



Микроэкономика-2

Филатов Александр Юрьевич

(Главный научный сотрудник ШЭМ ДВФУ)

<http://math.isu.ru/filatov>, <http://vk.com/baikalreadings>,
alexander.filatov@gmail.com

Лекции 3.1-3.2

Экономика обмена.

Приложения



Шерзод Ташпулатов (CERGE-EI)

18-30 декабря, ДВФУ

Курс по математической экономике

Курс направлен на знакомство с основными математическими инструментами, концепциями и методами, используемыми в современном экономическом анализе. В рамках курса планируется обсудить различные приложения, которые можно встретить в экономических исследованиях. Некоторые из них будут рассмотрены в MatLab. 2 лекции будут посвящены написанию статей в ведущие международные журналы.

Лектор: Шерзод Ташпулатов, профессор экономики энергетики, микроэкономики, статистических методов в экономике, эконометрики, математики для экономистов в ведущих европейских бакалавриатах, магистратурах, Ph.D-программах, автор статей в «Energy Policy», «Energy Economics», «Utilities Policy».

Курс важен для

- **Экономистов**, получающих инструментарий современной экономики.
- **Математиков**, знакомящихся с экономическими приложениями методов.

Запись на курс: ukhalova.ts@dvfu.ru – ФИО, группа, e-mail, телефон.



Экономика обмена

2

$l = 1, \dots, L$ – товары, $i = 1, \dots, n$ – люди,

w_1, \dots, w_n – начальные запасы, $\forall i \ w_i \in R_i^L$, $w_i = (w_{i1}, \dots, w_{in})$,

x_1, \dots, x_n – потребление, $\forall i \ x_i \in R_i^L$, $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$.

Матрицы начальных запасов и потребления:

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1L} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} & \dots & w_{nL} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1L} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nL} \end{pmatrix},$$

Условие баланса: $\forall l \ x_{1l} + \dots + x_{nl} = w_{1l} + \dots + w_{nl}$.

(сколько принесли – столько и потребили!)

Какое потребление всех из допустимых будем ожидать в равновесии?

Требование 1. «Индивидуальная рациональность»

$\forall i \ x_i \geq_i w_i$ (иначе он откажется участвовать в обмене).

Требование 2. «Парето-эффективность»

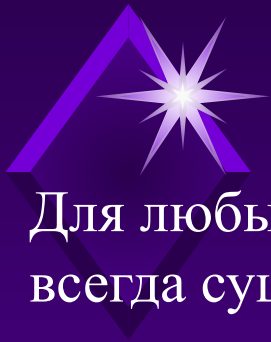
Не существует Y со свойством $\forall i \ y_i \geq_i x_i$, $\exists i \ y_i >_i x_i$.

Требование 3. «Коалиционная устойчивость»

Не существует коалиции S вместе с набором корзин $\{y_i\}_{i \in S}$

1) $\forall i \in S \ y_i >_i x_i$

2) $\sum_{i \in S} y_i = \sum_{i \in S} w_i$



Экономика обмена

Для любых непрерывных, монотонных, строго выпуклых предпочтений всегда существует набор X , удовлетворяющий требованиям 1–3.

В каком соотношении происходит обмен?

Для каждой пары участников обмена i, j есть допустимый диапазон, возможно пустой.



Объем колбасы за 1 кусок сыра

При долгосрочном взаимодействии людей формируется единое для всех участников обмена соотношение $q_{l_1 l_2}$! Иначе будет арбитраж!

Матрица коэффициентов обмена:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1L} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{L1} & \dots & q_{LL} \end{pmatrix}$$

1. $q_{l_1 l_1} = 1$.

2. $q_{l_1 l_2} q_{l_2 l_1} = 1$.

3. $q_{l_1 l_2} q_{l_2 l_3} q_{l_3 l_1} = 1$.

Выписанные условия не оставляют возможностей для арбитража

Теорема. При выполнении условий 1–3 и тривиальном дополнительном $q_{l_1 l_2} > 0$ существует положительный вектор «цен» (p_1, \dots, p_L) , такой что $\forall l_1, l_2 \quad q_{l_1 l_2} = \frac{p_{l_1}}{p_{l_2}}$.

