ПЛАТЕЖЕЙ ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ

Основные определения

На практике финансовые операции, как правило, предусматривают распределённые во времени выплаты и поступления денежных сумм.

Потоком платежей будем называть последовательность (ряд) выплат и поступлений, приуроченных к разным моментам времени.

Поток платежей, все элементы которого - положительные величины, а временные интервалы между двумя последовательными платежами постоянны, называют **финансовой рентой** или **аннуитетом** вне зависимости от цели, назначения и происхождения этих платежей.

Финансовая рента описывается следующими параметрами:

- Член ренты - величина каждого отдельного платежа.
- Период ренты - временной интервал между платежами.
- Срок ренты - время от начала ренты до конца её последнего периода.
- Процентная ставка - это ставка, которая используется при наращении или дисконтировании платежей, из которых состоит рента.

Виды финансовых рент

Рента называется **годовой,** если ее период равен одному году.

Рента называется ***p*– срочной**, если ее период меньше года и количество платежей в год равно *p.*

Эти ренты относятся к **дискретным,** поскольку выплаты приурочены к дискретным моментам времени. Бывают ренты **непрерывные,** когда поток платежей описывается непрерывной функцией.

Ренты бывают **постоянные и переменные.** Рента называется **постоянной,** если все ее платежи одинаковы и не меняются во времени. Если размеры платежей зависят от времени, то это **переменная рента.**

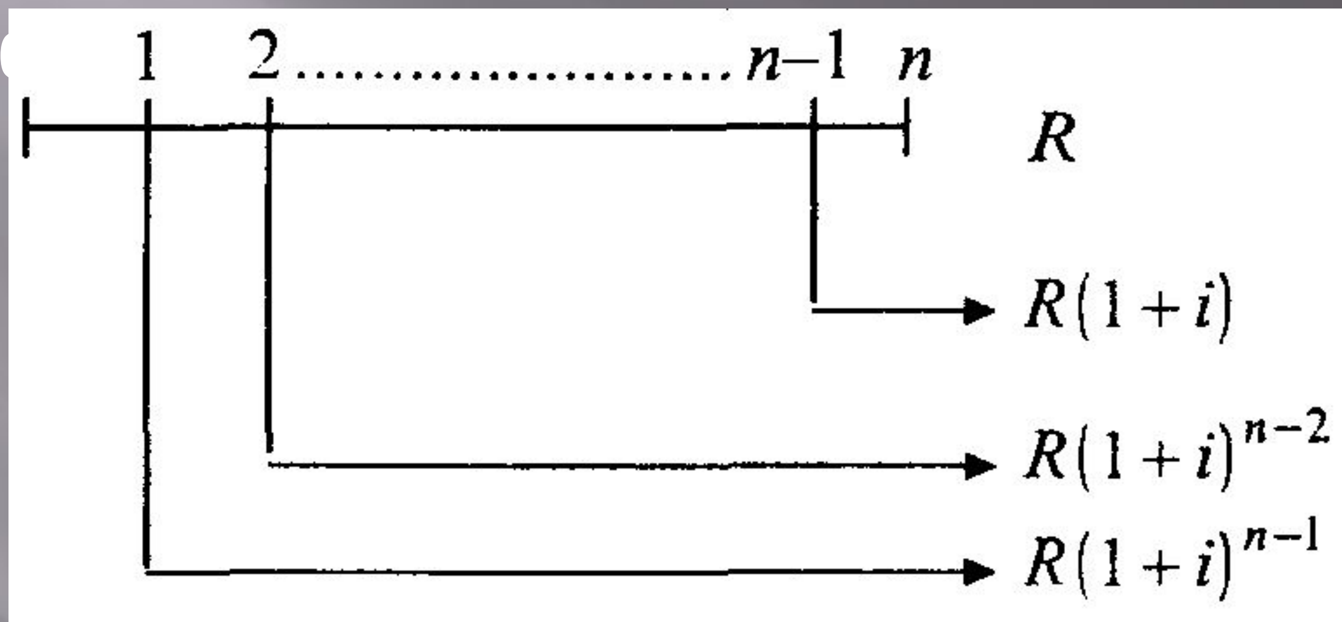
Рента называется **ограниченной,** если количество платежей конечно, в противном случае рента называется **бесконечной** или **вечной.**

Ренты бывают **немедленные и отложенные (отсроченные).** Срок немедленных рент начинается с момента заключения контракта. Если рента отложенная, то срок начала выплат отодвигается на какое-то время.

Если платежи осуществляются в конце периода, то такая рента называется **обычной** или **постнумерандо.** Если выплаты осуществляются в начале периода, то такая рента называется **пренумерандо.**

Наращенная сумма годовой ренты. Рента постнумерандо

Сложная ставка наращения



S - наращенная сумма ренты;
R - размер отдельного платежа;
i - ставка процентов в виде десятичной дроби;
n - срок ренты в годах.

