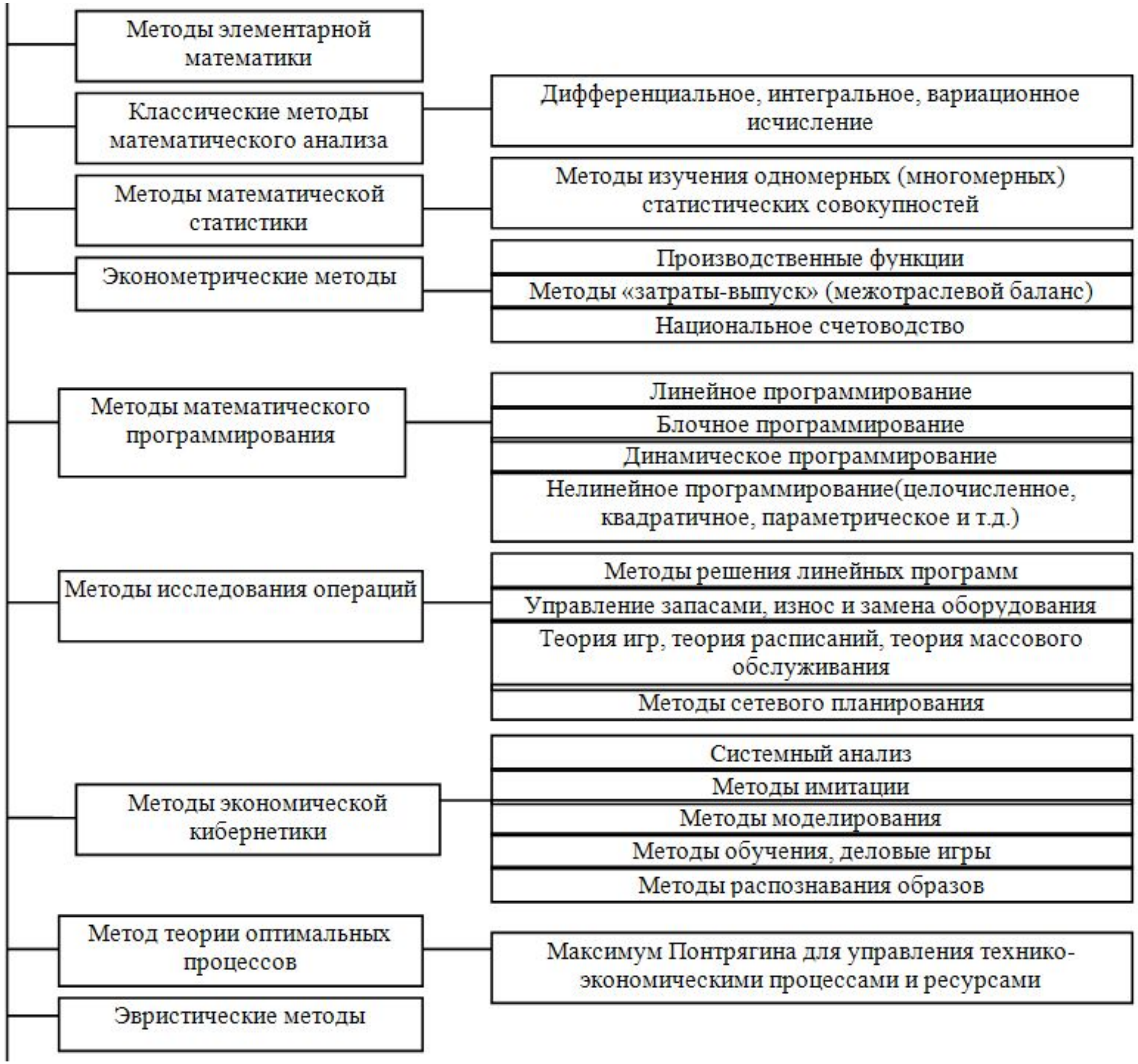
Классификация основных математических методов, применяемых в экономическом анализе