Равновесие Вальраса

4

Идея централизации рыночного процесса:

1. Эксперт устанавливает цены p_1, \dots, p_L .
2. По установленным ценам у всех забирают продукты $W = w_1 + \dots + w_n$.
Взамен каждому выдают сумму $M_i = p_1 w_{i1} + p_L w_{iL}$.
3. Каждый участник рынка выбирает наилучший набор x_{i1}, \dots, x_{iL} из множества доступных: $p_1 x_{i1} + p_L x_{iL} = M_i$.

Равновесие Вальраса = конкурентное равновесие в модели обмена
– набор цен (p_1^*, \dots, p_L^*) , при которых рынок очищается: $x_1 + \dots + x_n = W$.

Теорема (Вальрас, 1874; Никайдо, Гейл, Эрроу, Дебре, 1951):

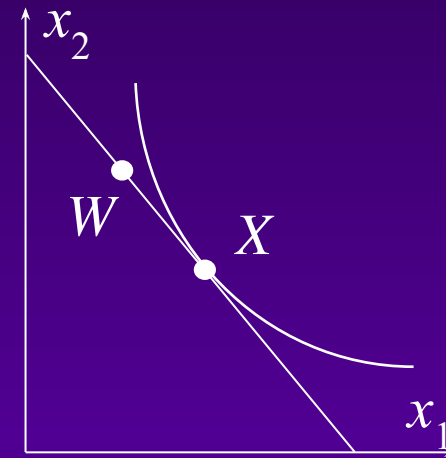
При любых непрерывных, монотонных, строго выпуклых предпочтений и отсутствии «товаров-фантомов» ($w_l > 0$) равновесие Вальраса существует и удовлетворяет условиям 1–3.

Проблемы равновесия Вальраса:

1. В общем случае нет сходимости, устойчивости и единственности!
2. Огромный объем информации, пока недоступный для обработки.
3. Изменение предпочтений.
4. Искажение информации в стратегических целях (стимулы!)

Бюджетное ограничение при наличии начального запаса

- (w_1, w_2) – начальный запас потребителя до выхода на рынок,
 (x_1, x_2) – потребление (валовый спрос),
 $(x_1 - w_1, x_2 - w_2)$ – чистый спрос
 (может быть и отрицательным).



Бюджет = стоимость начального запаса при рыночных ценах:

$$M = p_1 w_1 + p_2 w_2 = p_1 x_1 + p_2 x_2, \quad p_1(x_1 - w_1) + p_2(x_2 - w_2) = 0.$$

Изменение начального запаса

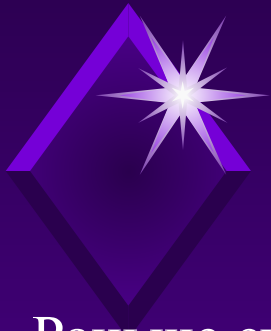


Рост дохода и полезности:

$$p_1 w_1 + p_2 w_2 = M < M' = p_1 w_1' + p_2 w_2'.$$

Падение дохода и полезности:

$$p_1 w_1 + p_2 w_2 = M > M'' = p_1 w_1'' + p_2 w_2''.$$



Изменение цены при наличии начального запаса

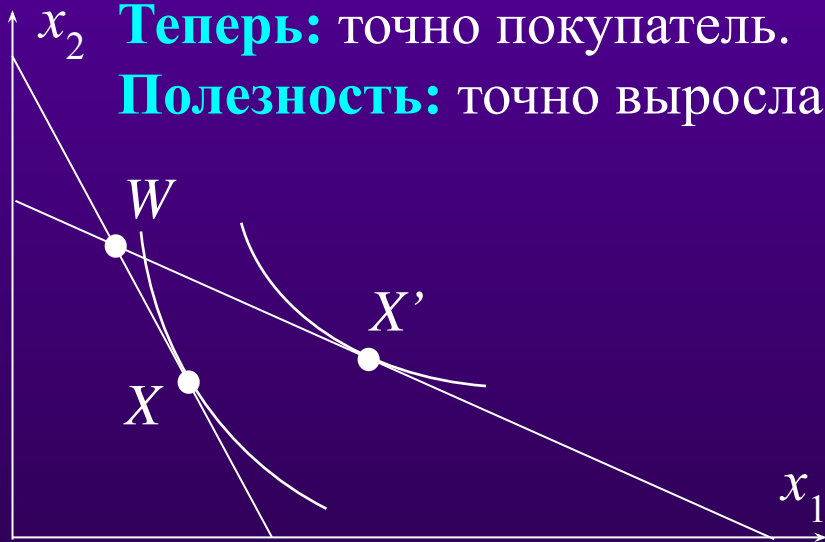
Раньше считалось, что при изменении цен доход постоянен, теперь он связан со стоимостью начального запаса. Разворот бюджетной линии происходит в точке W начального запаса.