Наращенная сумма годовой ренты. Продолжение

$$S_n = a_1(q^n - 1)/(q - 1) \qquad (1)$$

a_1 – первый член прогрессии;
q – знаменатель прогрессии.

$$S = R\sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t \qquad (2)$$

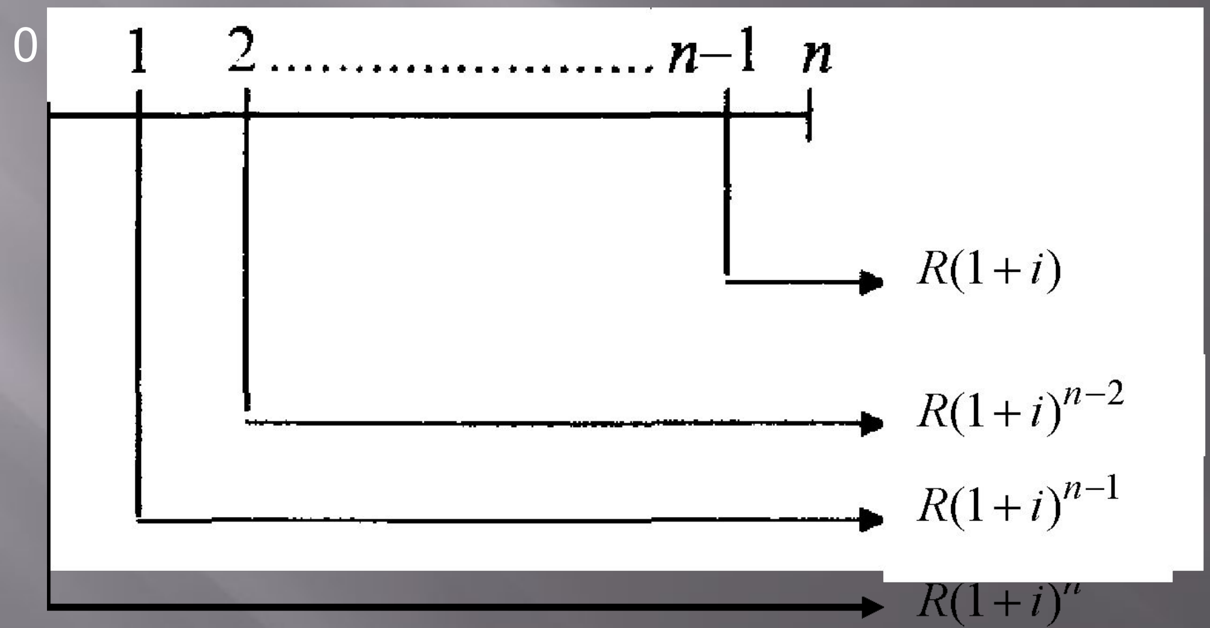
$$s_{n,i} = \sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (3)$$

$$S = R \cdot s_{n,i} \qquad (4)$$

Рента пренумерандо

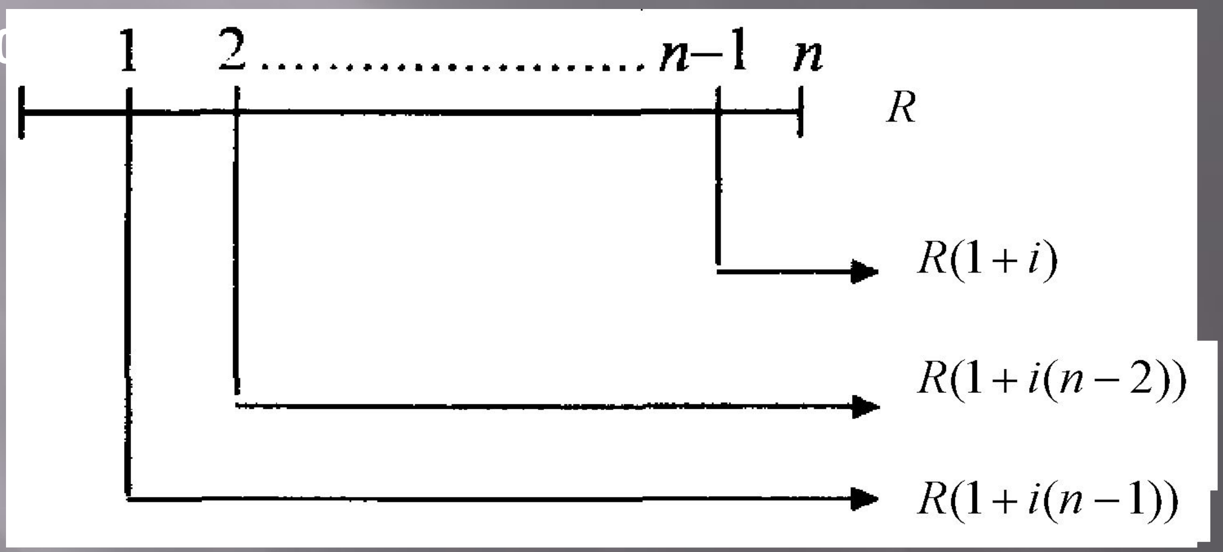
Сложная ставка наращения

$$S = R\sum_{t=1}^{n}(1+i)^t = R\cdot(1+i)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i} = R\cdot(1+i)\cdot s_{n,i}$$