Динамические модели в экономике

- Макромодели экономического роста
- Микромодели равновесия
- Макромодели равновесия
- Модели глобальной динамики

Пример

Дано: одна отрасль производства – добыча нефти;
при добыче 10 тонн нефти в процессе производства расходуется 1 тонна нефти;
мы считаем, что 1/10 часть добытой нейти идет на внутренние нужды; Обозначим эту величину через α Итак, α=0,1; Пусть нам требуется добыть 10 тонн нефти.
Найти: Сколько всего тонн нефти придется выкачать из скважины, чтобы получить после вычетов на внутрипроизводственные нужды 10 тонн?

решение

При добыче 10 тонн будет израсходована 1 тонна, т.к. α=0,1
Для добычи 0,1 тонны нужно еще 0,01 тонны нефти и т.д.

10+1+0,1+0,01+…

И сумма геометрической прогрессии
10+1+0,1+0,01+0,001+…=11,111….=11,…
Обозначим через Y (конечный продукт),
через *X* - (валовой выпуск),
X_1 - (внутрипроизводственные затраты).
Введенные величины удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} x_1 = ax \\ x = x_1 + y \end{cases}$$

Валовой выпуск = внутрипроизводственные затраты + конечный продукт

$$x = ax + y.$$

Решая это уравнение, получим:

$$x = \frac{y}{1-a}$$

или

$$x = (1-a)^{-1} y$$

Подставим числовые данные: $$x = \frac{y}{1-a} = \frac{10}{1-0{,}1} = \frac{10}{0{,}9} = \frac{100}{9} = 11{,}11\ldots$$

Величина α=0,1 - коэффициент прямых затрат продукции,

ax показывает долю продукции, которая идет на нужды производства.

<u>Ответ:</u> для того чтобы иметь возможность продать 10 тонн нефти, требуется добыть ≈11,11.. тонны.

<u>Размышления и выводы по задаче:</u>

можно использовать формулу

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots = \frac{1}{1-a} = (1-a)^{-1}$$

$$x = y + ay + a^2 y + a^3 y + \ldots$$

Величина - коэффициент полных внутрипроизводственных затрат $b = (1-a)^{-1}$

<u>Отметим свойства:</u>

$$1 > a > 0$$ и $$b > 1.$$

Классические модели

- *Модели по В. Леонтьеву*

Тип моделей: «затраты – выпуск»

система в параметрах «вход»-«выход»