Падение цены товара x_1 : сохранение роли

Раньше: покупатель.

Теперь: точно покупатель.

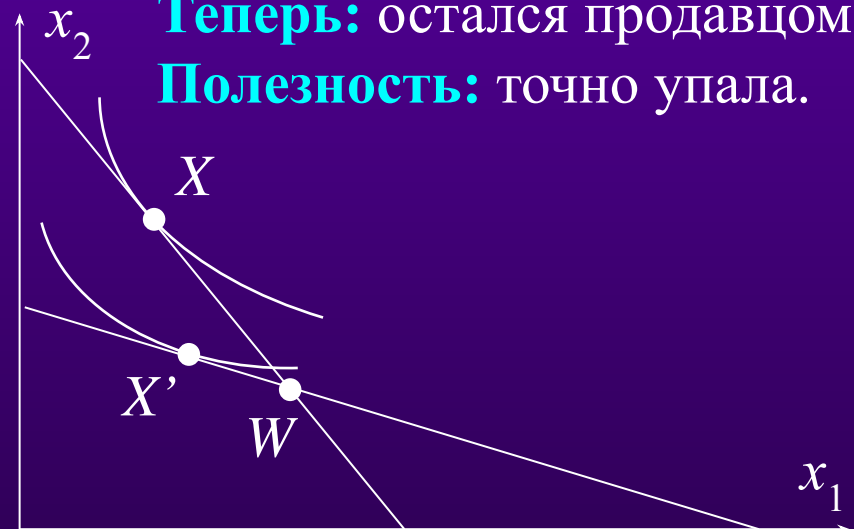
Полезность: точно выросла.



Раньше: продавец.

Теперь: остался продавцом.

Полезность: точно упала.



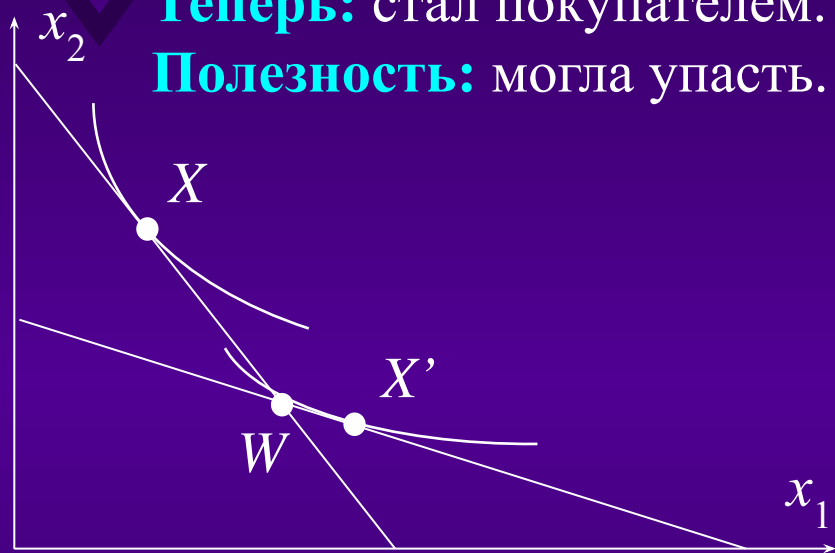
Падение цены товара x_1 : смена роли

7

Раньше: продавец.

Теперь: стал покупателем.

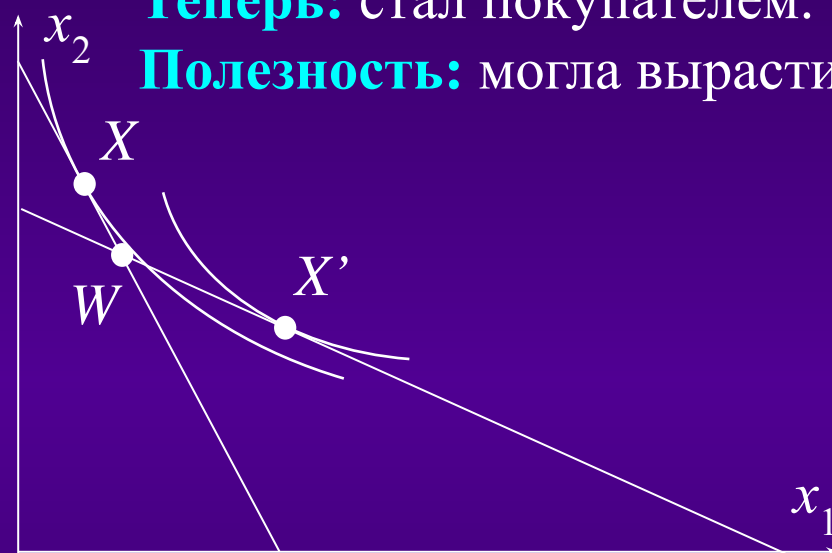
Полезность: могла упасть.