Наращенная сумма годовой ренты. Рента постнумерандо

Простая ставка



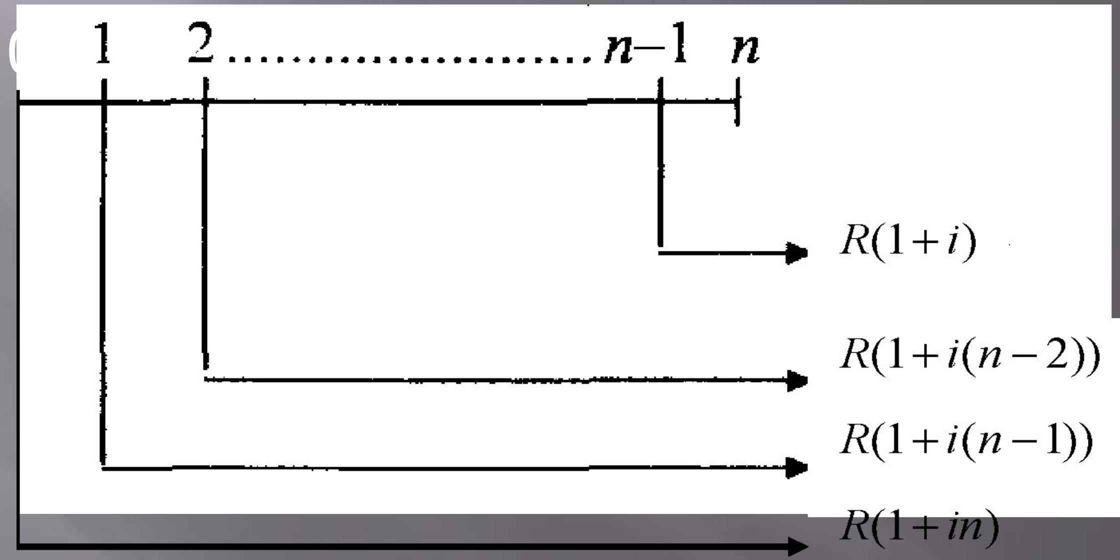
$$S = R\sum_{t=1}^{n}(1+i(n-t)) = R\cdot[1+(n-1)\cdot i] + R\cdot[1+(n-2)\cdot i] + \ldots + R\cdot[1+i] + R$$

$$= R\left[n + i\cdot(1+2+\ldots+(n-1)\right] = R\left[n + i\frac{n\cdot(n-1)}{2}\right] = R\cdot s_{n,i}$$

$$s_{n,i} = \left[n + i\frac{n\cdot(n-1)}{2}\right]$$

Наращенная сумма годовой ренты. Рента пренумерандо

Простая ставка



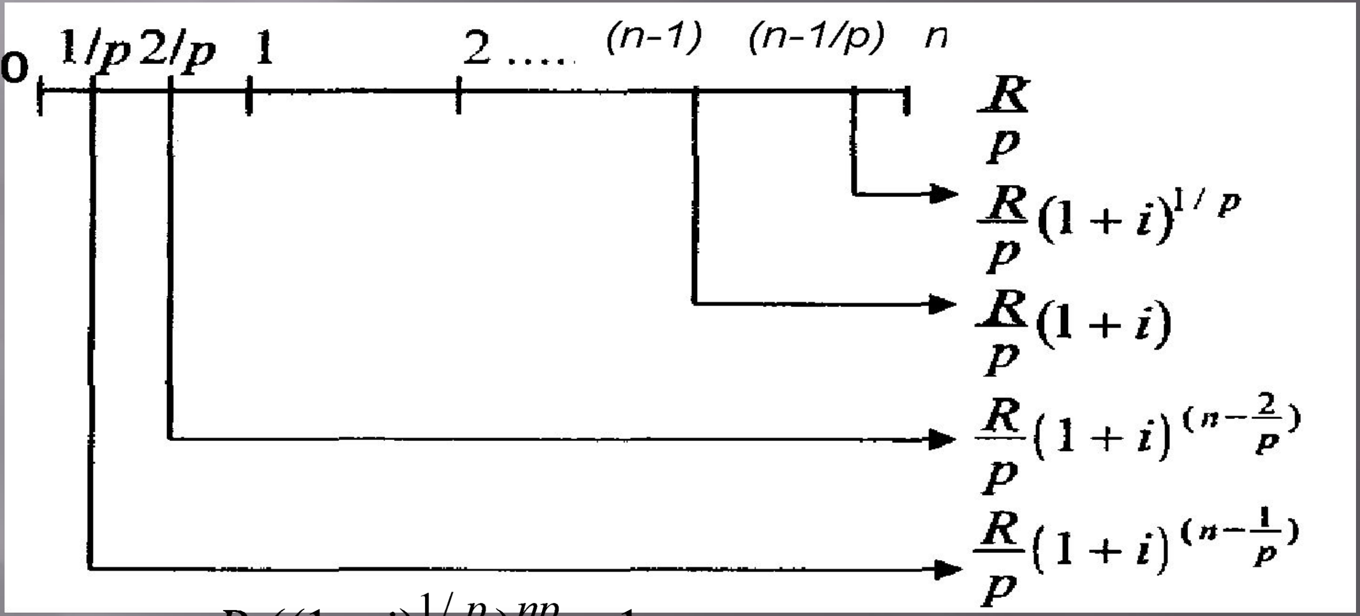
$$S = R\sum_{t=0}^{n-1}(1+i(n-t)) = R\cdot[1+n\cdot i] + R\cdot[1+(n-1)\cdot i] + \ldots + R\cdot[1+i]$$

$$= R\left[n + i\cdot(1+2+\ldots+n)\right] = R\left[n + i\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]$$