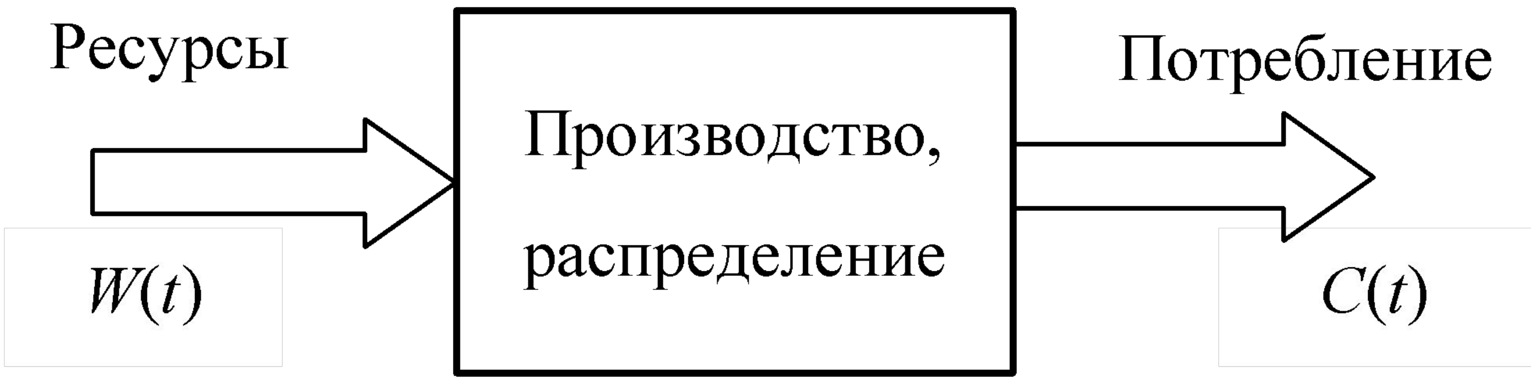
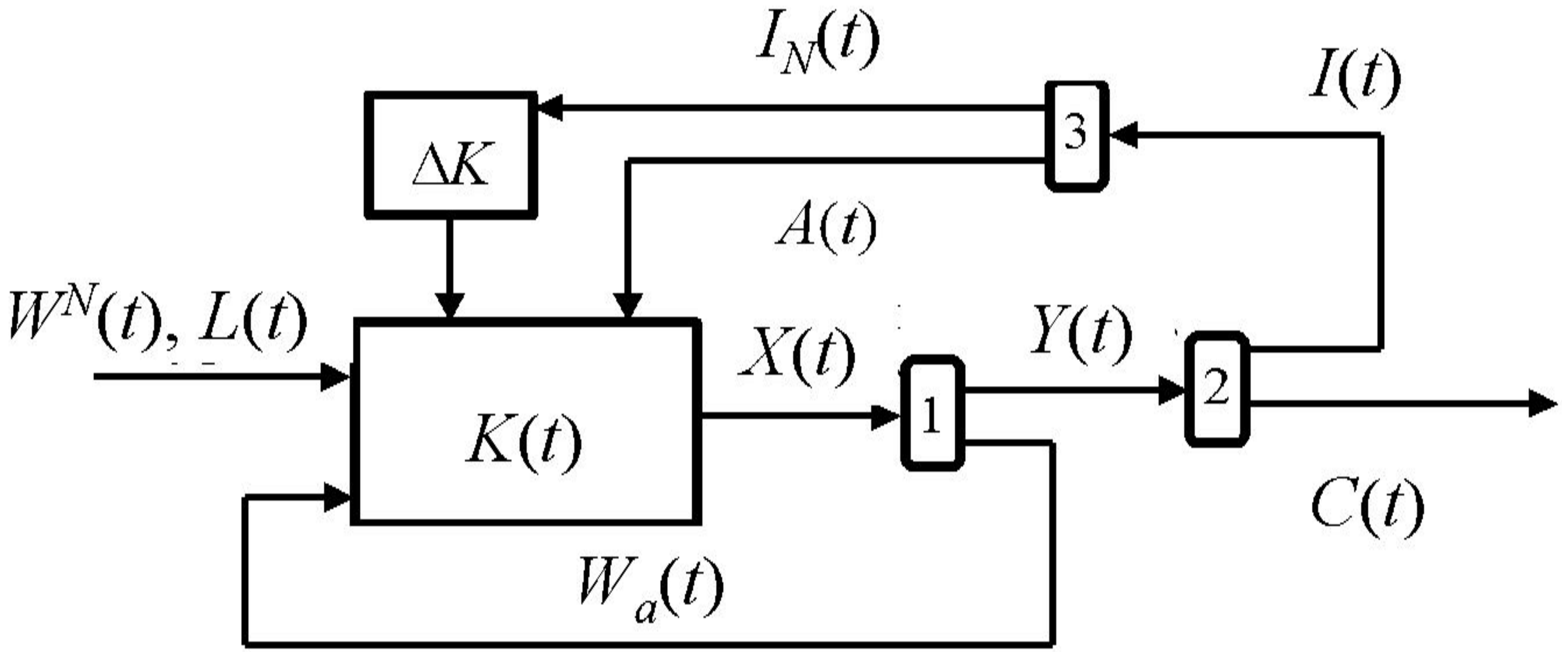


Схема потоков производства и распределения продукта



$X(t) = I(t) + C(t) + W_a(t)$ (1)