Раньше: продавец.

Теперь: стал покупателем.

Полезность: могла вырасти.



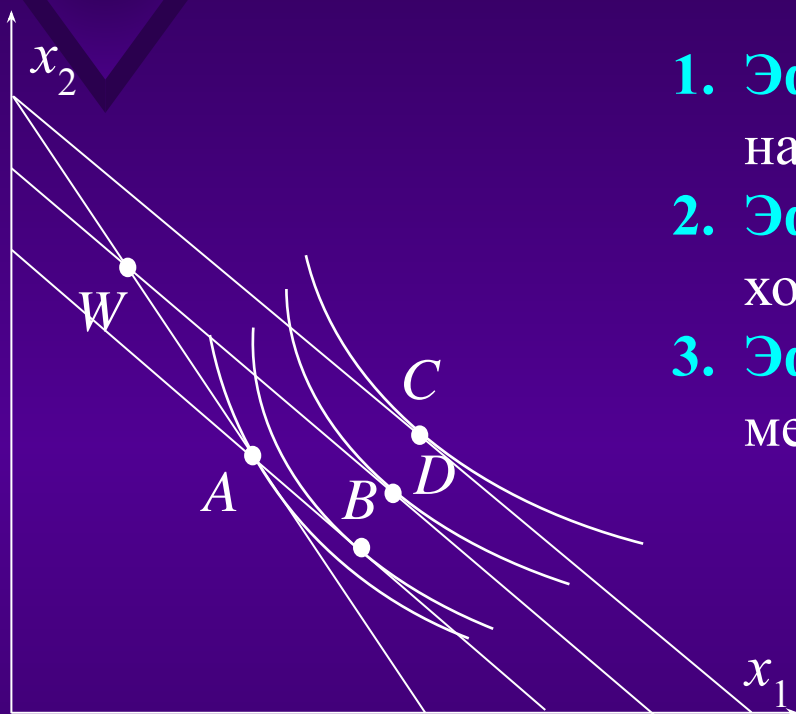
Рост цены товара x_1 : возможные случаи

Продавец – всегда остается продавцом с ростом полезности.

Покупатель остающийся покупателем – всегда снижает полезность.

Покупатель становящийся продавцом – может проиграть в полезности или выиграть.

Уравнение Слуцкого в модели с начальным запасом



1. **Эффект замещения** — связан с переходом на относительно подешевевшие товары.
2. **Эффект дохода** — связан с изменением дохода из-за снижения цены.
3. **Эффект начального запаса** — связан с изменением стоимости начального запаса.

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^S + \Delta x_1^M + \Delta x_1^W$$

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^S}{\Delta p_1} + \frac{\Delta x_1^M}{\Delta p_1} + \frac{\Delta x_1^W}{\Delta p_1}$$

$$\Delta M_p = -\Delta p_1 x_1, \quad \Delta M_w = \Delta p_1 w_1, \quad \Delta p_1 = -\frac{\Delta M_p}{x_1} = \frac{\Delta M_w}{w_1}, \quad \frac{\Delta x_1^M}{\Delta M_p} = \frac{\Delta x_1^W}{\Delta M_w}$$