$$s(n,i) = \left[n + i\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]$$

Наращенная сумма *p*-срочной ренты. Рента постнумерандо

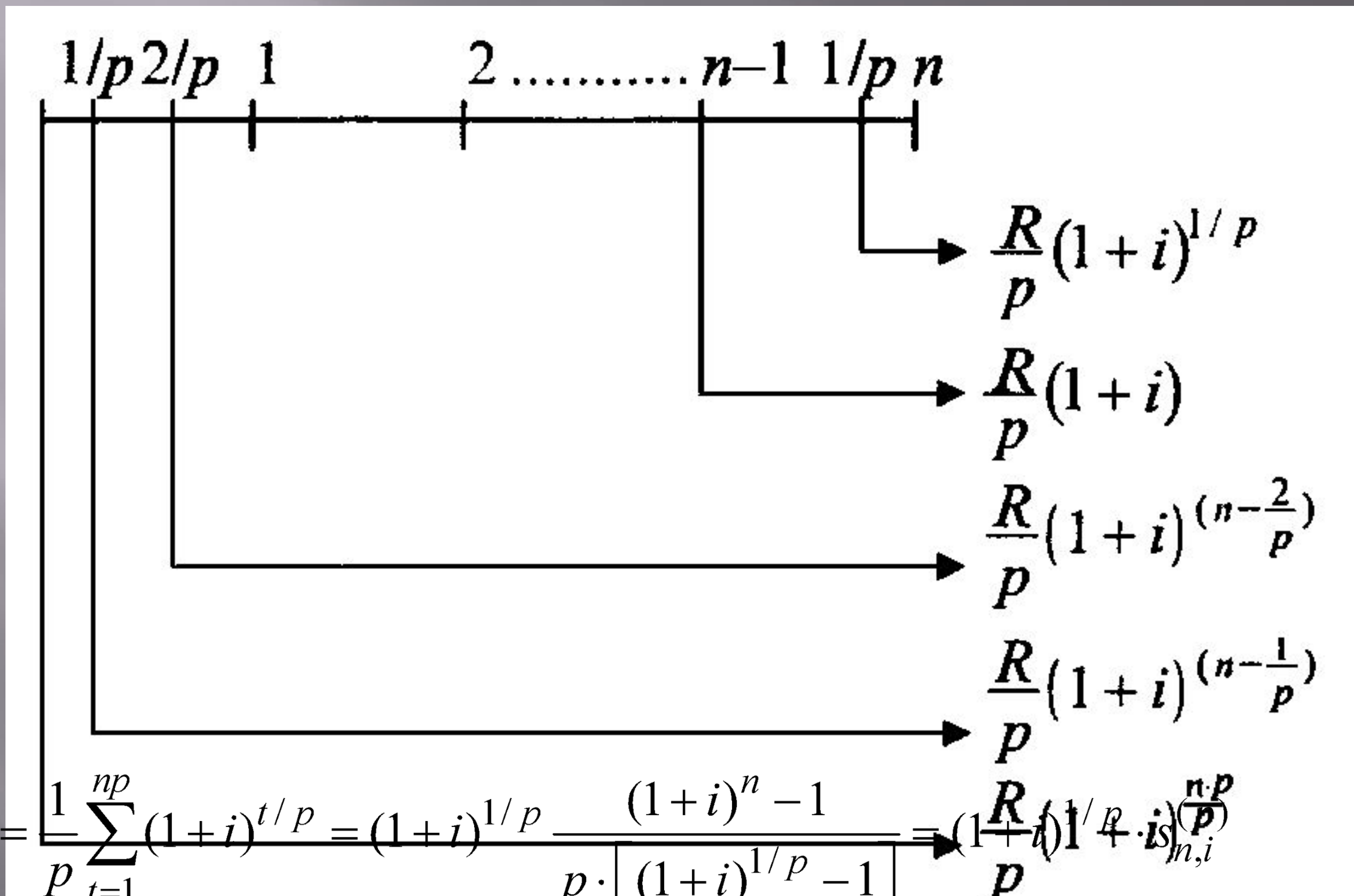
Размер платежа R/p, интервал между платежами равен $1/p$, количество платежей равно np.



$$S = \frac{R}{p}\sum_{t=0}^{np-1}(1+i)^{t/p} = \frac{R}{p}\frac{((1+i)^{1/p})^{np}-1}{(1+i)^{1/p}-1} = R\cdot s_{n,i}^{(p)}$$

$$s_{n,i}^{(p)} = \frac{1}{p}\sum_{t=0}^{np-1}(1+i)^{t/p} = \frac{1}{p}\frac{(1+i)^{n}-1}{\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}$$

Наращенная сумма p-срочной ренты. Рента пренумерандо



$$\ddot{s}_{n,i}^{(p)} = \frac{1}{p}\sum_{t=1}^{np}(1+i)^{t/p} = (1+i)^{1/p}\,\frac{(1+i)^n-1}{p\cdot\left[(1+i)^{1/p}-1\right]} = (1+i)^{1/p}\cdot s_{n,i}^{(p)}$$

Наращенная сумма p-срочной ренты при начислении процентов m раз в год

Рента постнумерандо

$$s_{n,j/m}^{(p)} = \frac{1}{p}\sum_{t=0}^{np-1}(1+j/m)^{\frac{m}{p}t} = \frac{(1+\frac{j}{m})^{mn}-1}{p\left[(1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}}-1\right]}$$

$$S = \frac{R}{p}\sum_{t=0}^{np-1}(1+j/m)^{\frac{m}{p}t} = R\cdot s_{n,j/m}^{(p)}$$

