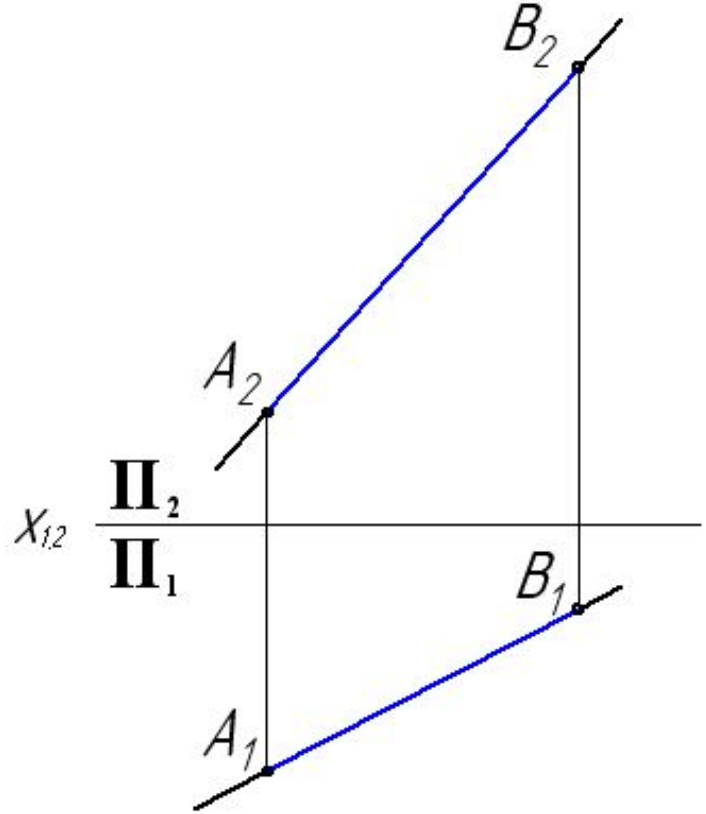
- **Вариант 2**. ***Переход от заданного положения объекта (прямой линии или торсовой поверхности) в проецирующее положение по отношению к выбранной плоскости проекций***.

Базовое преобразование № 1.

Преобразование прямой общего положения в прямую уровня

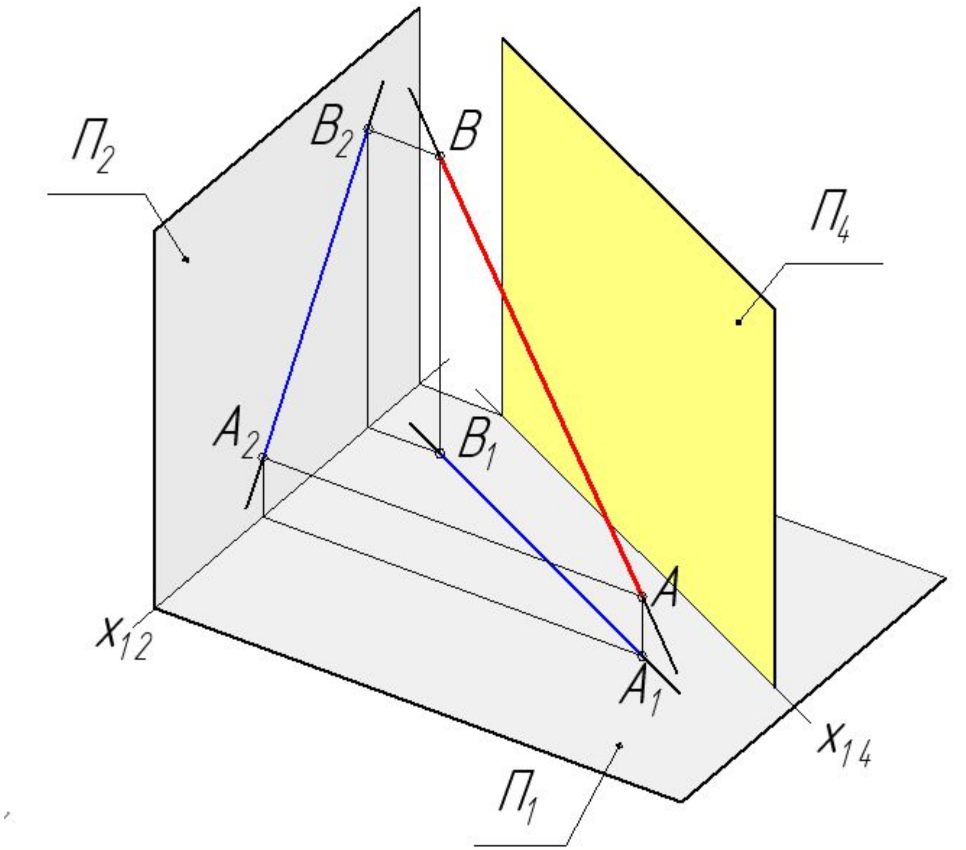
(построение дополнительной проекции прямой линии на параллельной ей плоскости проекций)

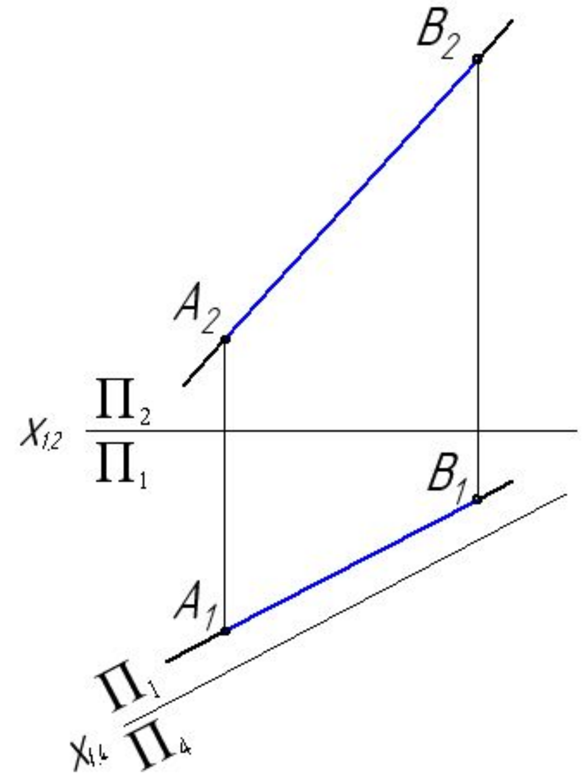




$(\Pi_2 \perp \Pi_1)$

$\boldsymbol{l}$ $(\boldsymbol{AB})$ - прямая общего положения



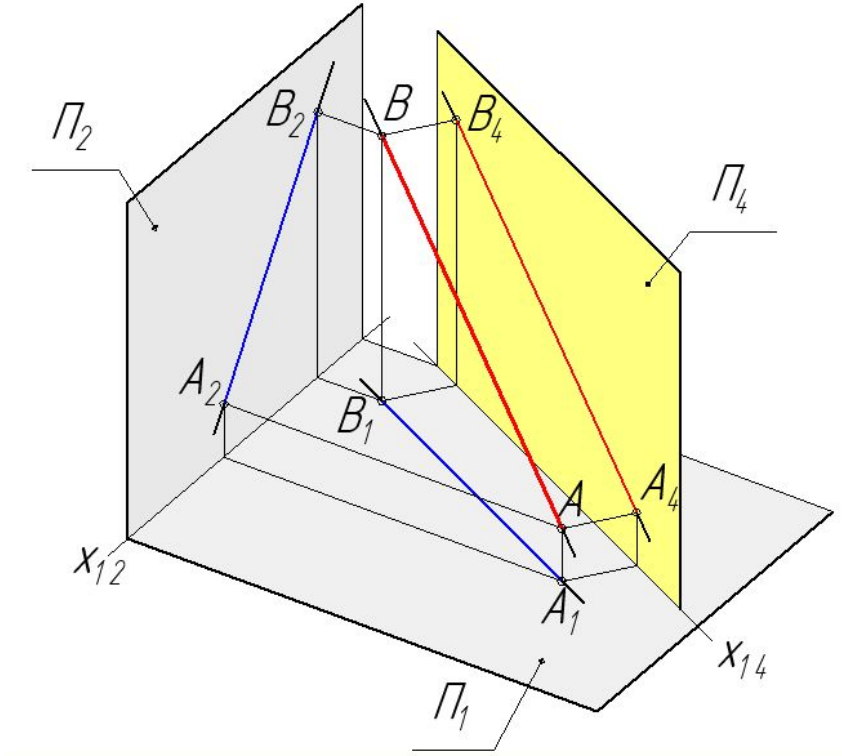


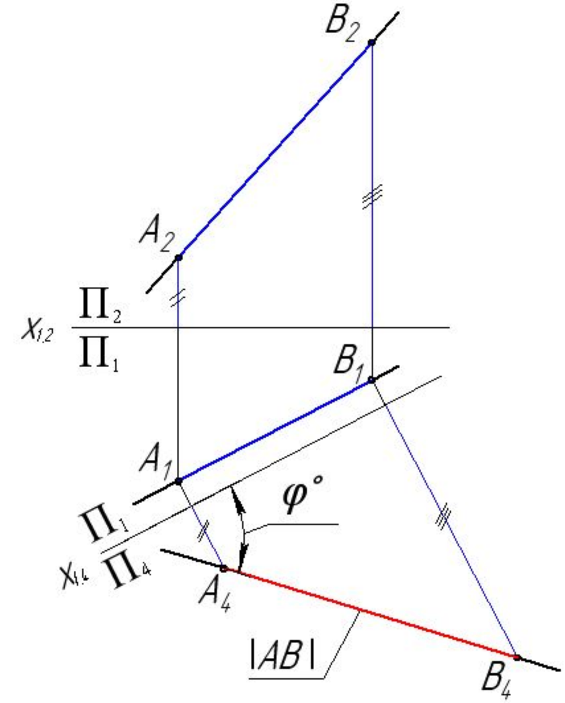
Подбирается дополнительная плоскость проекций Π_4

$(\Pi_4 \parallel l) \wedge ((\Pi_4 \perp \Pi_1) \vee (\Pi_4 \perp \Pi_2))$

На эпюре $x_{14} \parallel l_1 \quad \vee \quad x_{24} \parallel l_2$

В качестве примера взята $\Pi_4 \perp \Pi_1$, следовательно, $x_{14} \parallel l_1$





Строится дополнительная проекция $\boldsymbol{l}$ $(\boldsymbol{AB})$ на поле плоскости $\mathbf{\Pi_4}$.

$$A_1A_4 \perp x_{1,4} \text{ и } B_1B_4 \perp x_{1,4}\ ,$$

$$(A_2x_{1,2}) = (A_4x_{1,4}) \text{ и } (B_2x_{1,2}) = (B_4x_{1,4})$$

Базовое преобразование №2.

Преобразование прямой общего положения в проецирующую прямую

(построение дополнительной проекции прямой линии в виде точки)

При прямоугольном проецировании прямая является проецирующей, если она перпендикулярна плоскости проекций. Следовательно, дополнительная плоскость проекций должна быть перпендикулярна заданной прямой

$$\Pi' \perp l\,,$$

Но, так как l – прямая общего положения,

то Π' – также является плоскостью общего положения и $\Pi' \not\perp \Pi_1$ и $\Pi' \not\perp \Pi_2$,

Следовательно, чтобы получить проекцию прямой линии общего положения в виде точки способом перемены плоскостей проекций, нельзя сразу подобрать необходимую плоскость проекций.

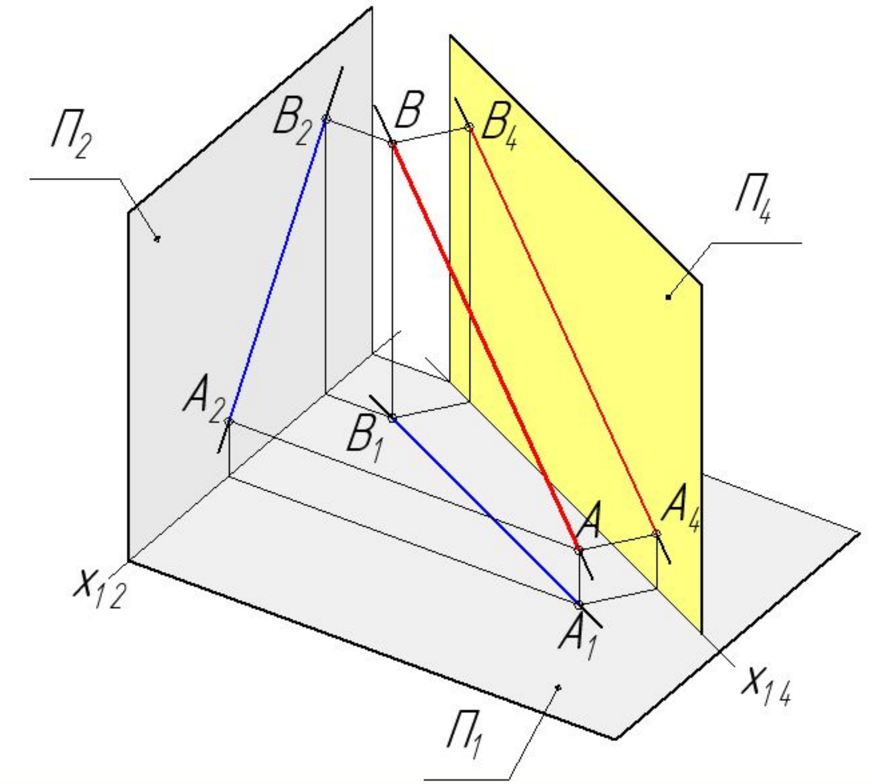
Данное преобразование выполняется в два этапа.

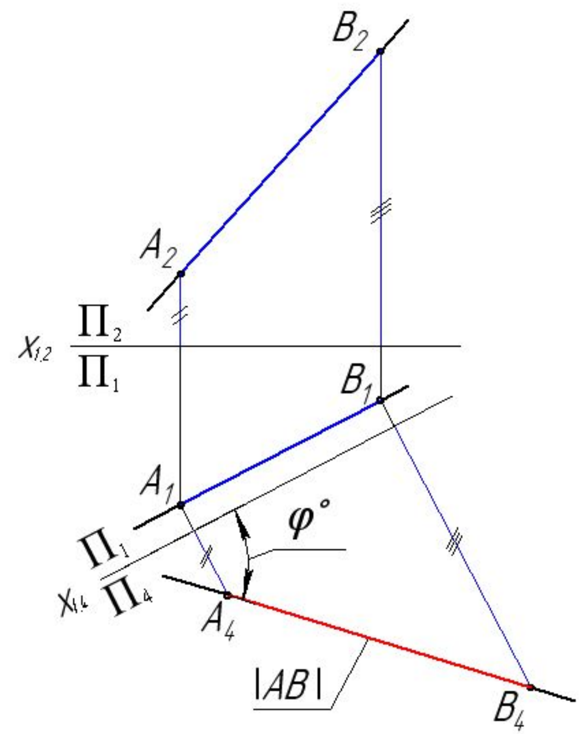
1-й этап

Прямая преобразуется в прямую уровня

$$(\Pi_4 \parallel l) \wedge (\Pi_4 \perp \Pi_1 \vee \Pi_4 \perp \Pi_2)$$

Это рассмотренная ранее базовая задача №1 на построение проекции прямой общего положения на плоскости проекций ей параллельной.