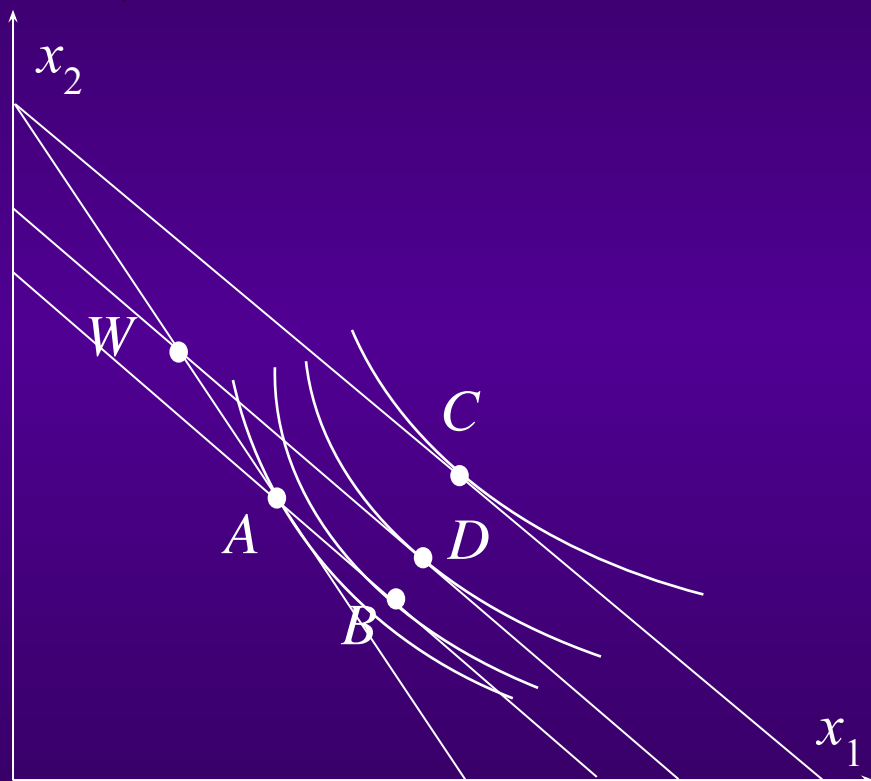
$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^S}{\Delta p_1} - \frac{\Delta x_1^M}{\Delta M_p} x_1 + \frac{\Delta x_1^W}{\Delta M_w} w_1,$$

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^S}{\Delta p_1} - \frac{\Delta x_1^M}{\Delta M_p} (x_1 - w_1)$$

Численный пример (почти Рикардо)

9

x_1 – вино, $p_1 = 3 \rightarrow 2$, $w_1 = 12$.
 x_2 – сукно, $p_2 = 1$, $w_2 = 84$.



$A(20; 60) \rightarrow B(25; 55) \rightarrow$
 $\rightarrow C(30; 60) \rightarrow D(27; 54)$

Исходная ситуация (A):

$$M = 3 \cdot 12 + 1 \cdot 84 = 120 \begin{cases} 60, & x_1 = 20 \\ 60, & x_2 = 60 \end{cases}$$

Точка Слуцкого (B):

$$M = 2 \cdot 20 + 1 \cdot 60 = 100 \begin{cases} 50, & x_1 = 25 \\ 50, & x_2 = 50 \end{cases}$$

Эффект замещения: $AB = 5$

Решение с постоянн. доходом (C):

$$M(C) = M(A) = 120 \begin{cases} 60, & x_1 = 30 \\ 60, & x_2 = 60 \end{cases}$$

Эффект дохода: $BC = 5$

Итоговое решение (D):

$$M = 2 \cdot 12 + 1 \cdot 84 = 108 \begin{cases} 54, & x_1 = 27 \\ 54, & x_2 = 54 \end{cases}$$

Эффект начального запаса: $CD = -3$



Предложение труда

10

M – нетрудовой доход (процент, рента, трансферты,...),
 p – цена потребления, C – потребление, $\bar{C} = M/p$ – начальный запас.
 w – ставка зарплаты, L – количество труда,
 \bar{L} – максимальное количество труда, $R = (\bar{L} - L)$ – досуг, $\bar{R} = \bar{L}$.
 $pC = M + wL$, $pC + w(\bar{L} - L) = M + w\bar{L}$, **$pC + wR = p\bar{C} + w\bar{R}$.**

Досуг – нормальный товар (при росте денежного дохода, например, выиграв в лотерею, люди стараются меньше работать).