Наращенная сумма p-срочной ренты при начислении процентов m раз в год

Рента пренумерандо

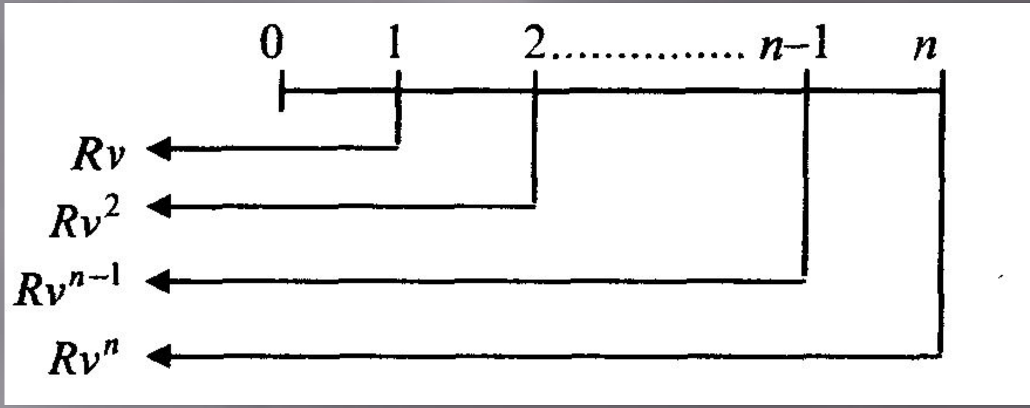
$$\hat{s}^{(p)}_{n,j/m} = \frac{1}{p}\sum_{t=1}^{np}(1+j/m)^{\frac{m}{p}t} = (1+j/m)^{\frac{m}{p}} \frac{(1+\frac{j}{m})^{mn}-1}{p\left[(1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}}-1\right]} = (1+j/m)^{\frac{m}{p}} \cdot s^{(p)}_{n,j/m}$$

$$S = \frac{R}{p}\sum_{t=1}^{np}(1+j/m)^{\frac{m}{p}t} = R \cdot \hat{s}^{(p)}_{n,j/m}$$

Современная величина обычной ренты. Рента постнумерандо

Современная величина - это сумма всех дисконтированных членов потока платежей на начальный или предшествующий ему момент времени. Иногда вместо термина **современная величина** используют термины **приведенная** или **капитализированная** сумма платежей.

Сложная ставка наращения



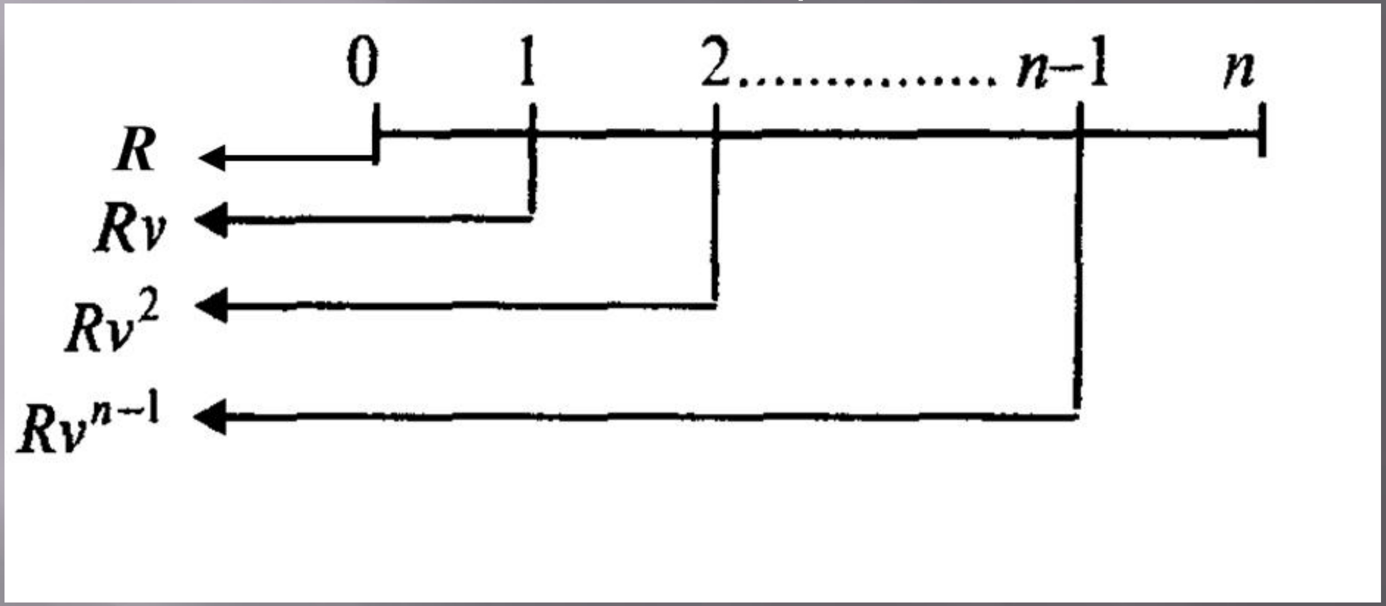
$$v = \frac{1}{1+i}$$

$$A = R\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^t} = \frac{Rv(v^n-1)}{v-1} = R\frac{1-v^n}{i} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n,i}$$