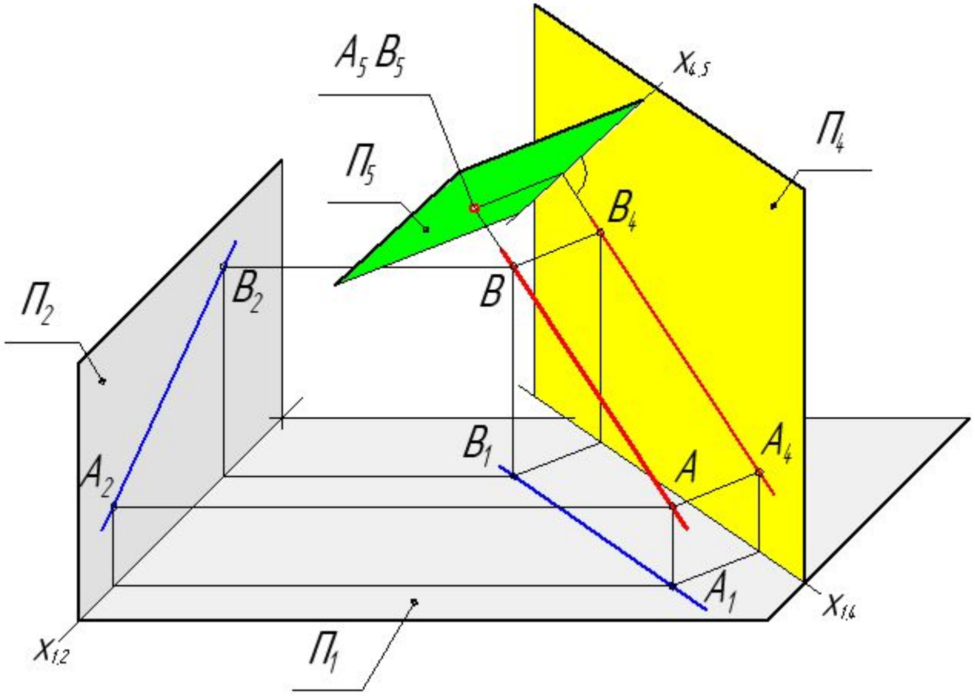


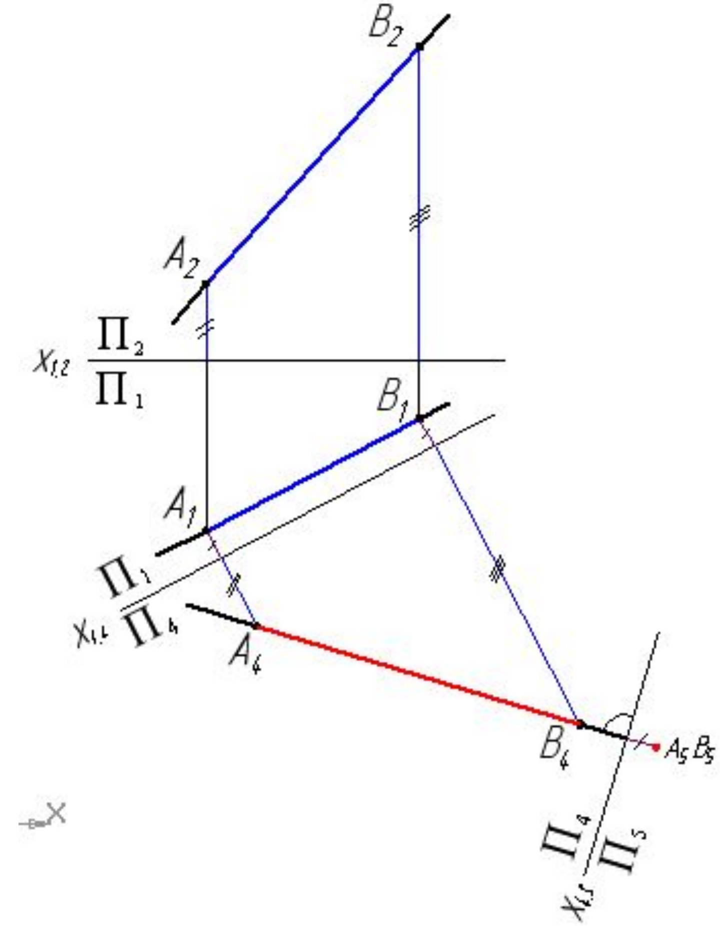


2-й этап

Из прямой уровня прямая преобразуется в проецирующую прямую

$$(\Pi_5 \perp l) \wedge (\Pi_5 \perp \Pi_4)$$



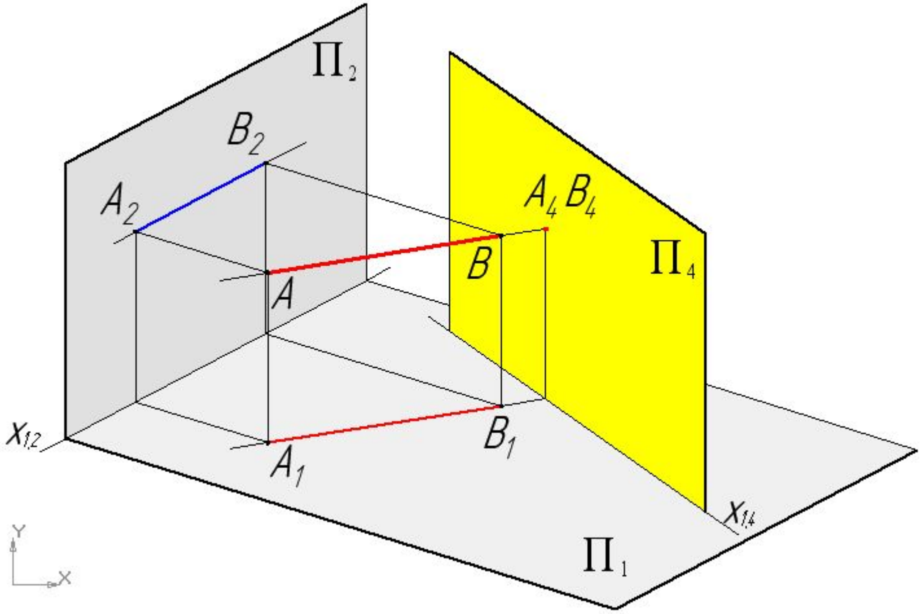


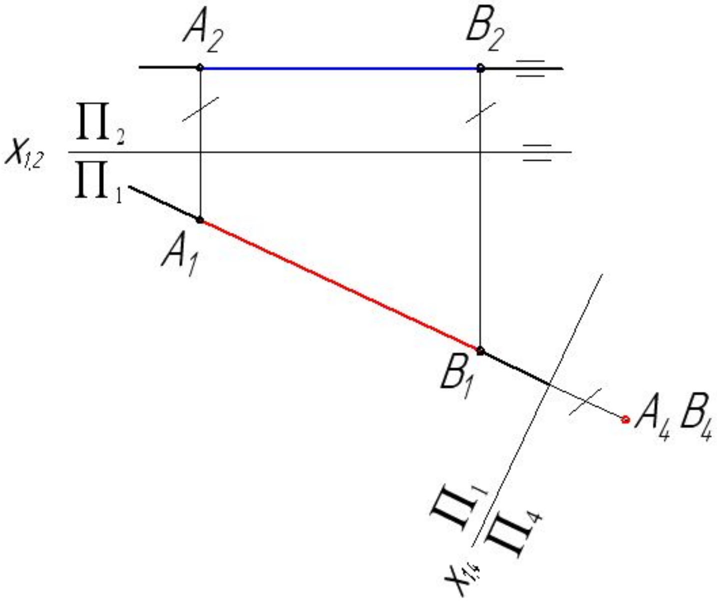
$$x_{4,5} \perp A_4B_4$$

$$(A_1B_1, x_{1,4}) = (A_5B_5, x_{4,5})$$

Для прямой уровня данное преобразование выполняется за один этап

Прямая уровня (*h* или *f*) параллельна плоскости проекций. Следовательно, если $\Pi' \perp$ (*h* или *f*), то $\Pi' \perp (\Pi_1$ или $\Pi_2)$, что удовлетворяет требования способа перемены плоскостей проекций.





Базовое преобразование № 3.

Преобразование плоскости (торсовой поверхности) общего положения в проецирующую поверхность

(построение проекции плоскости в виде прямой линии)

- Плоскость является проецирующей, если она перпендикулярна плоскости проекций.
- Следовательно, подбираемая новая плоскость проекций $\mathbf{П}_4$ должна быть перпендикулярна заданной плоскости, например $\mathbf{T}$.
- $$(\mathbf{П}_4 \perp \mathbf{T})$$
- Если плоскости взаимно перпендикулярны, то каждая из них должна содержать хотя бы одну прямую, перпендикулярную другой плоскости.
- $$(\mathbf{П}_4 \perp \mathbf{T}) \Rightarrow (\mathbf{П}_4 \perp \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{l} \subset \mathbf{T})$$

$$(\Pi_4 \perp \Pi_1) \vee (\Pi_4 \perp \Pi_2)$$

Если $(l \perp \Pi_4)$ и $(\Pi_4 \perp \Pi_1 \vee \Pi_4 \perp \Pi_2)$

то $(l \parallel \Pi_1 \vee l \parallel \Pi_2)$

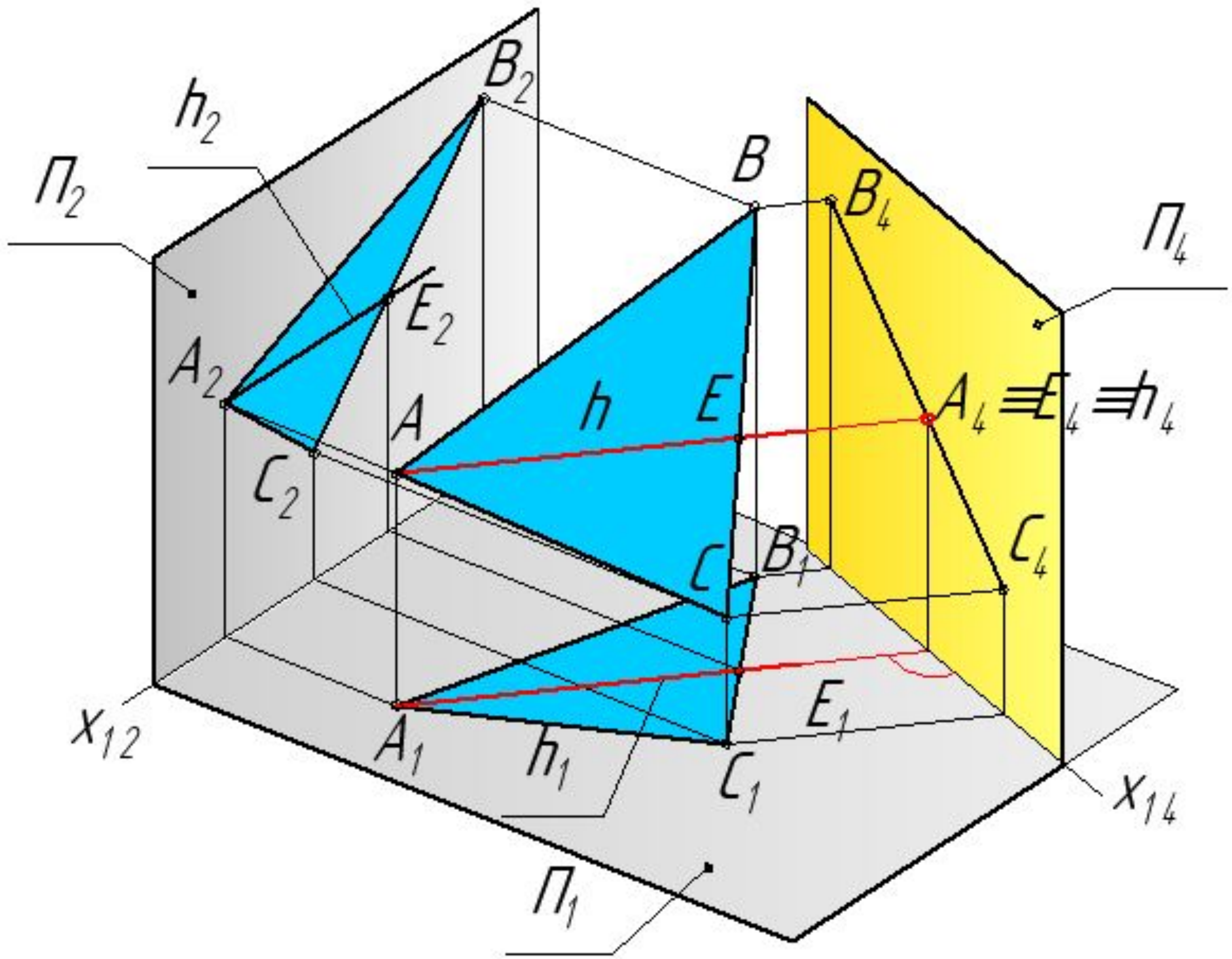
$$\Rightarrow \ (l \equiv h) \vee (l \equiv f\,)$$

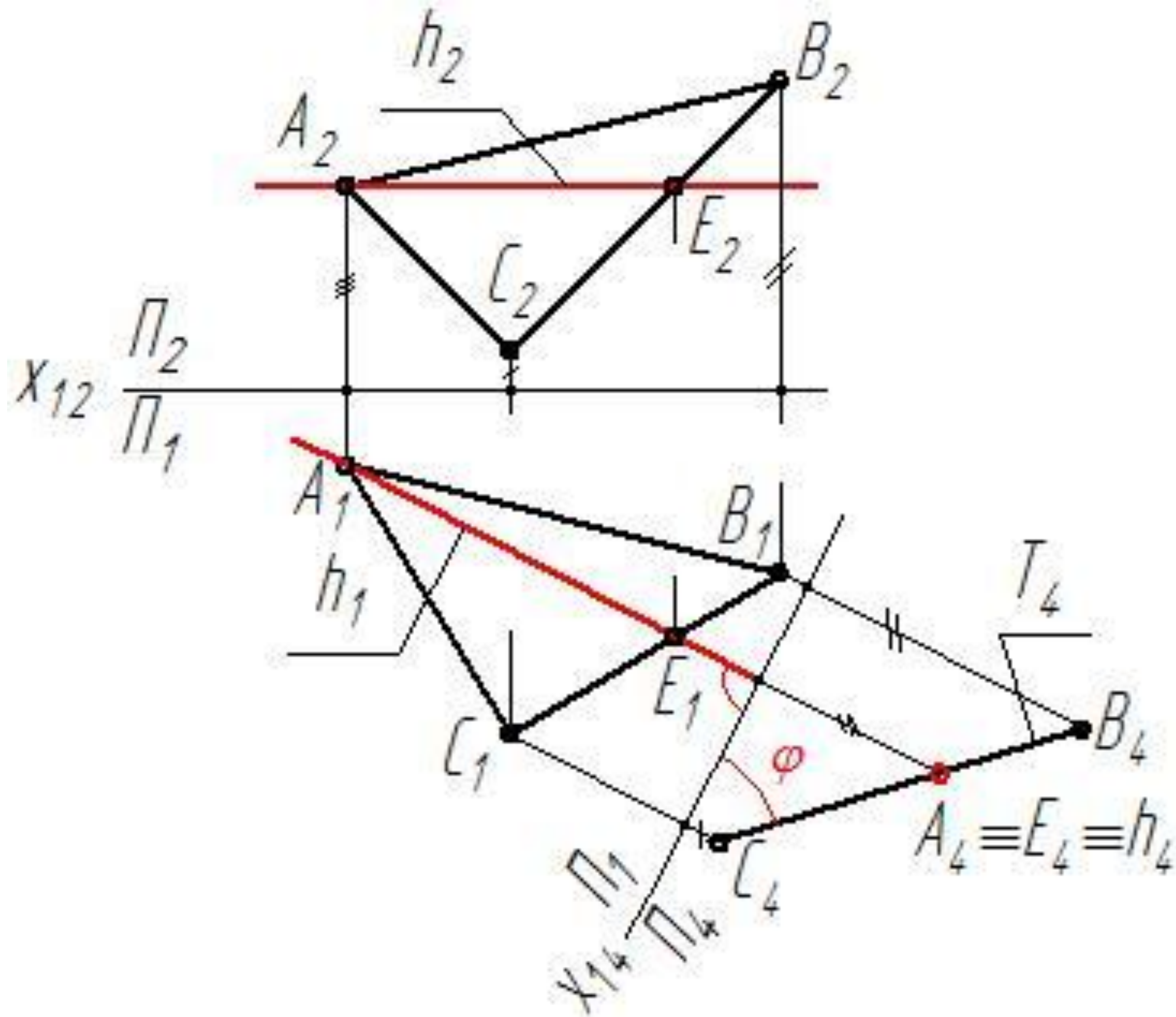
Следовательно,

если $(\Pi_4 \perp \Pi_1)$, ***то*** $(\Pi_4 \perp h, h \subset \mathrm{T})$ ***и*** $(x_{1,4} \perp h_1)$

если $(\Pi_4 \perp \Pi_2)$, ***то*** $(\Pi 4 \perp f, f \subset \mathrm{T})$ ***и*** $(x_{2,4} \perp f_2)$

В качестве примера $\Pi_4 \perp \Pi_1$





h2
B2
A2
E2
C2
П2
x12
П1
A1
B1
h1
T4
E1
B4
C1
φ
A4≡E4≡h4
C4
П1
П4
x14

Базовое преобразование № 4.