Эффекты, наблюдаемые при росте зарплаты (росте цены досуга):

1. Эффект замещения – досуг становится относительно более дорогим!
 $w \uparrow \Rightarrow R \downarrow$
2. Эффект дохода – увеличение цены досуга (уменьшение дохода) приводит к дополнительному сокращению спроса на досуг.
 $w \uparrow \Rightarrow R \downarrow$
3. Эффект начального запаса (растет стоимость начального запаса).
 $w \uparrow \Rightarrow R \uparrow$



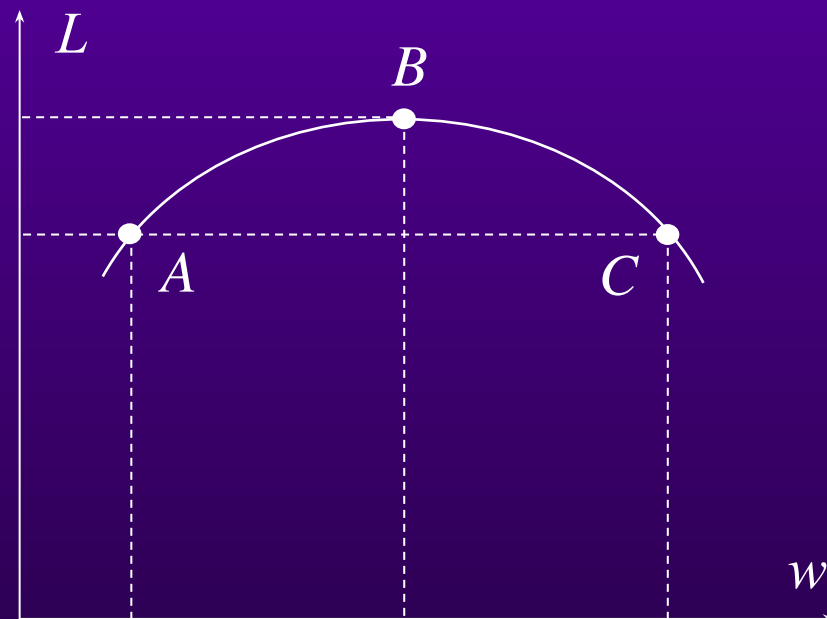
Уравнение Слуцкого и кривая предложения труда

11

Уравнение Слуцкого для рынка труда:
$$\frac{\Delta R}{\Delta w} = \frac{\Delta R^S}{\Delta w} + (\bar{R} - R) \frac{\Delta R^M}{\Delta M}$$

<0 >0 >0

Чем выше предложение труда и ниже время досуга, тем больше второе слагаемое в уравнение Слуцкого и выше вероятность смены поведения на увеличение времени досуга и сокращение предложения труда.





Межвременной выбор

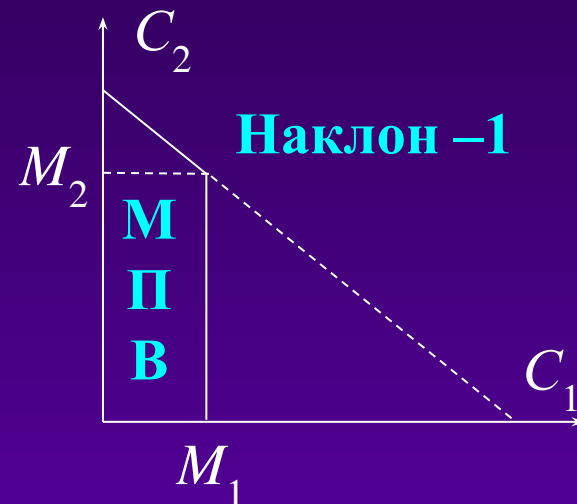
12

M_1, M_2 – доход потребителя в 2 периодах,
 C_1, C_2 – потребление в 2 периодах.