$$a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

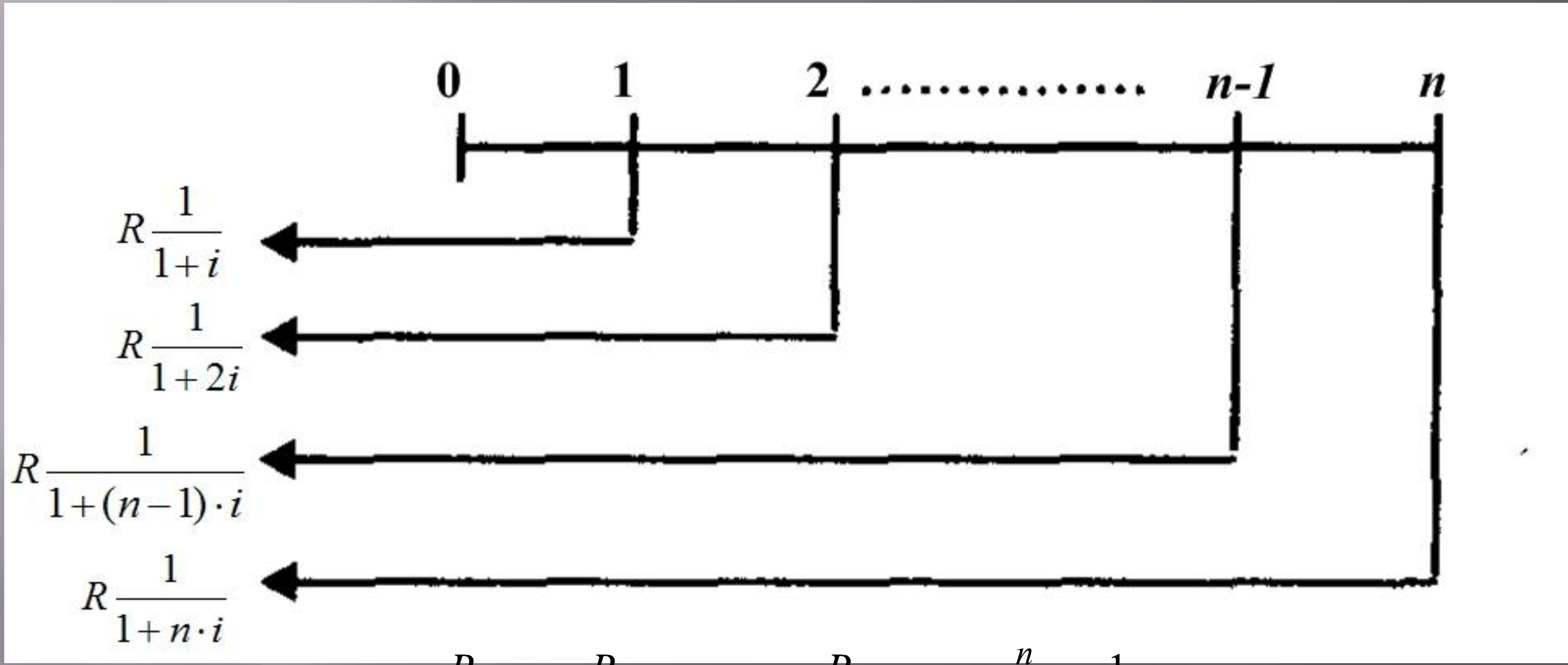
Современная величина обычной ренты. Рента пренумерандо

Сложная ставка наращения



$$\ddot{a}_{n,i} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{(1+i)^t} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = (1+i)\cdot a_{n,i}$$