Построение проекции плоской фигуры на параллельной ей плоскости проекций

Решение задачи способом замены плоскостей проекций

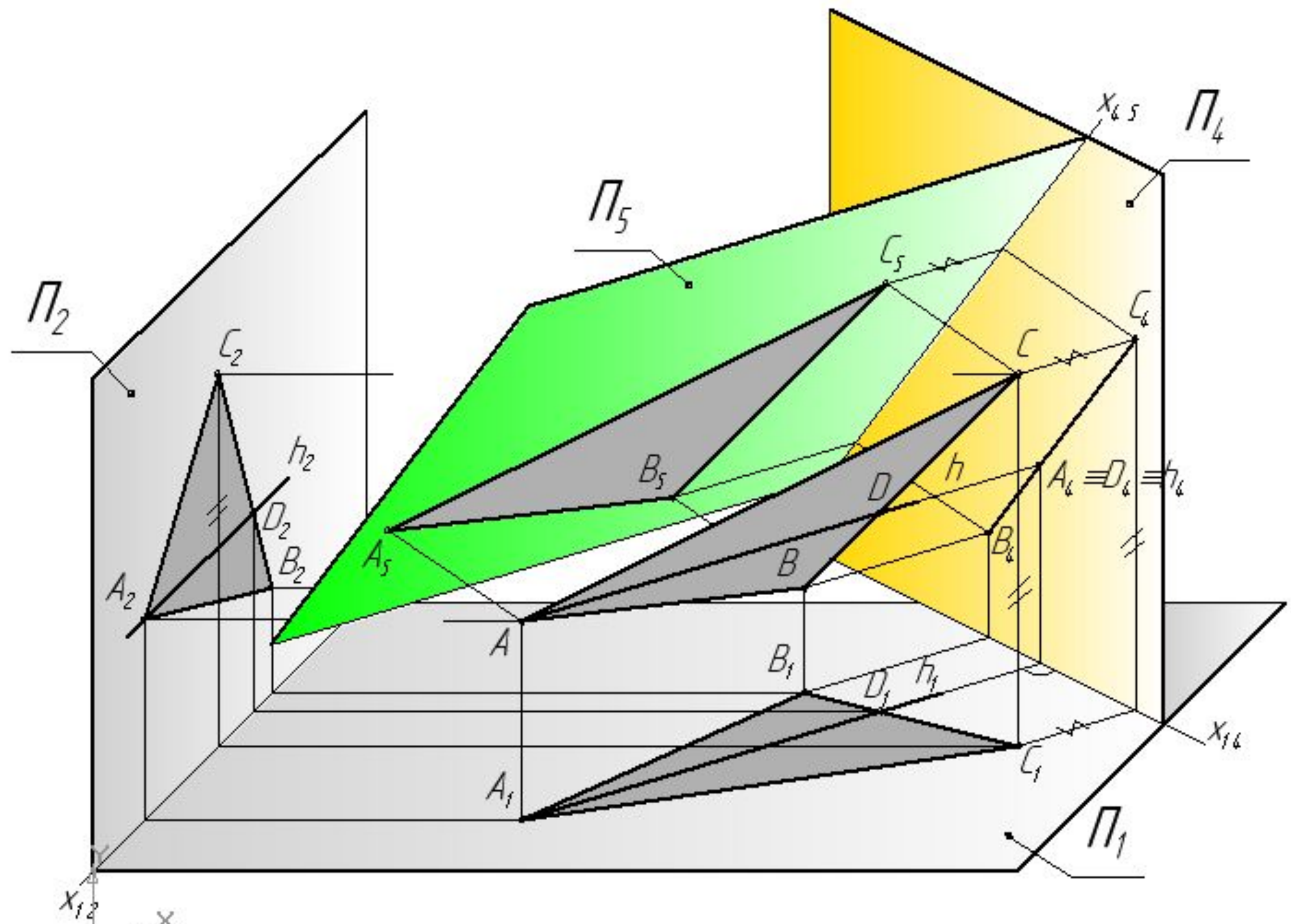
$\Pi' \parallel T$

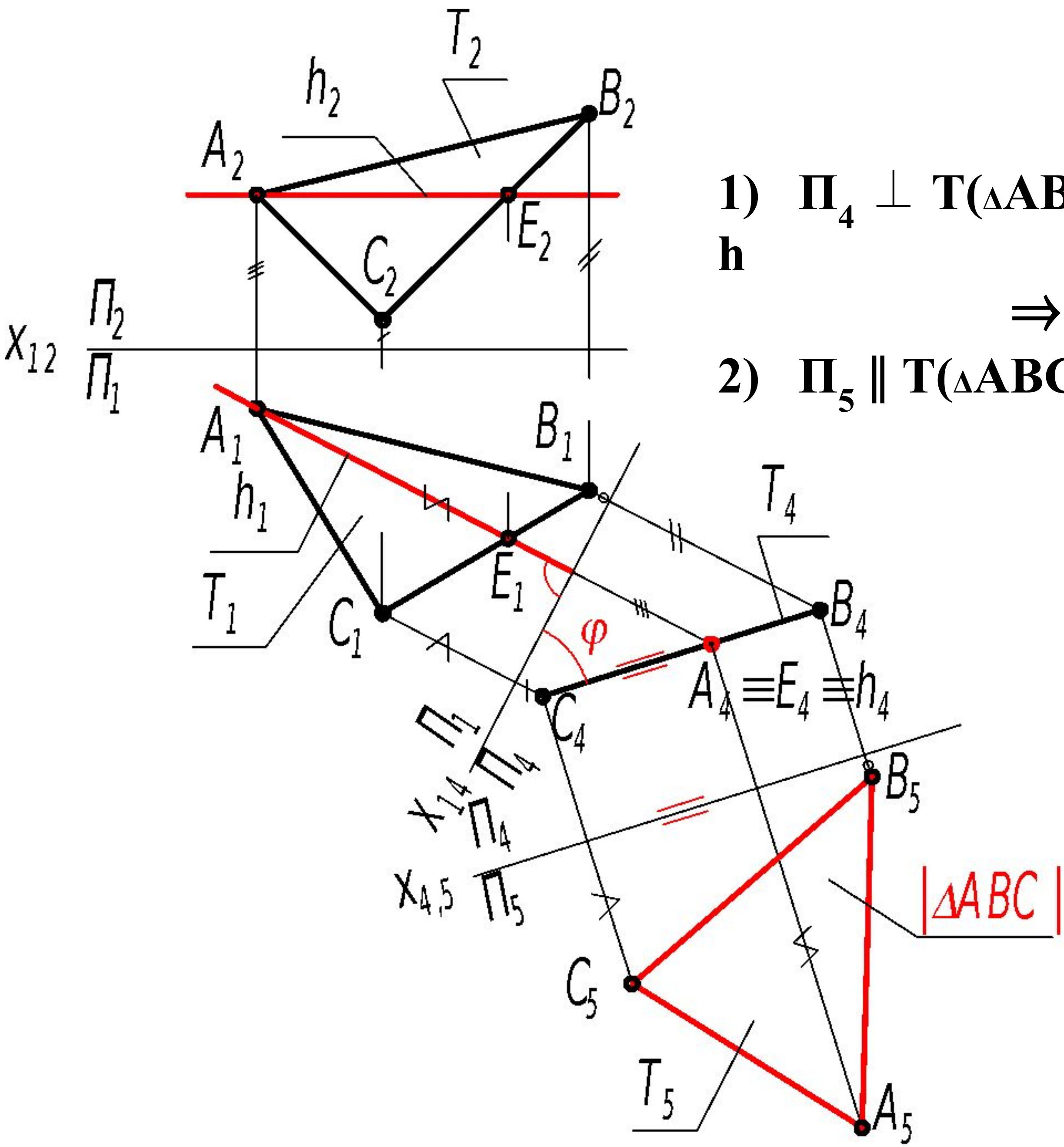
Так как плоскость T – плоскость общего положения, то и любая плоскость ей параллельная, в том числе и проекций Π', также будет плоскостью общего положения, т.е. $\Pi' \perp \Pi_1$ и $\Pi' \perp \Pi_2$, что противоречит способу замены плоскостей проекций. Следовательно, задача должна решаться в два этапа.

<u>1-й этап</u>. $\Pi_4 \perp T$ (базовая задача №3).

<u>2-й этап</u>. $\Pi_5 \parallel T$.

1). $\Pi_4 \perp T(_\Delta ABC)$, $\Pi_4 \perp \Pi_1 \Rightarrow \Pi_4 \perp h$
2). $\Pi_5 \parallel T(_\Delta ABC)$, $\Pi_5 \perp \Pi_4$