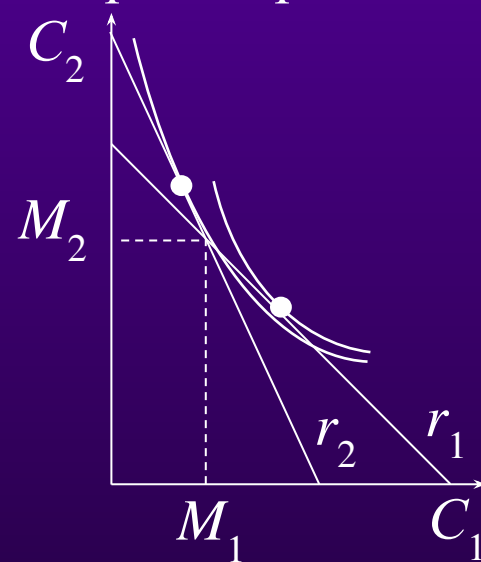
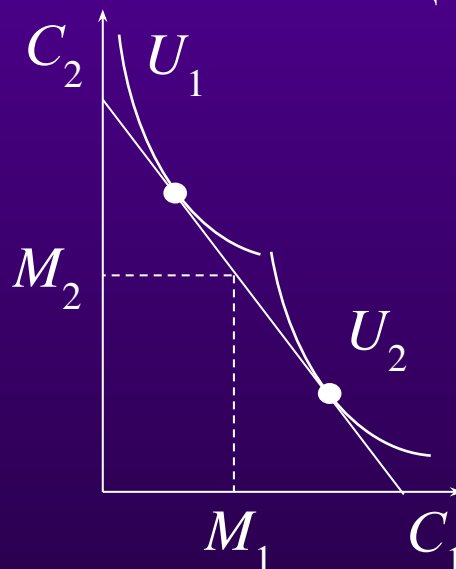
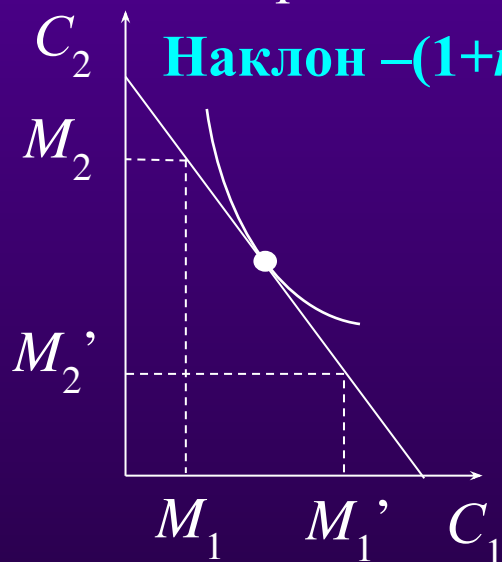
Вариант 1. Отсутствие банковской системы:
невозможность займов, отсутствие процента.

Вариант 2. Появление банковской системы:
возможность брать и давать займы под $r\%$.

$$C_2 = M_2 + (1 + r)(M_1 - C_1)$$



В зависимости от доходов в двух периодах, предпочтений и процентной ставки потребитель может быть либо заемщиком, либо кредитором.





Уравнение Слуцкого в модели межвременного выбора

$$\frac{\Delta C_1}{\Delta r} = \frac{\Delta C_1^S}{\Delta r} - \frac{\Delta C_1^M}{\Delta M} (C_1 - M_1)$$

<0 >0 ?

Результат зависит в первую очередь от роли потребителя!

Падение процентной ставки: сохранение роли

Раньше: заемщик.

Теперь: точно заемщик.

Полезность: точно выросла.



Раньше: кредитор.

Теперь: остался кредитором.

Полезность: точно упала.