Современная величина обычной ренты. Рента постнумерандо

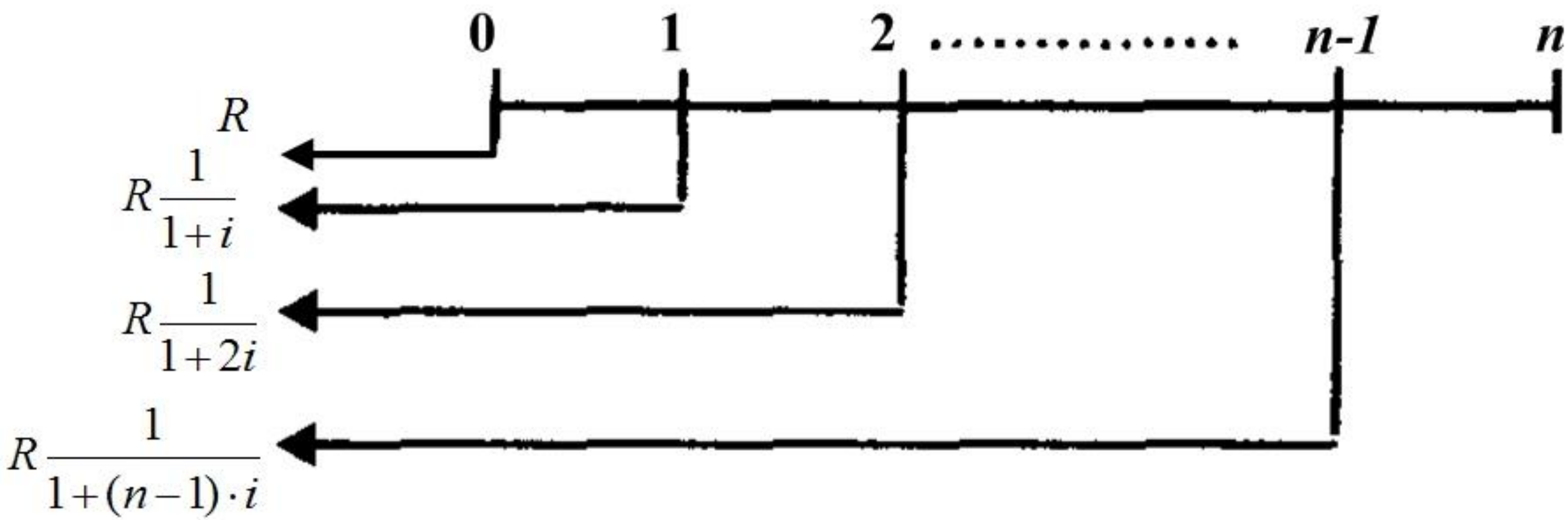


$$\frac{R}{1+i}+\frac{R}{1+2\cdot i}+\ldots+\frac{R}{1+n\cdot i}=R\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+i\cdot k}$$

$$a_{n,i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+i\cdot k} \qquad A=R\cdot a_{n,i}$$

Современная величина обычной ренты. Рента пренумерандо

Простая ставка наращения



$$a_{n,i} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+i\cdot k}$$

Современная величина годовой ренты с начислением процентов *m* раз в год

В полученную формулу для современной величины годовой ренты вместо множителя дисконтирования $(1+i)^{-1}$ подставим множитель $(1+\frac{j}{m})^{-m}$

$$A = R\sum_{t=1}^{n-1}(1+j/m)^{m\cdot t}$$

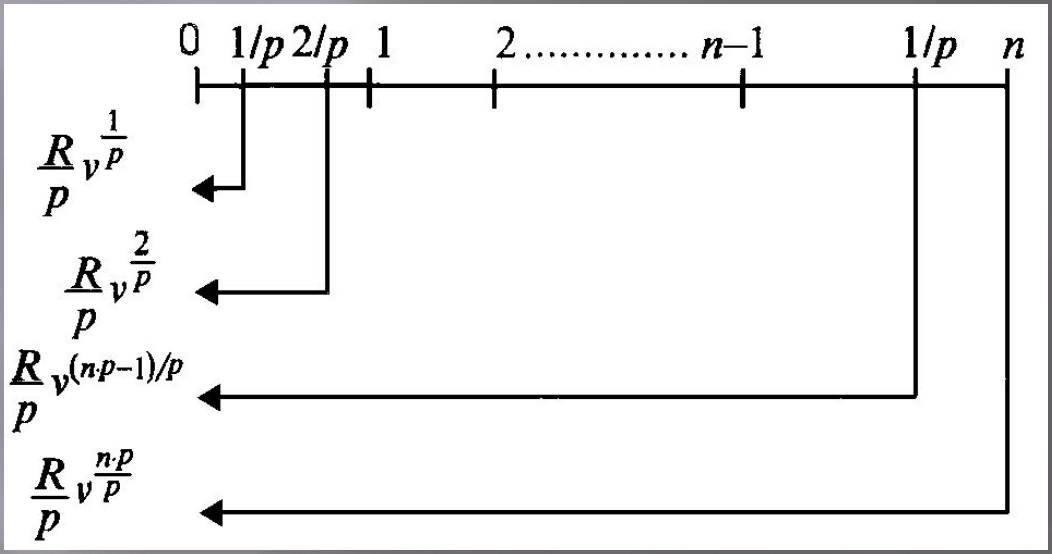
$$a_{n,j/m} = R\sum_{t=1}^{n-1}(1+j/m)^{m\cdot t} = \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^{m}-1}$$

$$A = Ra_{n,j/m}$$

$$a_{n,j/m} = R\sum_{t=0}^{n}(1+j/m)^{m\cdot t} = (1+j/m)^{m}\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^{m}-1} = (1+j/m)^{m}\cdot a_{n,j/m}$$

Современная величина *p* – срочной ренты (*m=1*). Рента постнумерандо

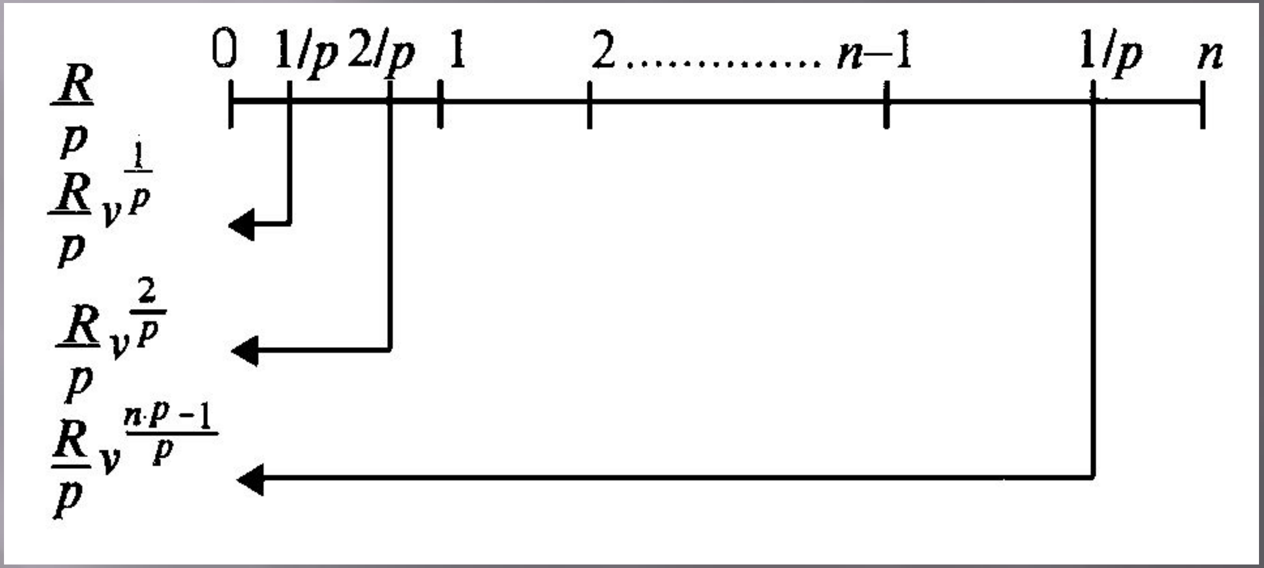
Интервал между платежами у такой ренты равен $1/p$, размер платежа R/p.