Одноотраслевые соотношения баланса

Одноотраслевые уравнения динамики

$I(t)dt = d\,K(t) + A(t)dt$ (2)

$$\frac{dK(t)}{dt} = X(t) - A(t) - C(t) - W_a(t) \qquad (3)$$

$$\frac{dK(t)}{dt} = -\mu K(t) + (1-a)X(t) - C(t) \qquad (4)$$

Открытая одноотраслевая модель Леонтьева

- Гипотеза Леонтьева: амортизационные расходы отсутствуют, а инвестиции за некоторый период времени вызывают пропорциональный прирост в валовом продукте:
- $dX(t) = 1/\eta \ I(t)dt$

Открытая одноотраслевая модель Леонтьева

$A(t)$=0 и $W_a(t) = aX(t)$

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{1}{\eta}\left[(1-a)X(t) - C(t)\right] \qquad (5)$$

Замкнутая одноотраслевая модель Леонтьева

$$C(t)=\gamma L(t)$$

$$L(t)=b X(t)$$

$$\frac{dX(t)}{dt}=\frac{1-a-b\gamma}{\eta}X(t)$$

$$X(t)=X_0e^{pt},\ \text{где}$$

$$p=\frac{1-a-b\gamma}{\eta},\ X_0=X(0)\quad .$$

Нестационарные модели Леонтьева

$\gamma = \gamma(t), \quad \eta = \eta(t), \quad a = a(t), \quad b = b(t)$

$$y = C_0 e^{\int_0^t p(t)dt}.$$

Динамические балансовые модели

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$C_t + I_t = Y_{t+1} \qquad (6)$$

Модель Кейнса

$$C_t = C_A + cY_t, \; 0 < c < 1 \qquad (7)$$

$$Y_{t+1} - cY_t = C_A + I_t$$

$$\frac{1}{1-c}\frac{dY}{dt} + Y = \frac{C_A + I}{1-c}$$

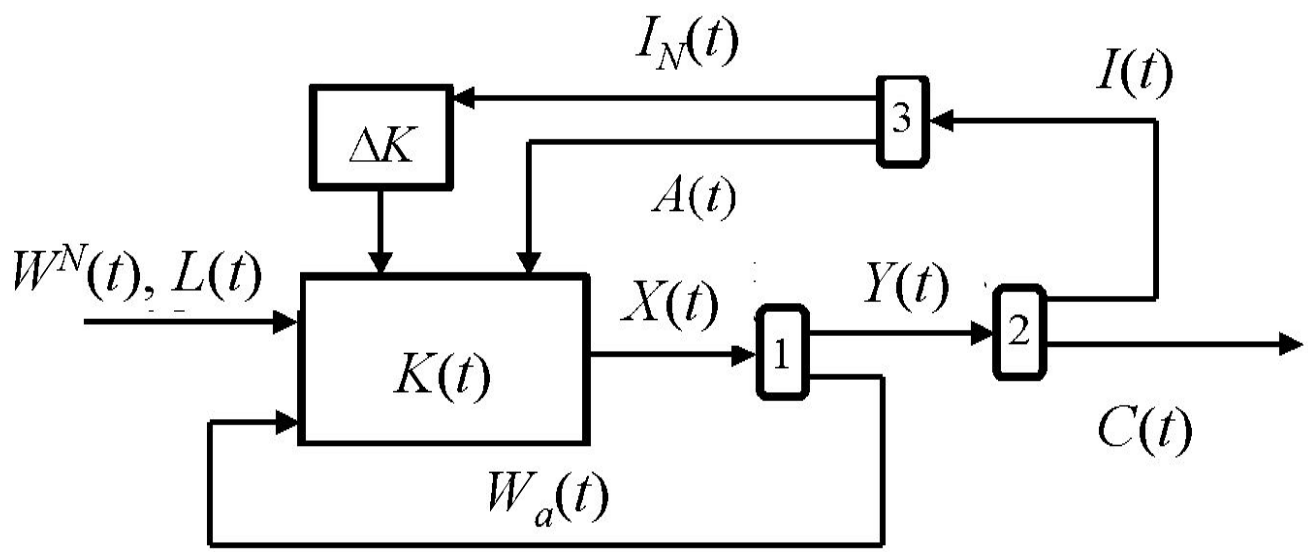
Модель Самуельсона-Хикса

$$I_t = I_A + r(Y_t - Y_{t-1})$$

$$Y_{t+1} - 2Y_t + Y_{t-1} = C_A + I_A - (1-c)Y_t - (1-r)(Y_t - Y_{t-1})$$

$$\frac{1}{1-c}\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{1-r}{1-c}\frac{dY}{dt} + Y = \frac{C_A + I_A}{1-c}$$