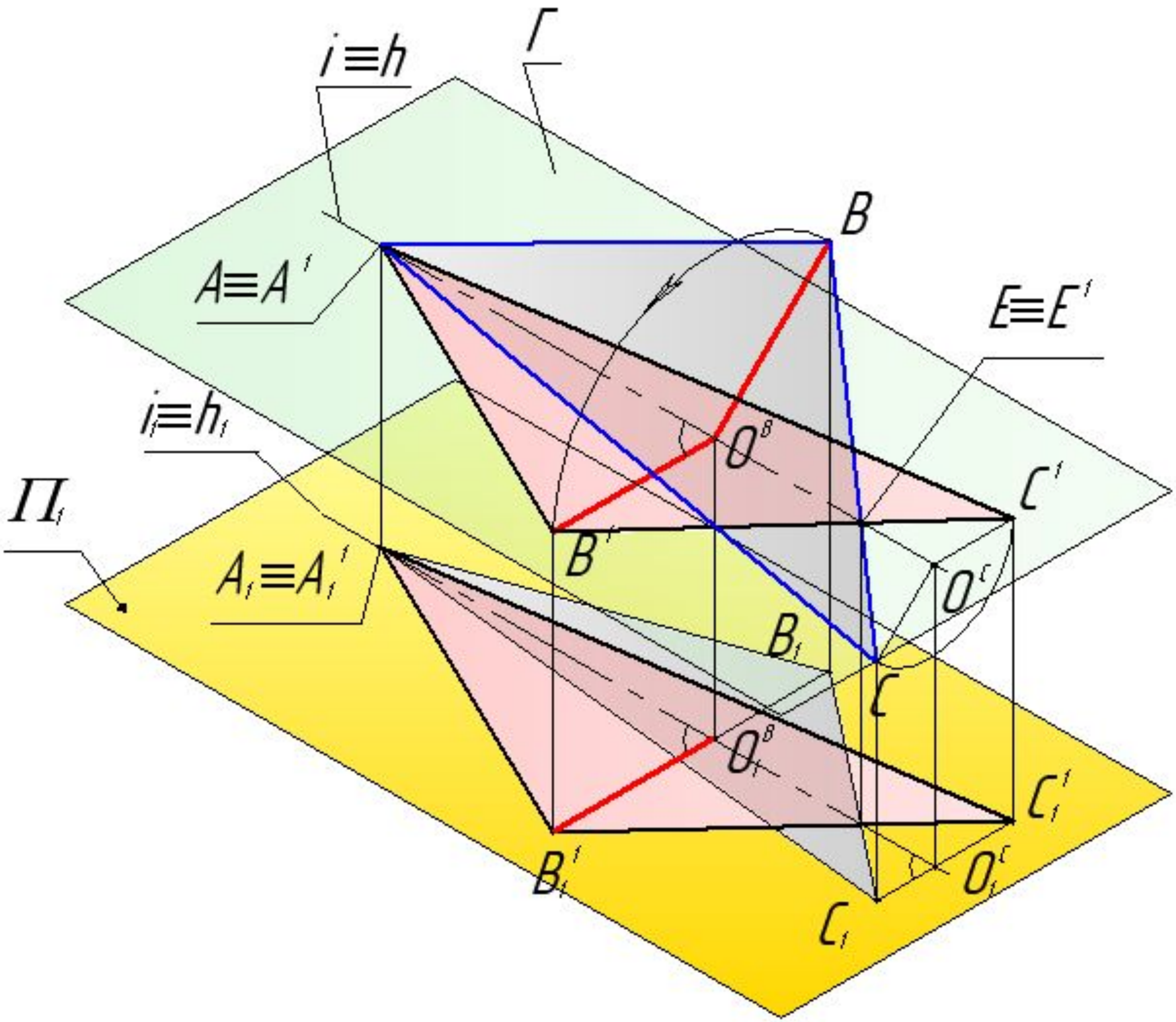


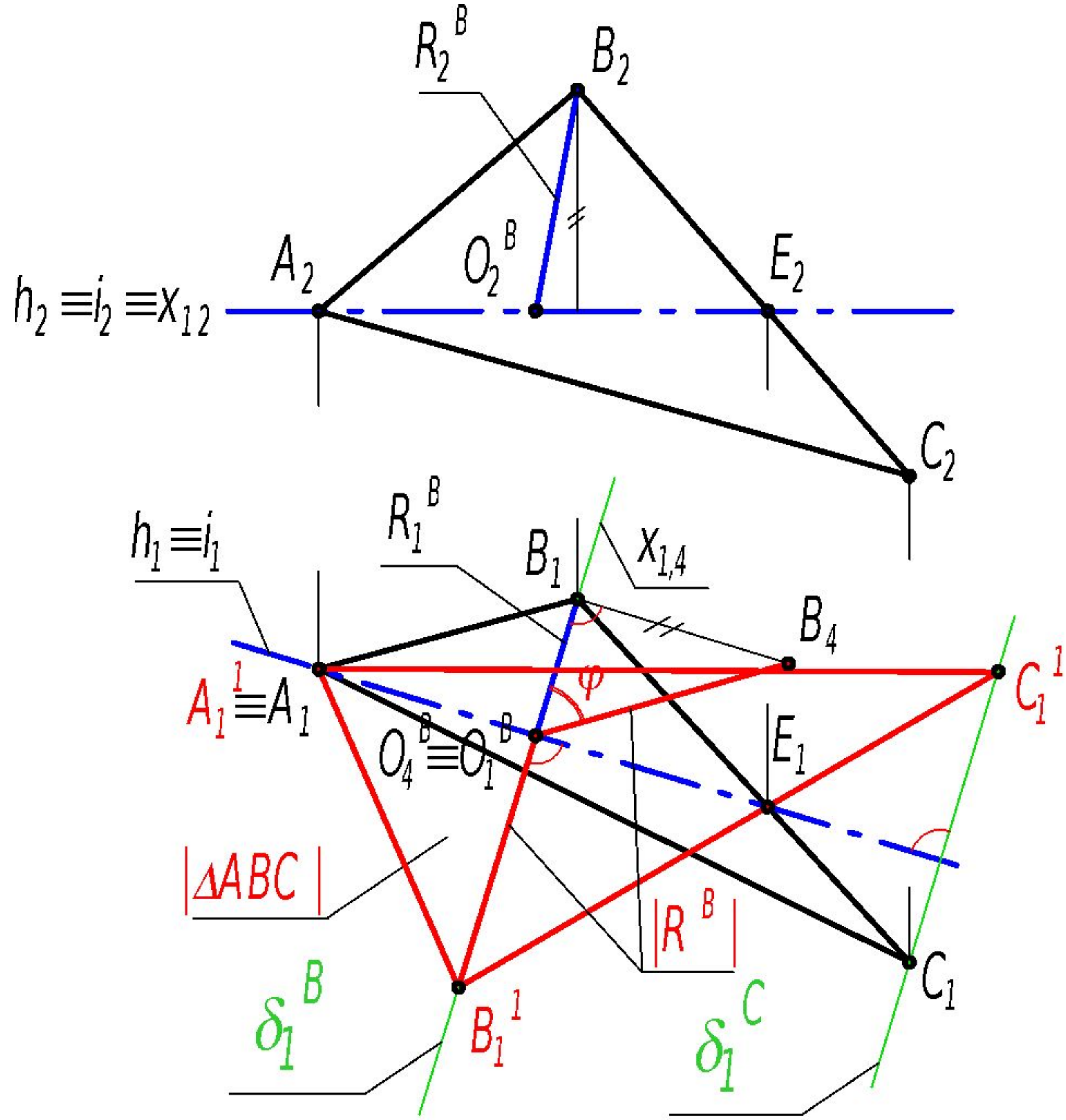
1) $\Pi_4 \perp T(\Delta ABC)$, $\Pi_4 \perp \Pi_1 \Rightarrow \Pi_4 \perp h$

$\Rightarrow x_{1,4} \perp h_1$

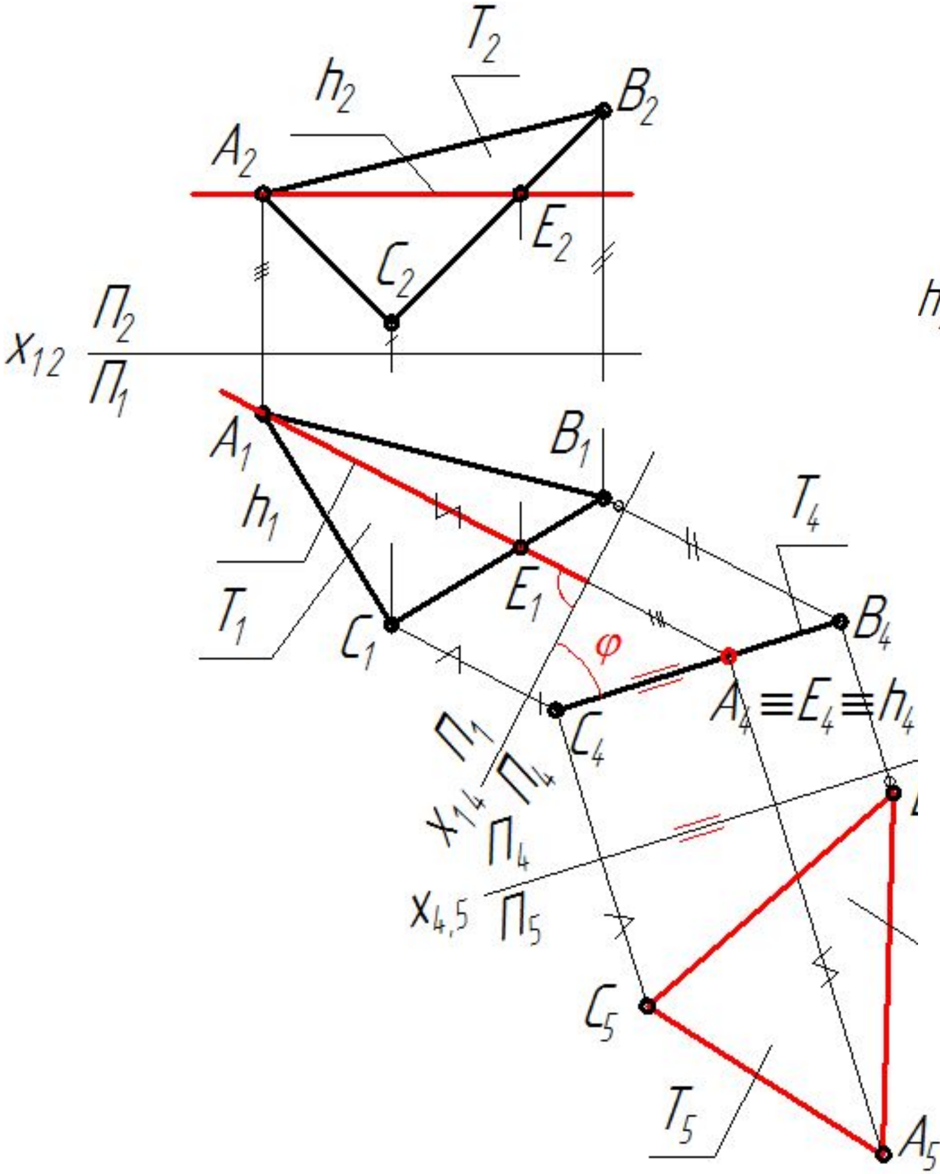
2) $\Pi_5 \parallel T(\Delta ABC)$, $\Pi_5 \perp \Pi_4 \Rightarrow x_{4,5} \parallel T_4$

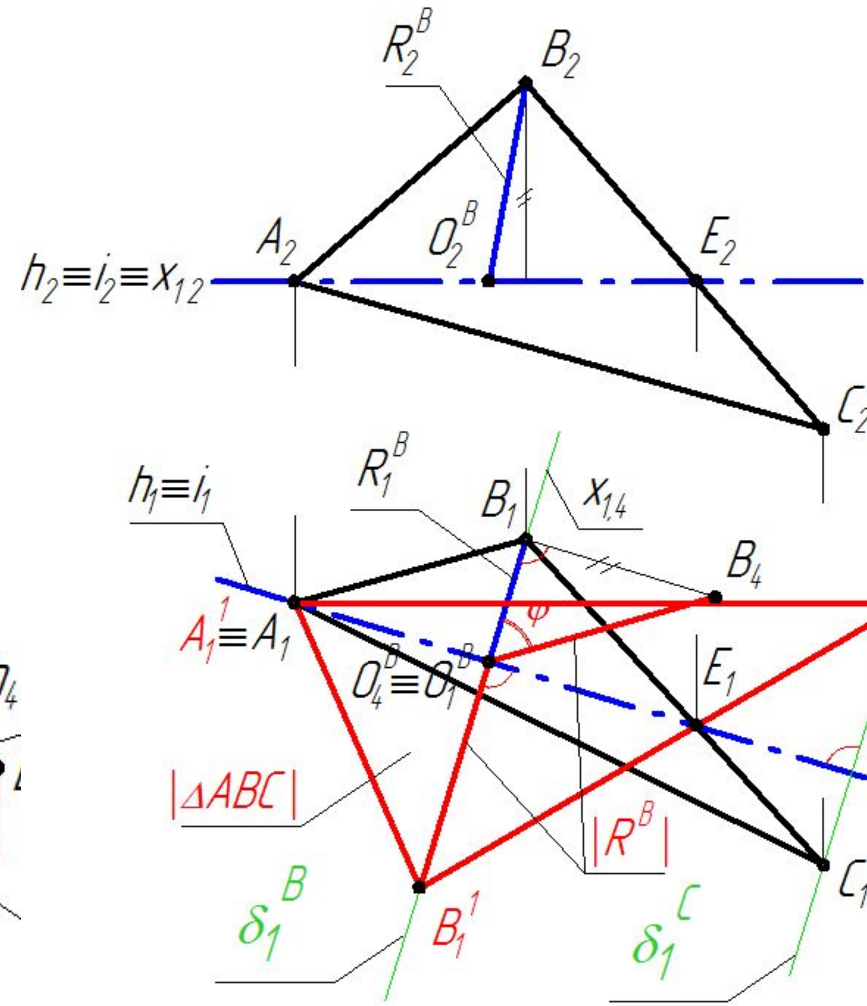
<u>Решение задачи способом вращения вокруг прямой уровня</u>


$i \equiv h$
Γ
B
$A \equiv A^1$
$E \equiv E^1$
$i_1 \equiv h_1$
O^B
C^1
Π_1
B^1
$A_1 \equiv A_1^1$
O^C
B_1
C
O_1^B
C_1^1
B_1^1
O_1^C
C_1



R_2^B
B_2
A_2
O_2^B
E_2
$h_2 \equiv i_2 \equiv x_{12}$
C_2
R_1^B
$h_1 \equiv i_1$
B_1
$x_{1,4}$
B_4
φ
$A_1^1 \equiv A_1$
C_1^1
$O_4^B \equiv O_1^B$
E_1
$|\Delta ABC|$
$|R^B|$
C_1
δ_1^B
B_1^1
δ_1^C


T2
h2
A2
B2
E2
C2
x12
Π2
Π1
A1
B1
h1
E1
T1
C1
φ
T4
B4
A4≡E4≡h4
C4
Π1
Π4
x1,4
Π4
x4,5
Π5
C5
T5
A5

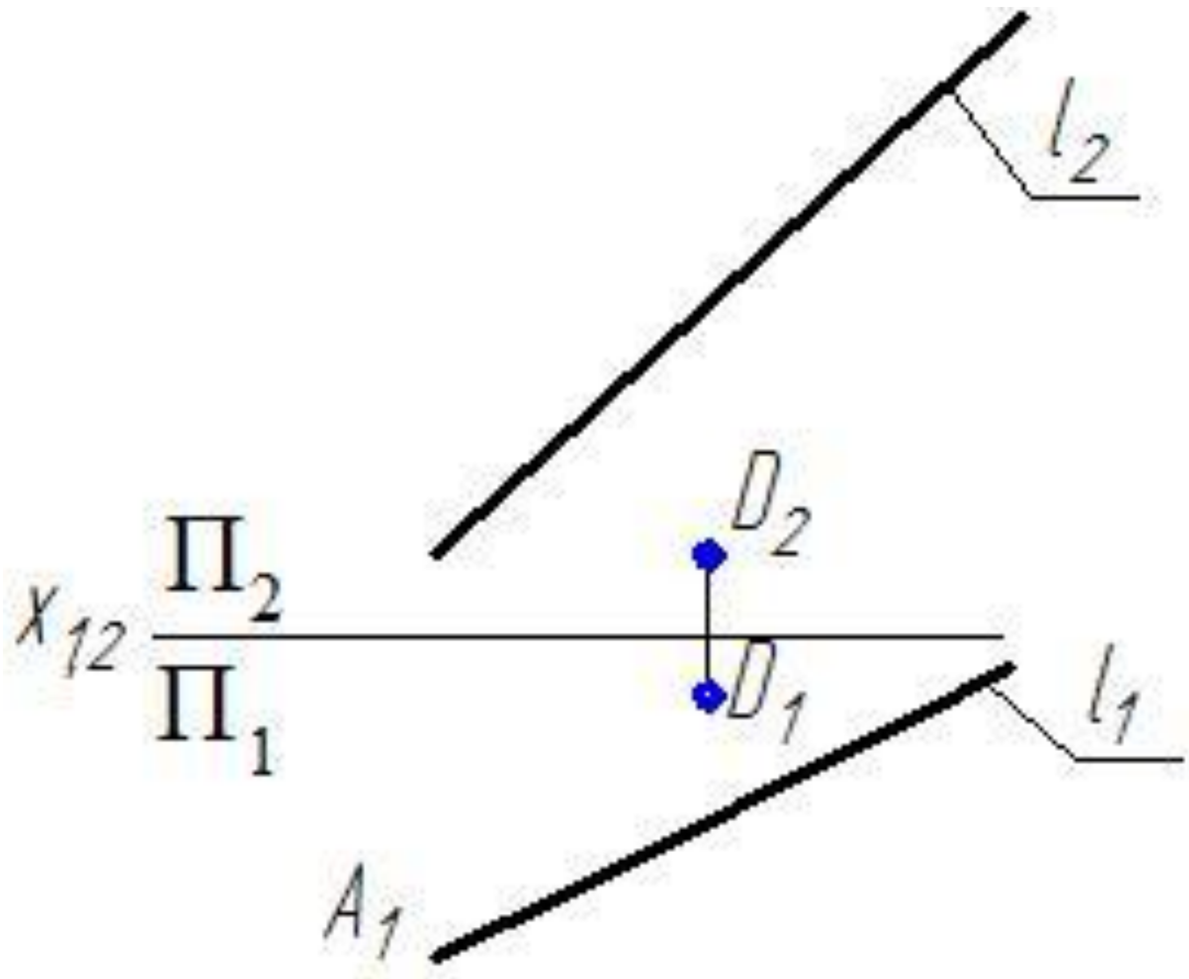

R2B
B2
A2
O2B
E2
h2≡i2≡x12
C2
R1B
h1≡i1
B1
x1,4
B4
A11≡A1
C11
φ
O4B≡O1B
E1
|ΔABC|
|RB|
C1
δ1B
B11
δ1C