$$A = R \cdot a_{n,i}^{(p)}$$

$$a_{n,i}^{(p)} = \frac{1}{p}\sum_{t=1}^{np}\frac{1}{(1+i)^{t/p}} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{\left(\left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{np} - 1}{\left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{p}} - 1} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]}$$

Современная величина p – срочной ренты ($m=1$). Рента пренумерандо



$$\ddot{a}_{n,i}^{(p)}=\frac{1}{p}\sum_{t=0}^{n-1}\frac{1}{(1+i)^{t/p}}=(1+i)^{1/p}\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}=(1+i)^{1/p}\cdot a_{n,i}^{(p)}$$

Определение параметров финансовых рент

Определение размера платежа

Если задана наращенная сумма, то $R = \dfrac{S}{s_{n,i}}$

Если задана современная величина, то $R = \dfrac{A}{a_{n,i}}$

Определение срока ренты

Если задана наращенная сумма, то $R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i} = S \Rightarrow (1+i)^n = \dfrac{S}{R}i + 1 \Rightarrow n = \dfrac{\ln(\dfrac{S}{R}i + 1)}{\ln(1+i)}$

Если задана современная величина, то $n = -\dfrac{\ln(1 - \dfrac{A}{R}i)}{\ln(1+i)}$

Определение ставки процентов

Для определения ставки необходимо решить либо уравнение $S = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$,

если известна наращенная сумма, либо уравнение $A = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$,

если известна современная величина ренты, относительно неизвестной величины i.

Конверсии рент

Конвертировать ренту означает изменить условия финансового соглашения, предусматривающего выплату этой ренты .

Простые виды конверсии

1 . Выкуп ренты – замена ренты единовременным платежом. Из принципа финансовой эквивалентности следует, что при этом вместо ренты выплачивается современная ее величина.
2. Рассрочка платежей – замена единовременного платежа рентой.

Сложные виды конверсии

К сложным конверсиям относится замена одной ренты другой, что означает изменение параметров ренты. Из условия финансовой эквивалентности следует, что при такой замене современные величины этих рент должны быть равны. Другими словами, если $A1$ - современная величина заменяемой ренты, $A2$ - современная величина заменяющей ренты на тот же момент времени, то должно соблюдаться условие: $A1=A2$.

Примеры конверсий

Пусть имеется годовая немедленная рента с параметрами R_1, n_1, i_1, p_1, m_1

Эта рента заменяется на другую, у которой параметры R_2, n_2, i_2, p_2, m_2
Уравнение эквивалентности имеет вид

$$R_1 \frac{1-(1+j_1/m_1)^{-m_1 n_1}}{(1+j_1/m_1)^{m_1/p_1}-1} = R_2 \frac{1-(1+j_2/m_2)^{-m_2 n_2}}{(1+j_2/m_2)^{m_2/p_2}-1}$$

Из этого уравнения можно определить один из параметров замещаемой ренты

Список используемой литературы

- *1.* Багриновский К. Матюшок В. Экономико-математические метода и модели: Учебник / К. Багриновский, В. Матюшок. - М.: Экономистъ, 1999. - 185с.
- 2. Бочаров П.П., Касимов Ю.Ф. Финансовая математика: Учебник / П.П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов. - М.: Гардарики, 2002. - 624с.
- 3. Кузнецов Б.Т. Финансовая математика: Учебное пособие / Б.Т. Кузнецов. - М.: Экзамен, 2005. - 128с.
- 4. Кутуков В.Б. Основы финансовой и страховой математики: Методы расчета кредитных, инвестиционных, пенсионных и страховых схем. - М.: Дело, 1998. - 304с.
- 5. Лукашин Ю.П. Финансовая математика: Учебное пособие / Ю.П. Лукашин. - М.: МФПА, 2004. - 81с.
- 6. Малыхин В.И. Финансовая математика / В.И. Малыхин. - М.: Юнити - Дана, 2003. - 237с.
- 7. Меньшиков С. Рентабельность и рента / С. Меньшиков // Экономическое стратегии. - 2004. - №1. - с.28-31.
- 8. Четыркин Е.М. Финансовая математика / Е.М. Четыркин. - 4-е изд. - М.: Дело, 2004. - 400с.