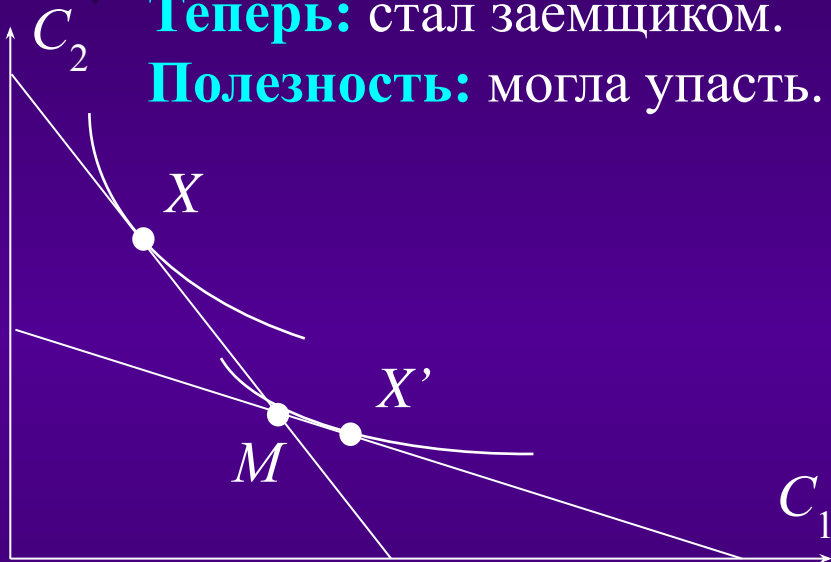




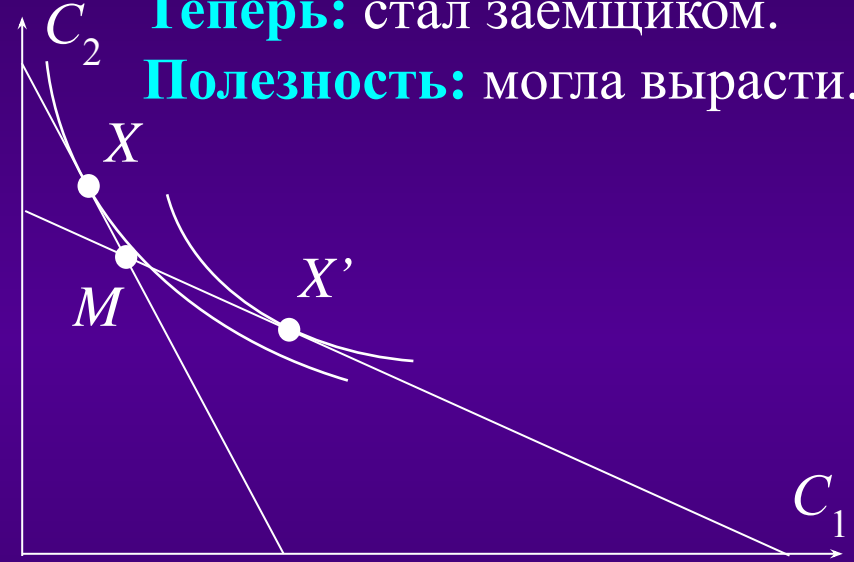
Падение процентной ставки: смена роли

14

Раньше: кредитор.
Теперь: стал заемщиком.
Полезность: могла упасть.



Раньше: кредитор.
Теперь: стал заемщиком.
Полезность: могла вырасти.



Рост процентной ставки: возможные случаи

Кредитор – всегда остается кредитором с ростом полезности.

Заемщик остающийся заемщиком – всегда снижает полезность.

Заемщик становящийся кредитором – может проиграть в полезности или выиграть.



Учет инфляции

15

Реальная ставка процента – процентная ставка с учетом инфляции.

$$1 + \rho = \frac{1 + r}{1 + \pi}, \quad \rho = \frac{1 + r}{1 + \pi} - 1 = \frac{r - \pi}{1 + \pi} \approx r - \pi.$$

Анализ долгосрочных проектов

$$NPV = \sum_{t=0}^T \frac{a_t}{(1 + d)^t} - \text{чистая текущая стоимость, } IRR = d: NPV = 0.$$

Облигации и консоли (пожизненная рента)

$$NPV_B = \sum_{t=1}^T \frac{x}{(1 + r)^t} + \frac{F}{(1 + r)^T}, \quad NPV_{PB} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{x}{(1 + r)^t} = \frac{x}{r}.$$

ставка	1 год	2 года	5 лет	10 лет	15 лет	20 лет	25 лет	30 лет
5%	0,95	0,91	0,78	0,61	0,48	0,37	0,30	0,23
10%	0,91	0,83	0,62	0,39	0,24	0,15	0,09	0,06
15%	0,87	0,76	0,50	0,25	0,12	0,06	0,03	0,02
20%	0,83	0,69	0,40	0,16	0,06	0,03	0,01	0,00

Излишек потребителя и излишек производителя



Излишек потребителя (consumer surplus) – совокупная экономия потребителей, связанная с тем, что они приобретают продукцию дешевле, чем готовы это сделать.

Излишек производителя (producer surplus) – совокупная прибыль производителей, связанная с тем, что они продают продукцию дороже, чем готовы это сделать.

Обществен. благосостояние (social welfare)

Мертвые потери (deadweight loss)

$$CS = \int_0^{q_M} (p_D(q) - p_M) dq$$

$$PS = \int_0^{q_M} (p_M - p_S(q)) dq \rightarrow \max - \text{критерий производителя.}$$

$$SW = CS + PS = \int_0^{q_M} (p_D(q) - p_S(q)) dq \rightarrow \max - \text{критерий общества.}$$

Проблема излишка потребителя

17



При изменении цены товара и его потребления может измениться сумма денег, выделяемая на другие товары, что влияет на объемы их покупки и полезность. Единственный случай, когда данная проблема отсутствует – **квазилинейная функция полезности**, для которой эффект дохода равен нулю.

Компенсирующая и эквивалентная вариация





*Спасибо
за внимание!*

<http://math.isu.ru/filatov>, <http://vk.com/baikalreadings>,
alexander.filatov@gmail.com