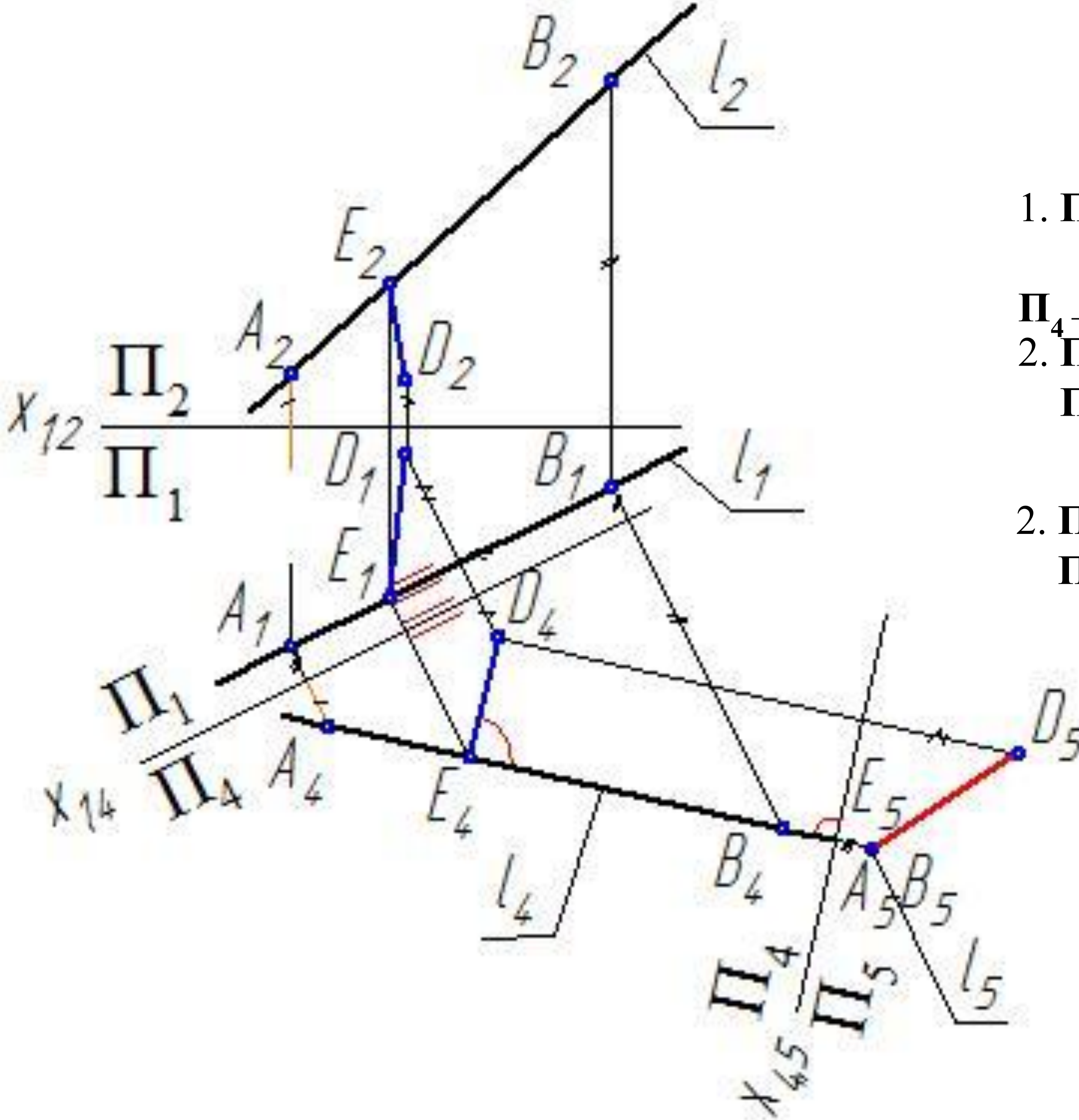
МЕТРИЧЕСКИЕ И КОНСТРУКТИВНЫЕ ЗАДАЧИ

- Метрическими называются задачи, в ходе решения которых определяется значение измеряемой величины – расстояния между двумя точками (длина отрезка), величины линейного угла или истинной формы и размеров плоской фигуры.
- Конструктивными называются задачи, в ходе решения которых создается геометрический объект по наперед заданным параметрам. В определенном смысле конструктивную задачу можно рассматривать как обратную метрической задаче.

Базовая задача	Метрическая задача
№1	Определение истинной величины расстояния между двумя точками (длины отрезка прямой). Определение истинной величины угла наклона прямой к плоскости проекций. Определение истинной величины расстояния между параллельными прямыми.
№2	Определение истинной величины расстояния от точки до прямой. Определение истинной величины расстояния между скрещивающимися прямыми. Определение истинной величины двугранного угла, если задана линия пересечения плоскостей.
№3	Определение истинной величины расстояния от точки до плоскости. Определение истинной величины расстояния между параллельными плоскостями. Определение истинной величины угла наклона плоскости к плоскости проекций.
№4	Определение истинной величины угла между пересекающимися прямыми или истинной величины плоской фигуры. Определение истинной величины угла между скрещивающимися прямыми. Определение истинной величины угла между прямой и плоскостью. Определение истинной величины угла между двумя плоскостями, если линия пересечения плоскостей не задана.

Расстояние от точки до прямой





1. $\Pi_4 \parallel l$ $\Rightarrow x_{14} \parallel l_1$

$\Pi_4 \perp \Pi_1$

2. $\Pi_5 \parallel DE$ $\Rightarrow x_{45} \parallel D_4E_4$

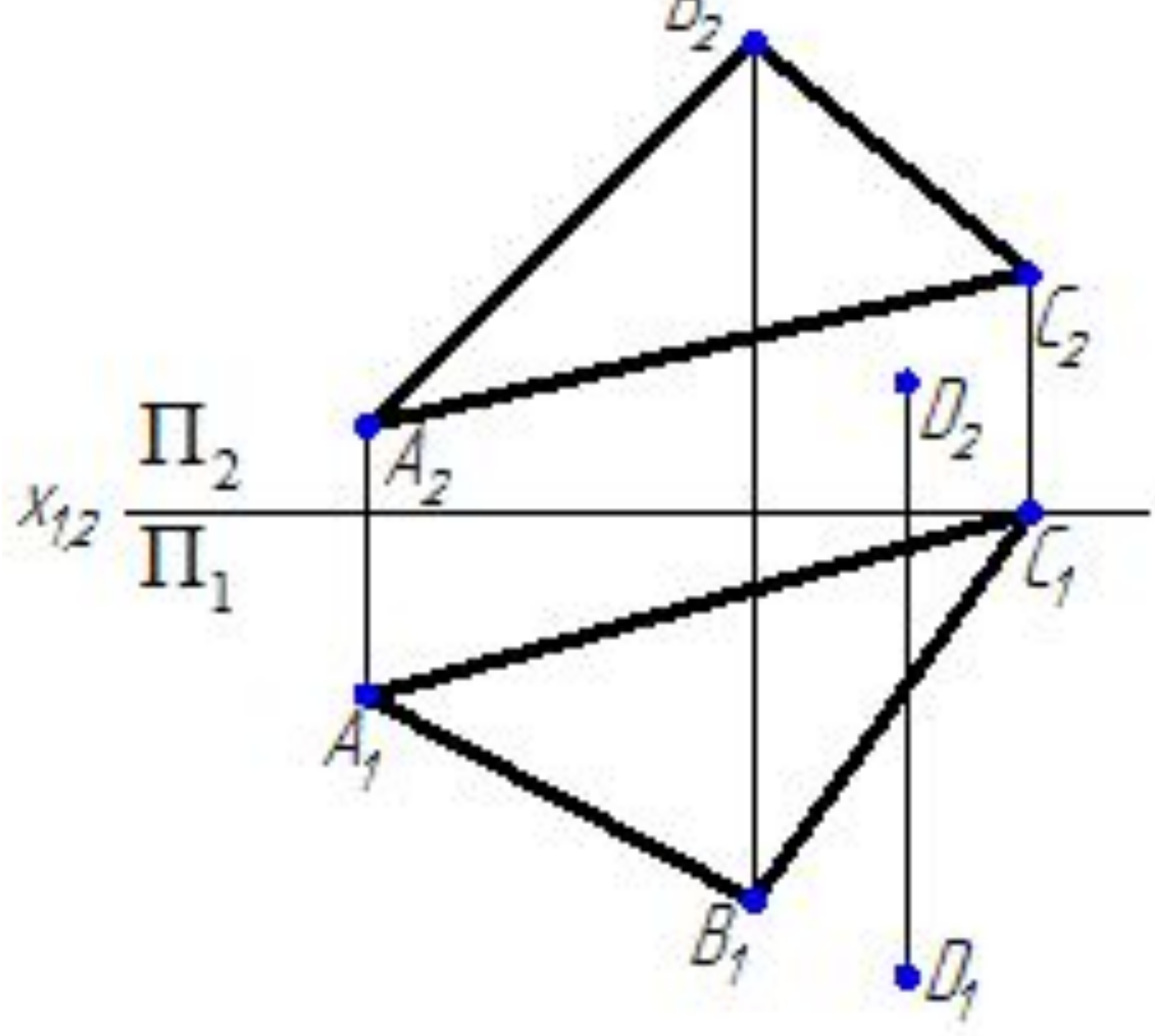
$\Pi_5 \perp \Pi_4$

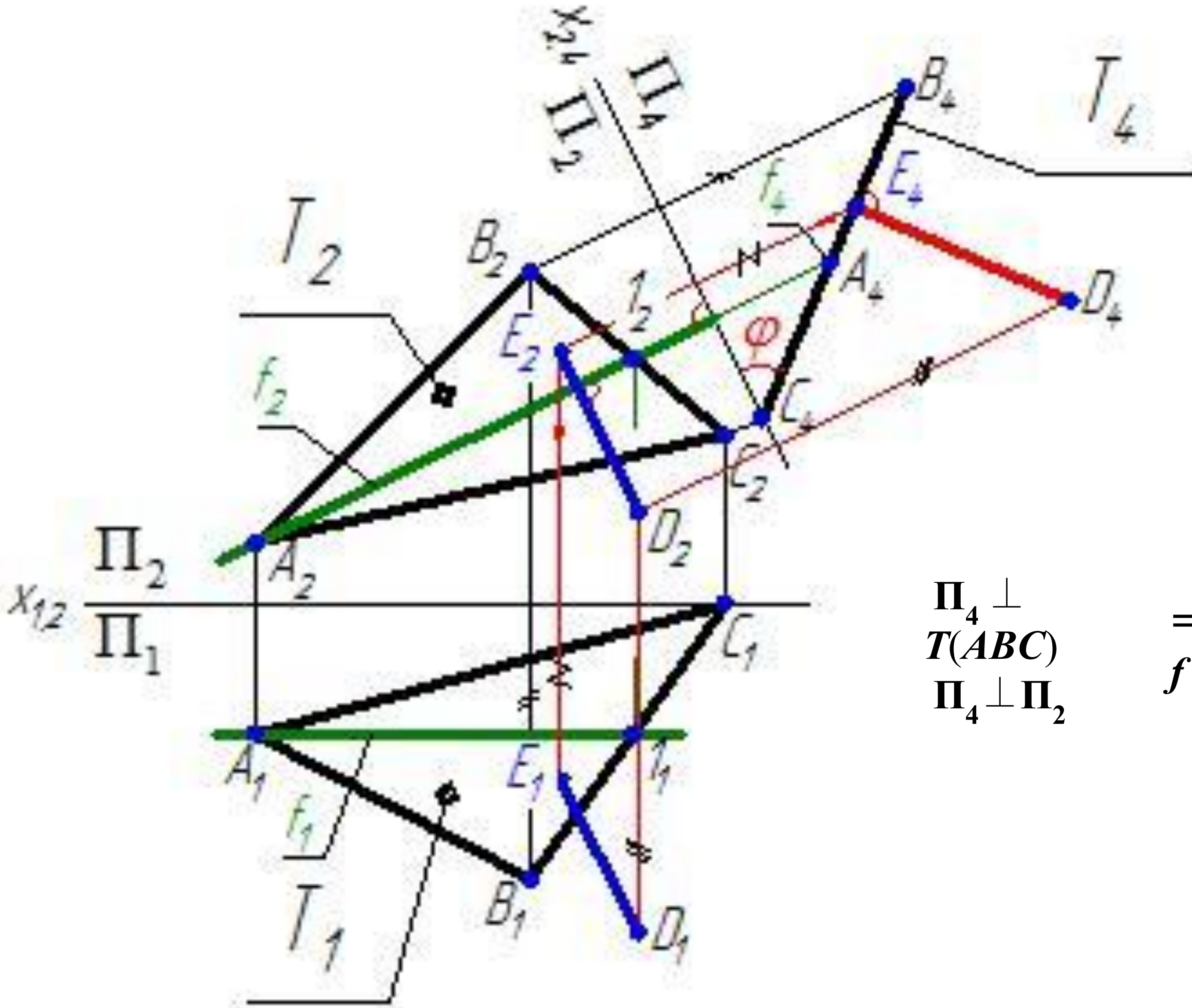
или

2. $\Pi_5 \perp l$ $\Rightarrow x_{45} \perp l_4$

$\Pi_5 \perp \Pi_4$

Расстояние от точки до плоскости





$\Pi_4 \perp T(ABC)$
$\Pi_4 \perp \Pi_2$
$\Rightarrow \Pi_4 \perp f$
$\Rightarrow x_{24} \perp f_2$