Моделирование запаздывания в освоении капиталовложений



$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + V \qquad (8)$$

$$V(t) = I(t - \tau) \qquad (9)$$

$$V(t) = \int_{-\infty}^{t} N(t,\tau) I(\tau) d\tau \qquad (10)$$

$$V(t) = \int\limits_0^\infty I(t-\theta)N(\theta)d\theta \quad (11)$$

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + V$$

$N(\theta)$

1) $$\int\limits_0^\infty N(\theta)d\theta = 1$$

2) N(θ) - монотонно убывает с ростом θ

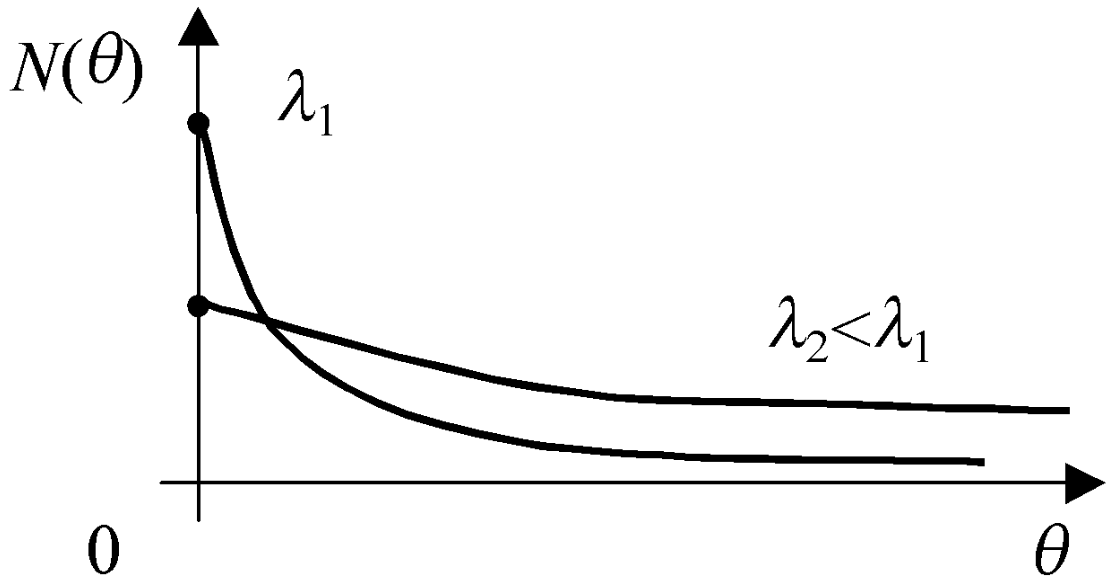
$$\dot{V}(t) = \int\limits_0^\infty \frac{\partial I(t-\theta)}{\partial t} N(\theta)d\theta$$

$$\frac{\partial I(t-\theta)}{\partial t} = -\frac{\partial I(t-\theta)}{\partial \theta t}$$

$$\lim_{\theta \to \infty} N(\theta) = 0$$

$$N(t) = N(0)I(t) + \int_0^{\infty} I(t-\theta)\, N(\theta)\, d\theta \quad (12)$$

$$N(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta} \quad (13)$$



Доля освоенных инвестиций: экспоненциальные функции

$$\dot{V}(t) = \lambda I(t) - \lambda \int_0^{\infty} I(t-\theta) N(\theta) d\theta$$

$$\dot{V}(t) = -\lambda V(t) + \lambda I(t)$$

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = -\mu K(t) + V(t) \\ \dot{V}(t) = -\lambda V(t) + \lambda I(t) \end{cases} \qquad (14)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$, где

$$x(t) = \begin{bmatrix} V(t) \\ K(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = I(t), \quad A = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\mu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

