

# ЭКОНОМЕТРИКА

Лекция 7

Уравнение множественной регрессии

Теорема Гаусса-Маркова

**Автор: Костюнин Владимир Ильич, доцент кафедры:  
«Математическое моделирование экономических  
процессов»**

# Уравнение множественной регрессии

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} \dots + a_n x_{nt} + u_t = \sum_{i=0}^n a_i x_{it} + u_t \quad (7.1)$$

Наилучшая линейная процедура получения оценок параметров уравнения (7.1) и условия, при которых эта процедура дает несмещенные и эффективные оценки, сформулирована в теореме Гаусса-Маркова



**Карл Фридрих Гаусс**

Время жизни

30.04.1777 - 23.02.1855

Научная сфера –

математика, физика,  
астрономия



**Андрей Андреевич Марков**

Время жизни

14.06.1856 - 20.07.1922

Научная сфера - математика

# Теорема Гаусса - Маркова

## Постановка задачи:

Имеем случайную выборку наблюдений за поведением экономического объекта объемом **n**

$\begin{pmatrix} y_1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ y_2 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix}$	Выборка наблюдений за переменными модели (7.1)
	Первый индекс – номер регрессора
	Второй индекс – номер наблюдения

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1 x_{11} + a_2 x_{21} \dots + a_n x_{k1} + u_1 \\ y_2 = a_0 + a_1 x_{12} + a_2 x_{22} \dots + a_n x_{k2} + u_2 \\ \dots \\ y_n = a_0 + a_1 x_{1n} + a_2 x_{2n} \dots + a_n x_{kn} + u_n \end{cases} \quad (7.2)$$

(7.2) - Система уравнений наблюдений, связывающая наблюдения в выборке

# Теорема Гаусса - Маркова

Сформируем вектора и матрицу коэффициентов на основе системы (7.2)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_k \end{pmatrix} \quad \underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \underline{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix}$$

$\underline{Y}$  – вектор выборочных значений эндогенной переменной

$\underline{U}$  – вектор выборочных значений случайного возмущения

$\underline{A}$  - вектор неизвестных параметров модели

$\underline{x}$  – вектор регрессоров

$\underline{X}$  – матрица коэффициентов при неизвестных параметрах

$$\underline{Y} = \underline{AX} + \underline{U}$$

# Теорема Гаусса - Маркова

По данным выборки найти:  $\tilde{A}$ ,  $\text{Cov}(\tilde{A}\tilde{A})$ ,  $\sigma_u$ ,  $\sigma(\tilde{y}(z))$

## Теорема (Гаусса – Маркова)

**Если** матрица  $X$  неколлинеарна и вектор случайных возмущений удовлетворяет следующим требованиям:

1.  $M(u_i) = 0$                       Математическое ожидание всех случайных возмущений равно нулю
2.  $\sigma^2(u_i) = \sigma_u^2$               Дисперсия случайных возмущений постоянна во всех наблюдениях (условие **ГОМОСКЕДАСТИЧНОСТИ**)
3.  $\text{Cov}(u_i, u_j) = 0$   
при  $i \neq j$                       Случайные возмущения в разных наблюдениях не зависимы
4.  $\text{Cov}(x_i, u_i) = 0$                 Случайные возмущения и регрессоры не зависимы

# Теорема Гаусса - Маркова

**Тогда** наилучшей линейной процедурой оценки параметров модели (7.1) является:

$$\underline{\tilde{A}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \underline{Y} \quad (7.3)$$

которая удовлетворяет методу наименьших квадратов

При этом:  $\text{Cov}(\underline{\tilde{A}}, \underline{\tilde{A}}) = \tilde{\sigma}_u^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$

$$\tilde{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n-k} \sum (y_i - \tilde{y}_i)^2 = \frac{1}{n-k} \sum u_i^2$$

$$\tilde{Y}(\underline{z}) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 z_1 + \dots + \tilde{a}_k z_k$$

$$\sigma^2(\tilde{y}(\underline{z})) = \tilde{\sigma}_u^2 (1 + q_0)$$

$$q_0 = \underline{z}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \underline{z}$$

# Теорема Гаусса - Маркова

## Доказательство

Воспользуемся методом наименьших квадратов

$$S = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{u} \Rightarrow \min \quad (7.4)$$

где

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\mathbf{a}} \quad (7.5)$$

Подставив (7.5) в (7.4) получим

$$\begin{aligned} S &= \mathbf{u}^T \mathbf{u} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\mathbf{a}})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\mathbf{a}}) = (\mathbf{Y}^T - \tilde{\mathbf{a}}^T \mathbf{X}^T) (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\mathbf{a}}) = \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\tilde{\mathbf{a}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y} + \tilde{\mathbf{a}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\tilde{\mathbf{a}} \end{aligned} \quad (7.6)$$