Угол между прямой и плоскостью

$\angle \varphi = l \wedge \alpha$

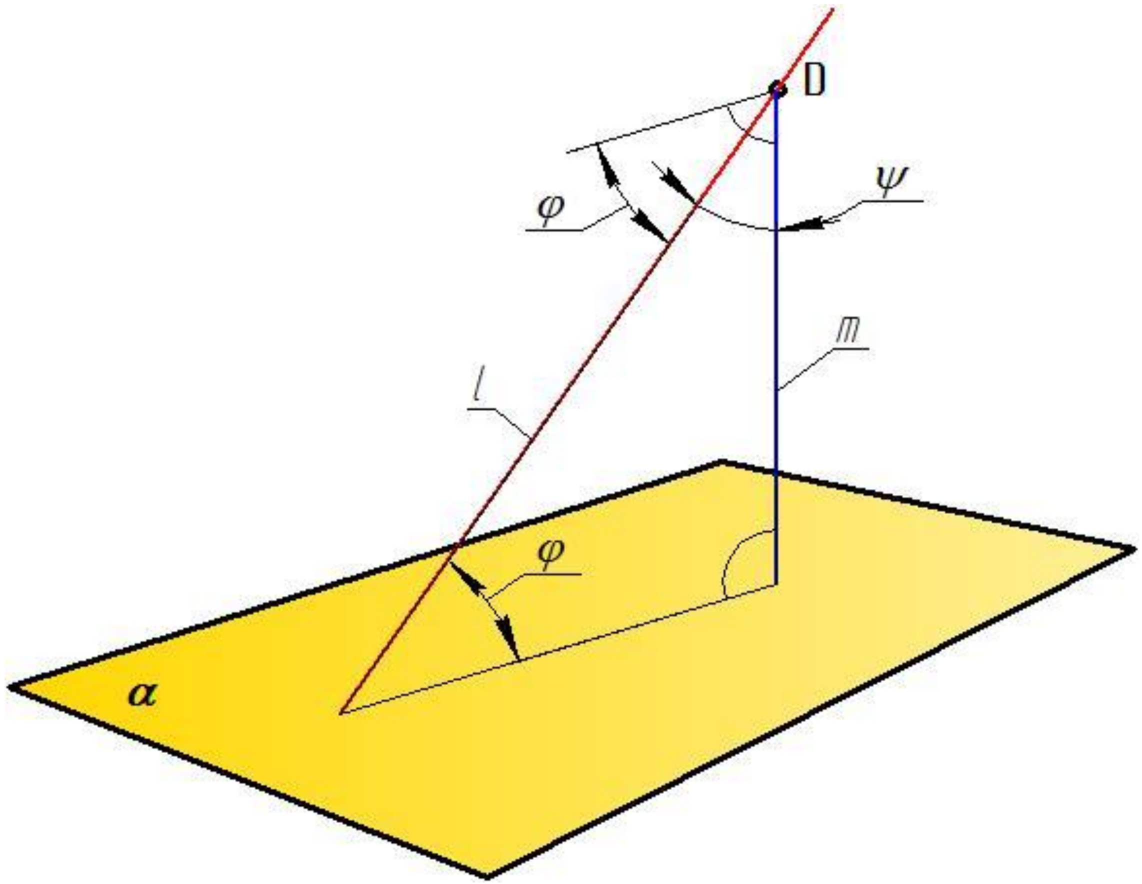
D – произвольная точка

$D \in l$

$m \perp \alpha$

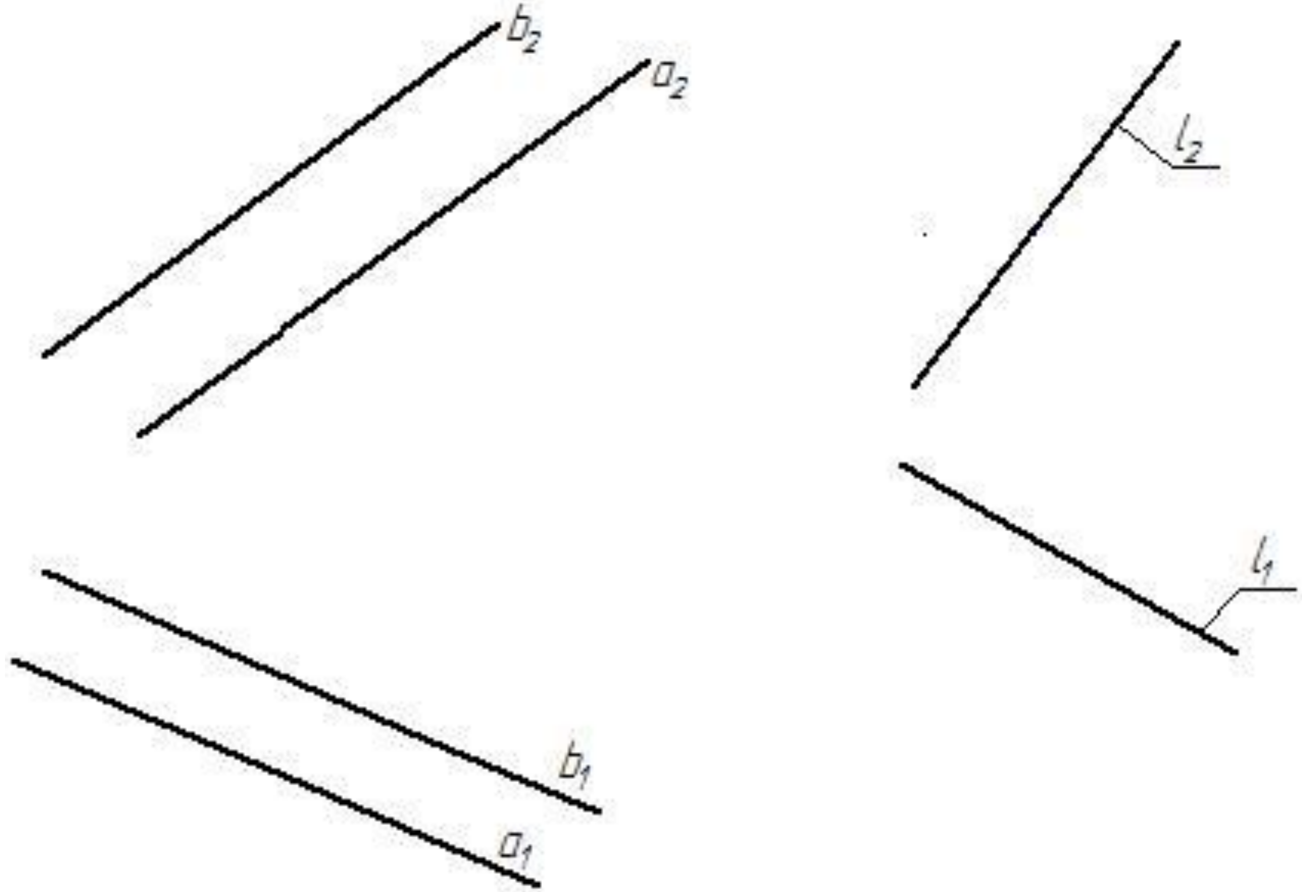
$\angle \psi = m \wedge l$

$\varphi = 90° - \psi$



Угол между прямой и плоскостью
Исходные данные

Заданы прямая $\boldsymbol{l}$ и плоскость $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

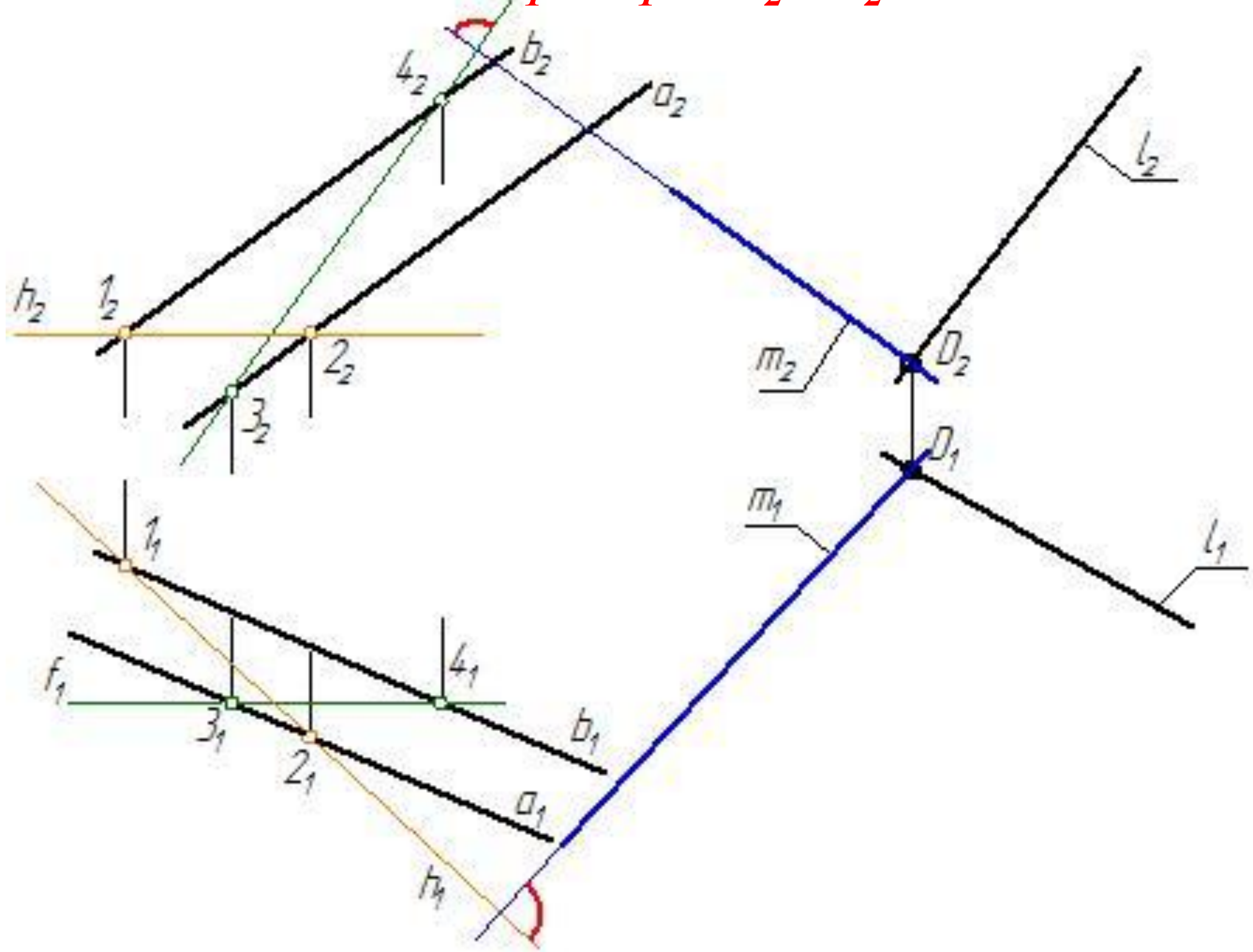


1. На прямой $\boldsymbol{l}$ выбирается произвольная точка $\boldsymbol{D}$.

2. Через точку $\boldsymbol{D}$ проводят перпендикуляр к заданной плоскости.

$\boldsymbol{m} \perp \boldsymbol{\alpha}$

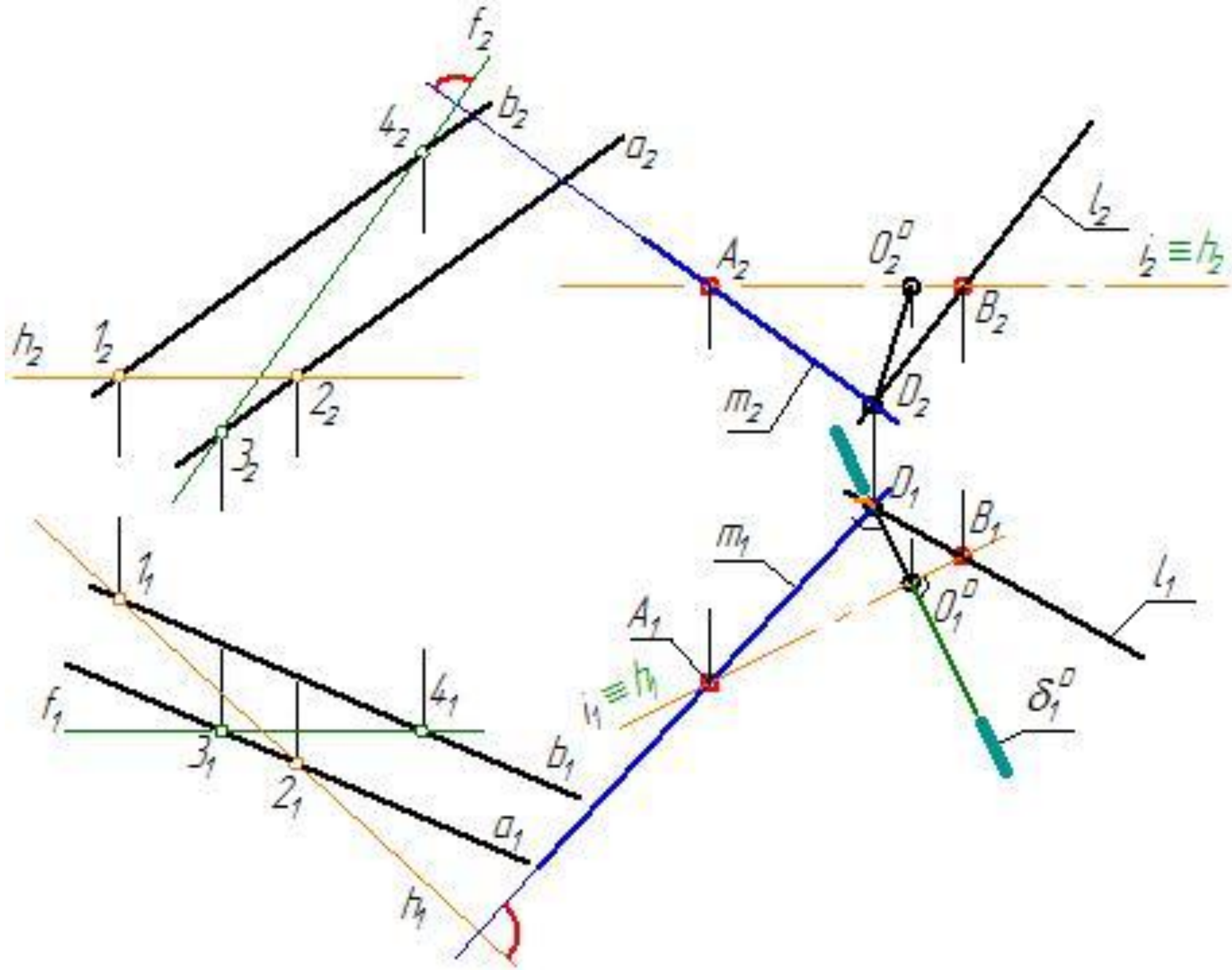
$(\, m_1 \perp h_1 \quad m_2 \perp f_2 \,)$



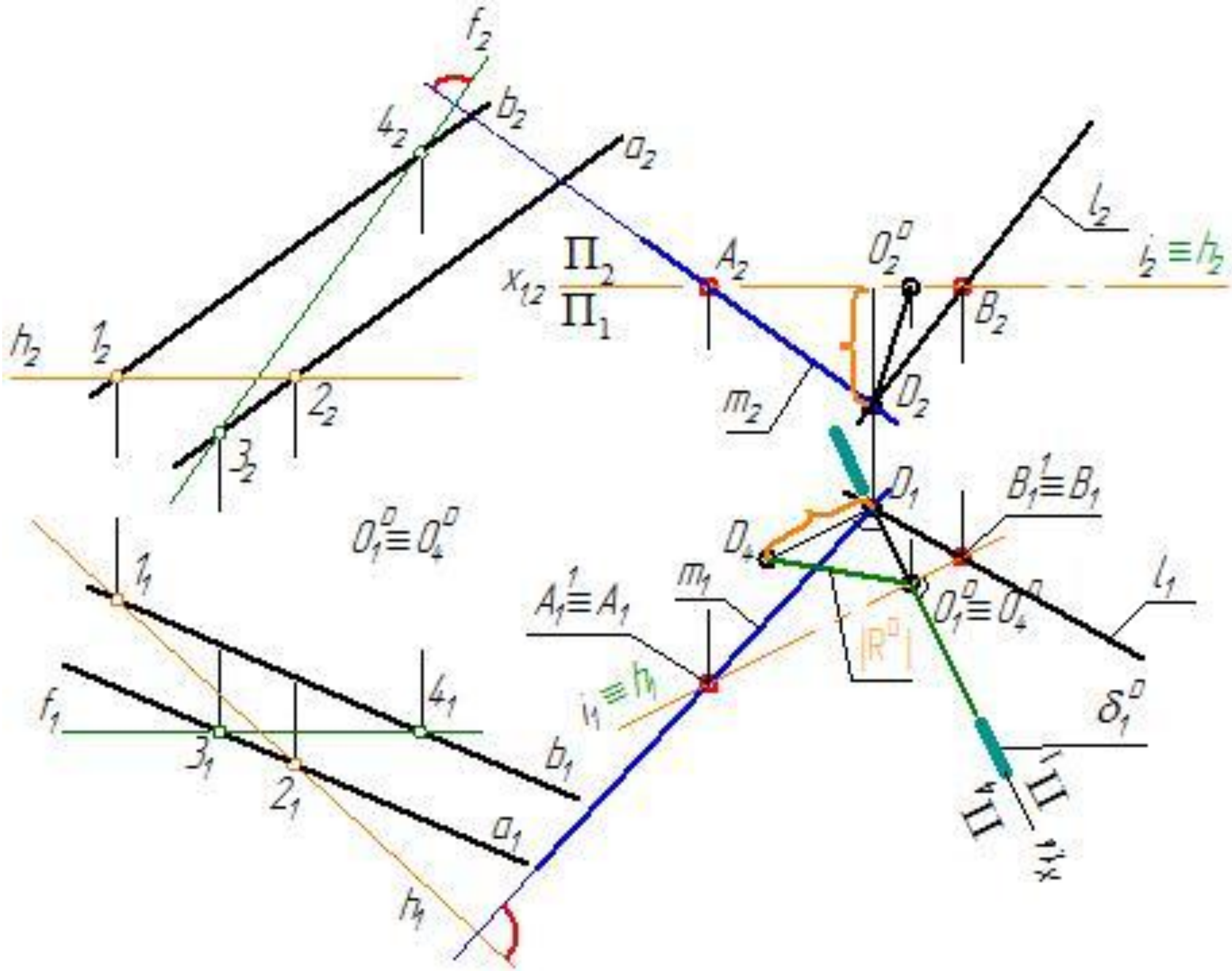
3. В плоскости, образованной прямыми m и l, проводят горизонталь (фронталь), которая является осью вращения ($h \equiv i$).

4. Задают плоскость вращения δ точки D вокруг оси i. $\delta_1 \perp i_1$

5. Отмечают центр вращения точки D – точку O.