Модель Леонтьева с запаздыванием

$$X(t) = f\,K(t),$$

$$X(t)=W_a(t)+Y(t)$$

$$\mathrm{Y(t)=C(t)+I(t)}$$

$$\mathrm{Wa(t)=aX(t)}$$

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = -\mu K(t) + V(t) \\ \dot{V}(t) = -\lambda V(t) + \lambda(1-a)\,fK(t) - C(t) \end{cases}$$

$C(t)=uX(t)$ $0<u<1$

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = -\mu K(t) + V(t) \\ \dot{V}(t) = -\lambda V(t) + \lambda(1-a)(1-u) fK(t) \end{cases}$$

$$1-\frac{\mu}{f(1-a)} < u < 1.$$

Многоотраслевое моделирование

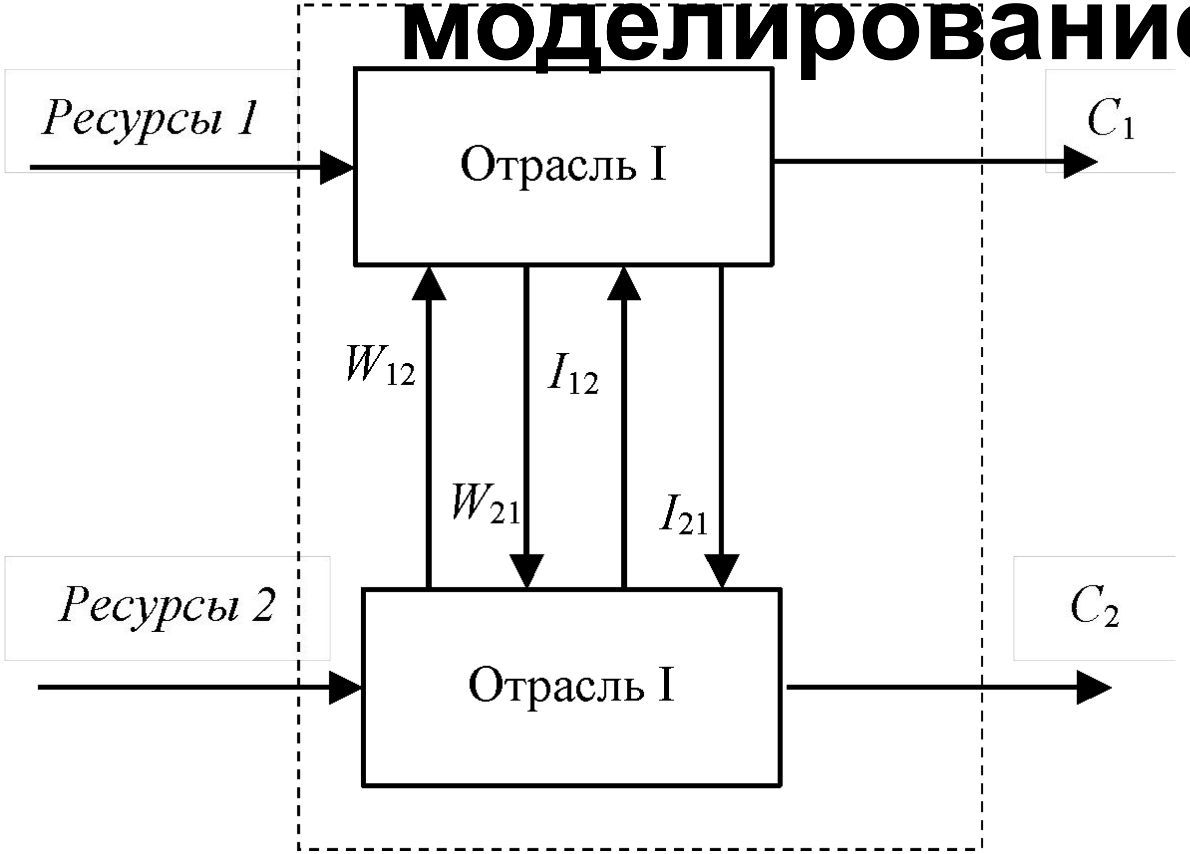


Рис. Схема взаимосвязи отраслей в двухпродуктовой экономике

$$\begin{cases} X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \eta_{11}\dfrac{dX_1}{dt} + \eta_{12}\dfrac{dX_2}{dt} + C_1 \\ X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \eta_{21}\dfrac{dX_1}{dt} + \eta_{22}\dfrac{dX_2}{dt} + C_2 \end{cases} \tag{15}$$

$$X = AX + N\dot{X} + C$$

Статический межотраслевой баланс

$X=aX+Y$

$X=AX+Y$ (16)

$Xi= ai,1X1+ ai,2\ X1+\ldots+ ai,N\ XN +Yj$

$(I-A)X=Y$ (17)

Теорема Фробениуса-Перрона

$X=(I-A)-1Y$

$A^*=(I-A)-1$

Модели неймановского типа.

$$BX=AX+Y$$

- В модель входят матрица выпуска и затрат, вектор интенсивностей производственных процессов, уровень запаса продуктов и ассортиментного набора продуктов.

Межотраслевой баланс

$P1, P2, \ldots,, Pn$

X_1 — валовой продукт $P1$,

X_2 — валовой продукт $P2, \ldots$

X_n — валовой продукт Pn

Y_3 — конечный продукт $P3$

X_{ij} — затраты продукции i-й отрасли на производство продукции Pj

Vj —чистая продукция j-й отрасли

Анализ общей структуры межотраслевого баланса

Отрасли	P_1	P_2	…	Pi	…	P_n	Итого	Конечный	Валовый продукт
P_1	X_{11}	X_{12}		X_{1i}		X_{1n}	$\sum_j X_{1j}$	Y_1	X_1
P_2	$X\,21$	X_{22}		X_{2i}		X_{2n}	$\sum_j X_{1j}$	Y_2	X_2