# Теорема Гаусса - Маркова

Для получения необходимого условия экстремума дифференцируем (7.6) по вектору параметров

$$\frac{\partial S}{\partial \tilde{\mathbf{a}}} = -2 \mathbf{X}^T \mathbf{Y} + 2 \mathbf{X}^T \mathbf{X} \tilde{\mathbf{a}} = 0$$

Откуда система нормальных уравнений для определения искомых параметров получает вид

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (7.7)$$

Решение системы (7.7) в матричном виде есть

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

Выражение (7.3) доказано

# Теорема Гаусса - Маркова

Докажем несмещенность оценок (7.3)

$$\begin{aligned} M(\tilde{\mathbf{a}}) &= M[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}] = M[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{u})] = \\ &= M[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})\mathbf{a} + \mathbf{u}] = \mathbf{a} \end{aligned}$$

Несмещенность оценки (7.3) доказана

Вычислим ковариационную матрицу оценок (7.3)

$$\text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}}) = \text{Cov}[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}, (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}] = \sigma_u^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$$

В результате получено выражение (7.4)

# Теорема Гаусса - Маркова

Пример 1. Пусть имеем выборку из  $n$  наблюдений за случайной величиной  $Y$

Найти наилучшие оценки среднего значения и дисперсии этой переменной

В терминах теоремы Гаусса –Маркова задача формулируется так: необходимо построить модель типа  $Y = a_0 + u$ , при этом имеем:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad X^T = (1 \ 1 \ \dots \ 1)$$

# Теорема Гаусса - Маркова

Решение

1. Вычисляем  $(X^T X)^{-1}$

$$(X^T X) = (1 \ 1 \ \dots \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = n \quad (X^T X)^{-1} = \frac{1}{n}$$

2. Вычисляем  $(X^T Y)$

$$(X^T Y) = (1 \ 1 \ \dots \ 1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum y_i$$

3. Вычисляем оценку параметра  $a_0$

$$\tilde{a}_0 = (X^T X)^{-1} X^T Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

4. Находим дисперсию среднего

$$\sigma^2(\tilde{a}_0) = \sigma_u^2 (X^T X)^{-1} = \frac{\sigma_u^2}{n-1}$$

# Теорема Гаусса - Маркова

## Пример 2. Уравнение парной регрессии

Построить модель типа  $Y = a_0 + a_1 x + u$ , по данным выборки наблюдений за переменными  $Y$  и  $x$  объемом  $n$

В схеме Гаусса-Маркова имеем:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \quad \underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad \underline{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

1. Вычисляем матрицы  $(X^T X)$  и  $(X^T X)^{-1}$

$$(X^T X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \quad (X^T X)^{-1} = \frac{1}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{pmatrix}$$

# Теорема Гаусса - Маркова

2. Вычисляем  $X^T Y$

$$(X^T Y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

3. Вычисляем оценку вектора параметров  $a$

$$\hat{a} = \frac{1}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & - \sum x_i \\ - \sum x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i \\ n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i \end{pmatrix}$$

# Теорема Гаусса - Маркова

Вычислим дисперсии (ковариационную матрицу) параметров модели

$$\text{Cov} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \sigma_u^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \sigma_u^2 \frac{1}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{pmatrix}$$

Следовательно:

$$\sigma^2(\tilde{a}_0) = \sigma_u^2 \frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

$$\sigma^2(\tilde{a}_1) = \sigma_u^2 \frac{n}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

$$\text{Cov}(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1) = \sigma_u^2 \frac{-\sum x_i}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

# Теорема Гаусса - Маркова

## Расчет дисперсии прогнозирования

Прогноз осуществляется в точке  $Z = \{1, z\}^T$

$$\sigma^2(Y(z)) = \sigma_u^2(1 + q_0)$$

$$q_0 = Z^T (X^T X)^{-1} Z = (1 \ z) \frac{1}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -z \sum x_i \\ -\sum x_i & nz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\sum x_i^2 - 2z \sum x_i + nz^2}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} = \frac{\sum x_i^2 - \frac{1}{n} \sum x_i^2 \sum x_i^2 + (z - \bar{x})^2}{n \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}$$

$$\sigma^2(Y(z)) = \sigma_u^2 \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{(z - \bar{x})^2}{n \sum ((x_i - \bar{x})^2)} \right)$$



# Оценка уравнений регрессии с помощью EXCEL

Процедура «ЛИНЕЙН» в приложении EXCEL

Алгоритм использования процедуры:

1. Подготовка таблицы исходных данных
2. Вызов процедуры «ЛИНЕЙН»
3. Ввод исходных данных в процедуру
4. Анализ результата

Рассмотрим алгоритм на примере

# Теорема Гаусса - Маркова

## Выводы:

1. Теорема Гаусса-Маркова формулирует наилучшую линейную процедуру расчета оценок параметров линейной модели множественной регрессии
2. Линейная процедура соответствует методу наименьших квадратов
3. Предпосылки теоремы обеспечивают получение оценок, обладающих свойствами несмещенности и эффективности
4. При выполнении предпосылок свойства эффективности и несмещенности достигаются при любом законе распределения случайного возмущения