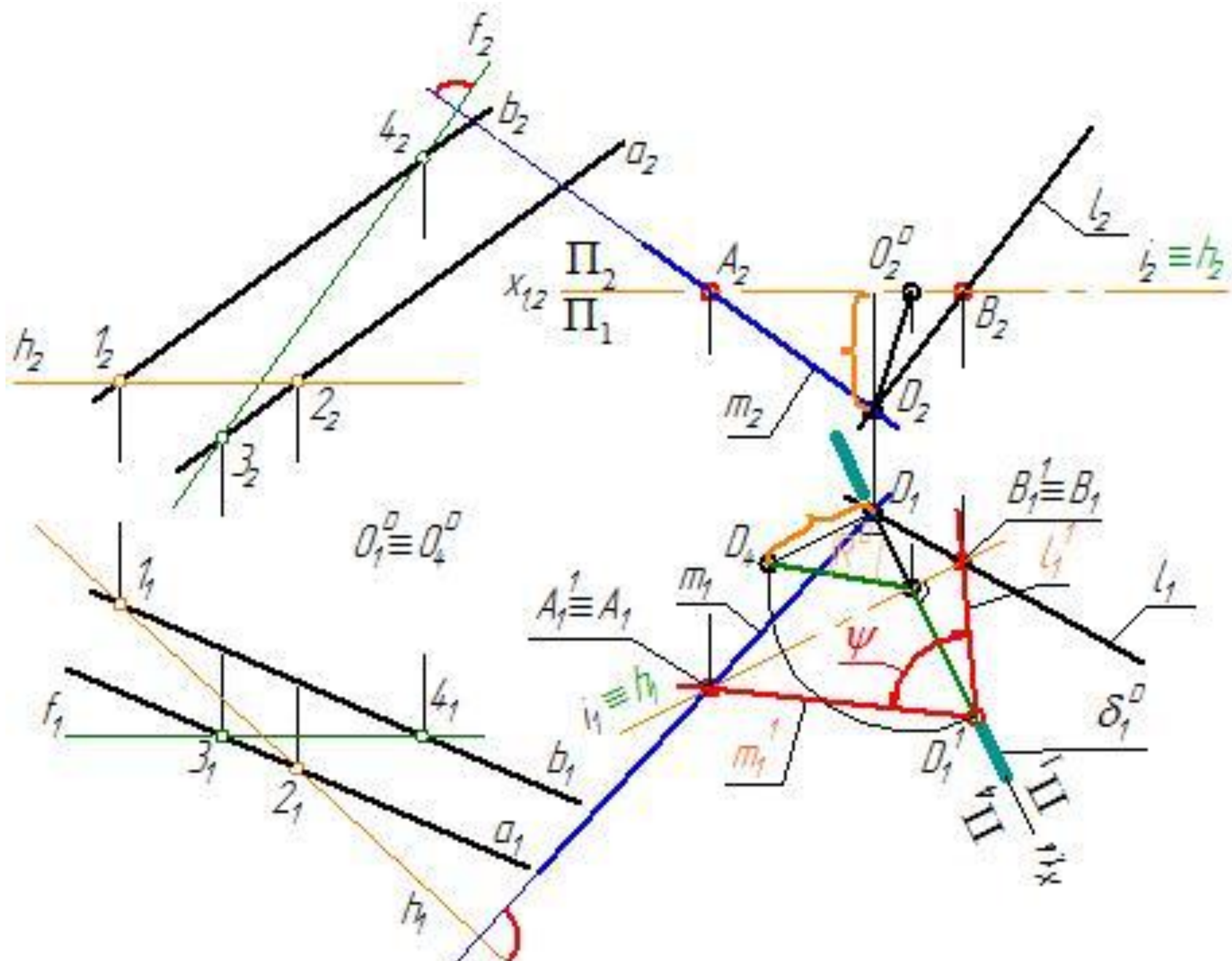
6. Способом замены плоскостей проекций определяют истинную величину радиуса вращения точки ***D*.**



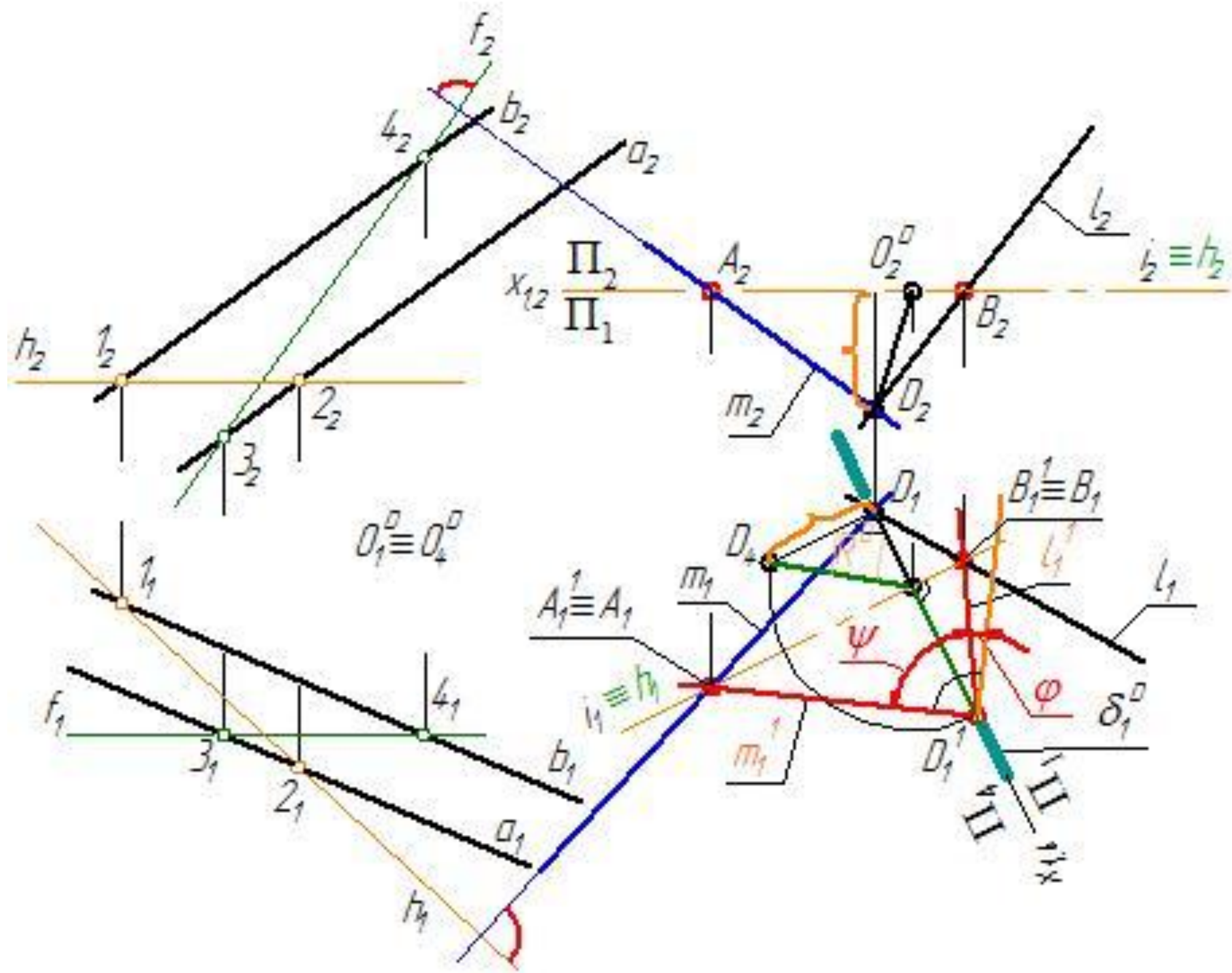
7. Выполняют поворот точки $\boldsymbol{D}$ до совмещения с плоскостью уровня, в которой расположена ось вращения.

8. Проводят новые проекции $\boldsymbol{m^1}$ и $\boldsymbol{l^1}$ прямых $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{l}$.

9. Отмечают угол $\boldsymbol{\psi}$, образованный прямыми $\boldsymbol{m^1}$ и $\boldsymbol{l^1}$.

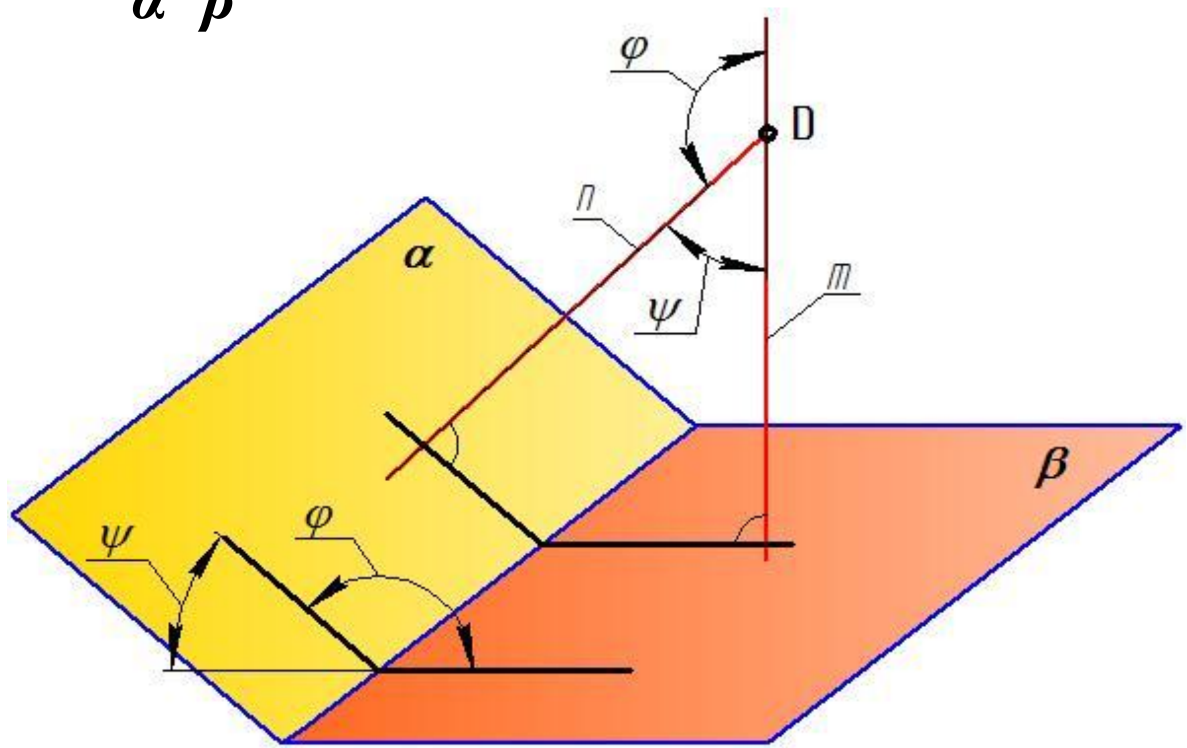


10. Достраивают угол $\boldsymbol{\psi}$ до прямого и отмечают угол $\boldsymbol{\varphi}$.