…				I квадрант			II квадрант		
Pi	$Xi1$	$Xi2$		Xii		Xin	$\sum_j X_{1j}$	Yi	Xi
…									
P_n	X_{n1}	X_{n2}		X_{ni}		X_{nn}	$\sum_j X_{nj}$	Yn	Xn
Итого	$\sum_k X_{k1}$	$\sum_k X_{k2}$		$\sum_k X_{ki}$		$\sum_k X_{kn}$	$\sum_j \sum_k X_{kj}$	$\sum_k Y_k$	$\sum_k X_k$
Условно чистая продукция	V_1	V_2		V_i		V_n	$\sum_j V_j$	IV квадрант	
			III квадрант						
Валовой продукт	X_1	X_2		Xi		Xn	$\sum_j X_j$		

$$X_{11} + X_{12} + \cdots + X_{1n} = \sum_{j=1}^{n} X_{1j}$$

$$X_{21} + X_{22} + \cdots + X_{2n} = \sum_{j=1}^{n} X_{2j}$$

$$\sum_{k=1}^{n} X_{ki} = X_{1i} + X_{2i} + \cdots + X_{ni}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} X_{k1} + \sum_{k=1}^{n} X_{k2} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} X_{kj} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} X_{kn} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_{kj}\right) \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{1j} + \sum_{j=1}^{n} X_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} X_{nj} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} X_{kj}\right) \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} X_{kj}\right). \quad (20)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} X_{kj}$$

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_i. \quad (21)$$

Баланс между производством и потреблением

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

$$V_i = X_i - (X_{1i} + X_{2i} + \cdots + X_{ni})$$

$$X_i = V_i + \sum_{k=1}^{n} X_{ki} \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \right) \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} V_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} X_{ki} \right) \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} V_i \quad (25)$$