Угол между плоскостями

$\angle \varphi = \alpha \hat{} \beta$



$\psi = 180° - \varphi$

D – произвольная точка

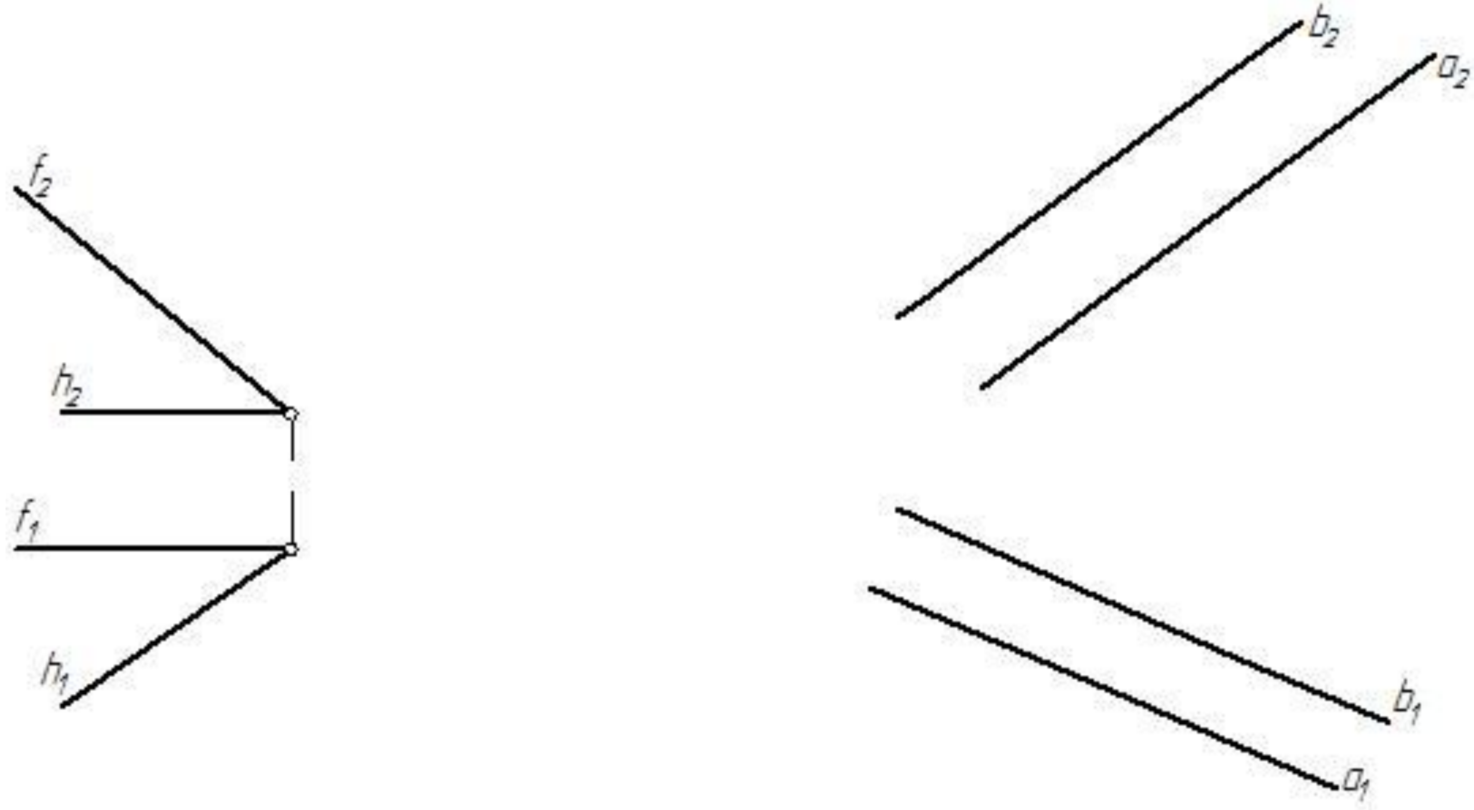
$n \perp \alpha$; $m \perp \beta$

$\angle \psi = m \hat{} n$

$\varphi = 180° - \psi$

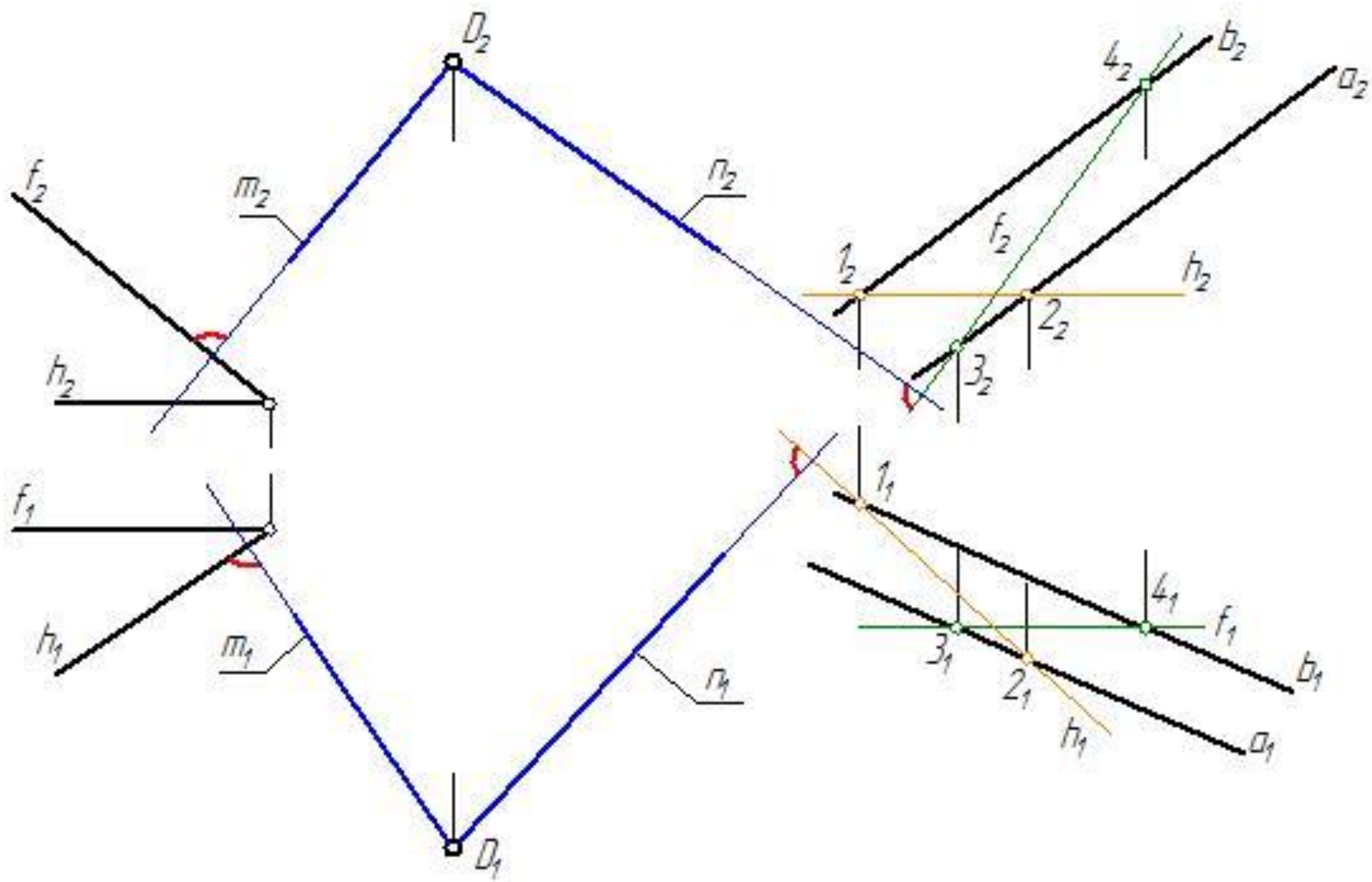
Угол между плоскостями
Исходные данные

Заданы плоскости $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{f})$ и $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$



1. Вводится произвольная точка D.
2. Через точку D проводят перпендикуляры к каждой из заданных плоскостей. $m \perp \alpha \quad n \perp \beta$

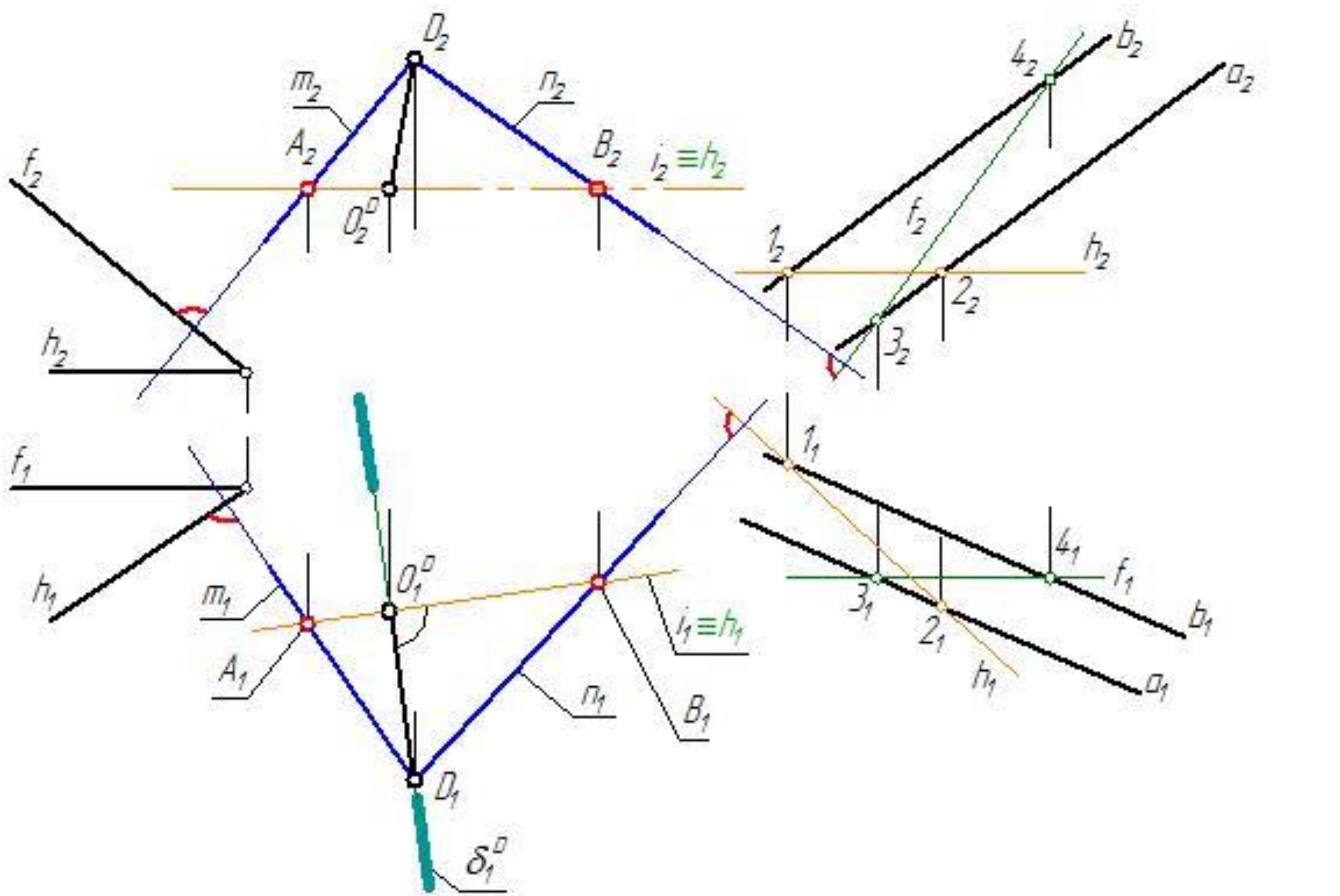
$(\, l_1 \perp h_1 \quad l_2 \perp f_2 \,)$



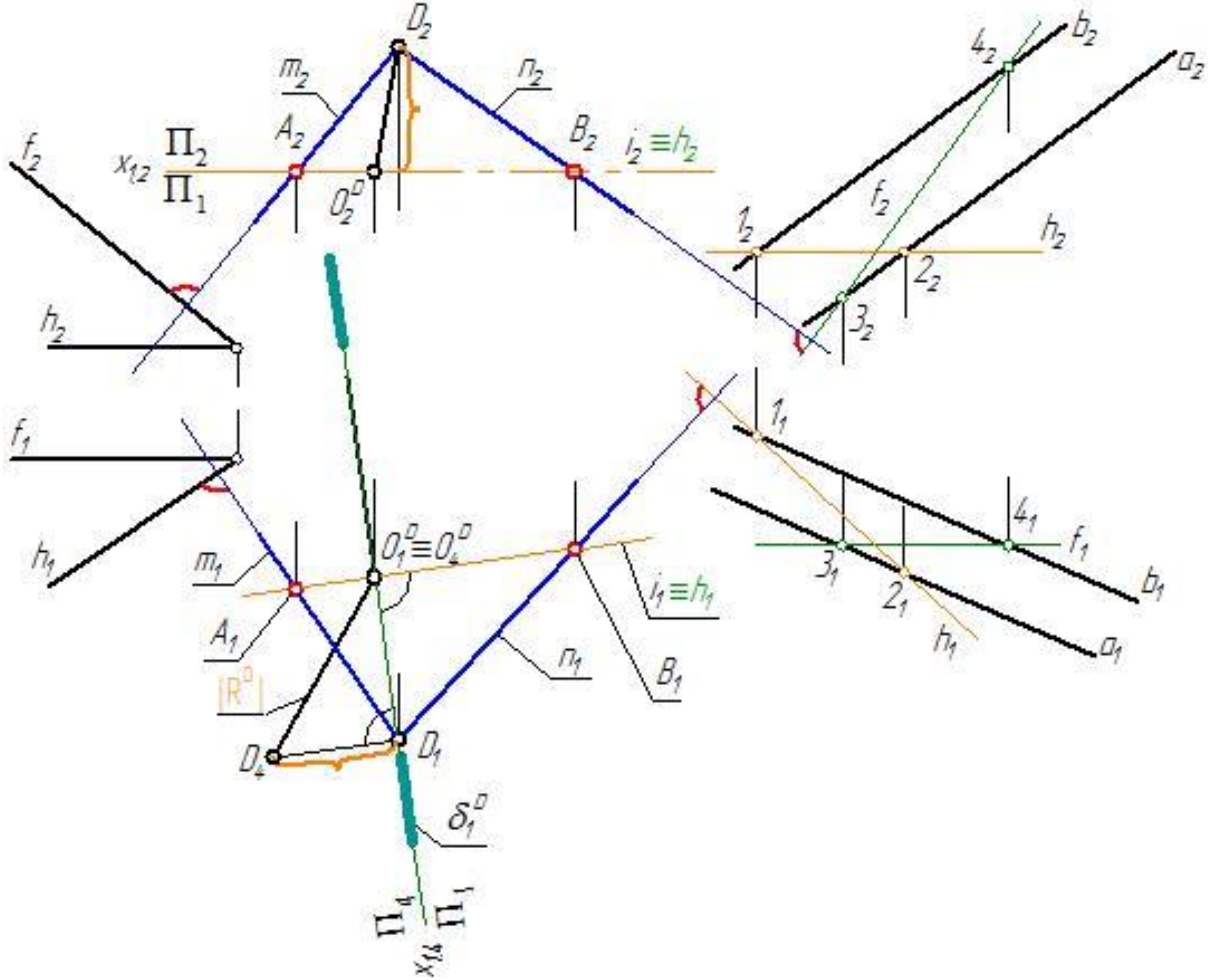
3. В плоскости, образованной прямыми ***m*** и ***n***, проводят горизонталь (фронталь), которая является осью вращения ($h \equiv i$).

4. Задают плоскость вращения δ точки ***D*** вокруг оси ***i***. $\delta_1 \perp i_1$

5. Отмечают центр вращения точки ***D*** – точку ***O***.



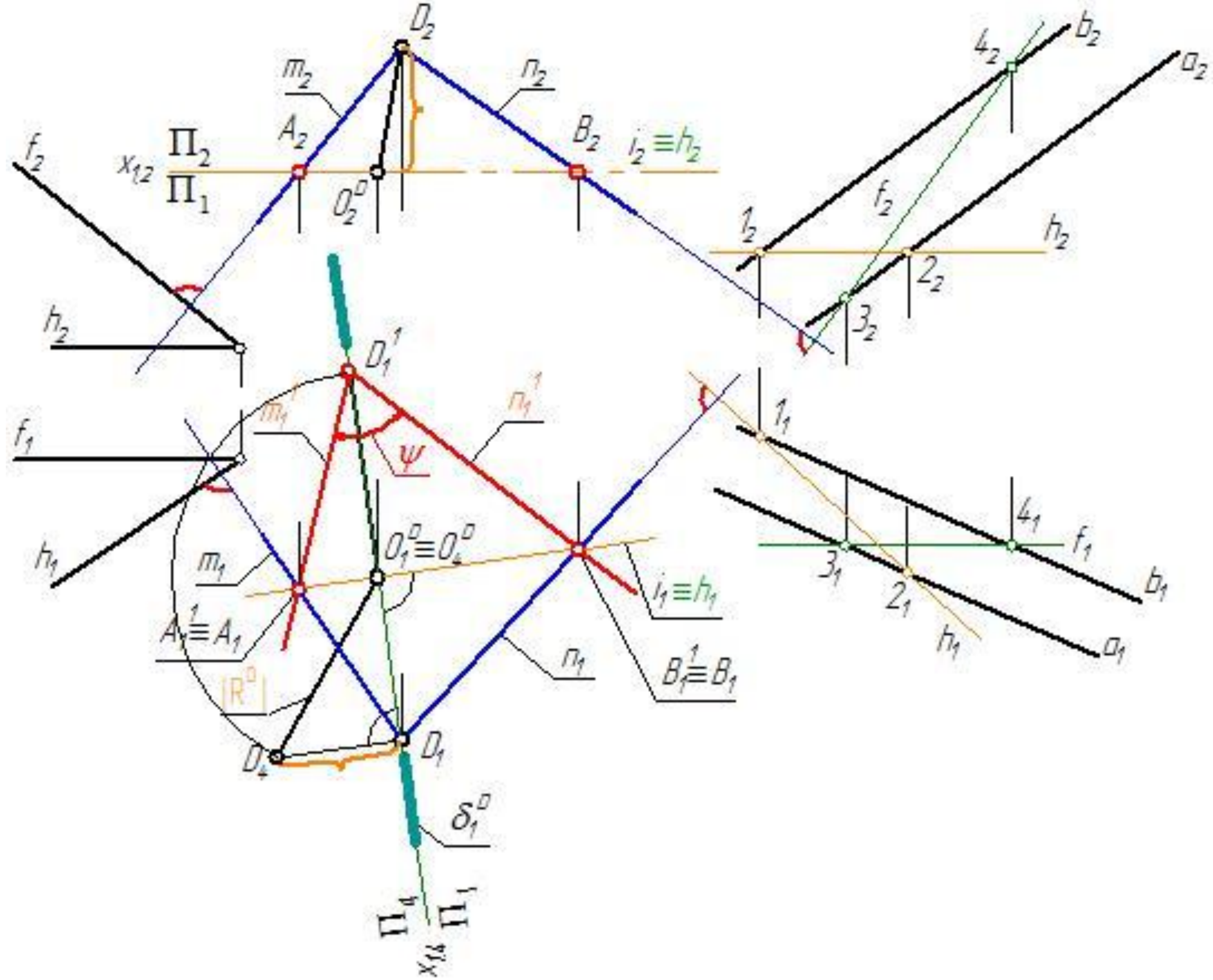
6. Способом замены плоскостей проекций определяют истинную величину радиуса вращения точки ***D*.**



7. Выполняют поворот точки ***D*** до совмещения с плоскостью уровня, в которой расположена ось вращения.

8. Проводят новые проекции $\boldsymbol{m^1}$ и $\boldsymbol{n^1}$ прямых $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$.

9. Отмечают угол $\boldsymbol{\psi}$, образованный прямыми $\boldsymbol{m^1}$ и $\boldsymbol{n^1}$.



10. Достраивают угол $\boldsymbol{\psi}$ до развернутого и отмечают угол $\boldsymbol{\varphi}$.