Пример

P_1- промышленность,

P_2- сельское хозяйство,

P_3 транспорт

$$X_{22} = X_{31} = 0$$

отрасли	P_1	P_2	P_3	S	Y	**X**
P_1	20	50			200	300
P_2	10	-	40			500
P_3	-				240	
S				310		
V		390				
X						

Решение $P_1 \quad \sum_{j=1}^{3} X_{1j} \quad X_{13}$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{1j} = X_1 - Y_1 = 300 - 200 = 100$$

$$X_{13} = \sum_{j=1}^{3} X_{1j} - X_{11} - X_{12} = 100 - 20 - 50 = 30$$

$$\sum_{j=3}^{3} X_{2j} = 10 + 0 + 40 = 50$$

$$Y_2 = X_2 - \sum_{j=1}^{3} X_{2j} = 500 - 50 = 450$$

отрасли	P_1	P_2	P_3	S	Y	**X**
P_1	20	50	30	100	200	300
P_2	10	-	40	50	450	500
P_3	-				240	
S				310		
V		390				
X	300	500				

$$\sum_{j=1}^{3} X_{3j} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} X_{kj} - \sum_{j=1}^{3} X_{1j} - \sum_{j=1}^{3} X_{2j} = 310 - 100 - 50 = 160$$

$$X_3 = Y_3 + \sum_{j=1}^{3} X_{3j} = 240 + 160 = 400$$

$$\sum_{л=1}^{3} X_{1k} = 20 + 10 + 0 = 30 \qquad \sum_{k=1}^{3} X_{1k} = 30$$

$$V_1 = 300 - 30 = 270$$

отрасли	P_1	P_2	P_3	S	Y	**X**
P_1	20	50	30	100	200	300
P_2	10	-	40	50	450	500
P_3	-			160	240	400
S	30			310		
V	270	390				
X	300	500	400			

$$\sum_{j=1}^{3} Y_j = \sum_{j=1}^{3} V_j$$

$$V_3 = \sum_{j=1}^{3} Y_j - V_1 - V_2 = 200 + 450 + 240 - 270 - 390 = 230$$

$$\sum_{k=1}^{3} X_{k2} = X_2 - V_2 = 500 - 390 = 110$$

$$\sum_{k=1}^{3} X_{k3} = X_3 - V_3 = 400 - 230 = 170$$

$$X_{32} = \sum_{k=1}^{3} X_{k2} - X_{12} - X_{22} = 110 - 50 - 0 = 60$$

$$X_{33} = \sum_{k=1}^{3} X_{k3} - X_{13} - X_{23} = 170 - 30 - 40 = 100$$

отрасли	P_1	P_2	P_3	S	Y	**X**
P_1	20	50	30	100	200	300
P_2	10	-	40	50	450	500
P_3	-	60		160	240	400
S	30	110	170	310		
V	270	390	230			
X	300	500	400			

Модели по Р. Харроду

- Модели данного классам описывают динамику макроэкономики. Накопление и потребление составляют постоянную долю в национальном доходе, а рост производственных фондов зависит от темпа роста капиталовложений. В моделях учитываются национальный доход, объем потребления, объем накопления, инвестиции (капиталовложения), капитал (производственные фонды).

ПИ-модели

- модель предназначена для решения ряда экономических задач в условиях расширения производства и перестройки его структуры

слабые гипотезы ПИ моделей

- выпуск совокупного продукта ограничен имеющимися мощностями и трудовыми ресурсами;
- свободный продукт используется на инвестиции, перестройку мощностей и на создание запасов;
- потребление не может быть меньше некоторого заданного уровня.

- $X(t)=A(t)x(t)+y(t),$
- $y(t)=B(t)$
- X – вектор валовых выпусков в единицу времени,
- A – технологическая матрица,
- Y – вектор спроса в единицу времени, v-вектор производственных мощностей, B – матрица фондоемкости, - вектор запасов продуктов, c – потребление в единицу времени. Функции v,   , c можно рассматривать как управление