Импульсное управление моделями экономической динамики

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. доцент кафедры ПМ
Соколов В.А.
Студент:
Паршаков Р.В.

ЦЕЛЬ

Исследование разрешимости краевых задач с импульсным управлением для динамических моделей экономики и нахождение импульсного управления

ЗАДАЧИ

- Модифицировать некоторые динамические модели экономики путем внедрения кусочно-постоянного запаздывания
- Сформулировать краевые задачи для этих моделей
- Преобразовать исходные задачи к задачам с импульсным управлением
- Получить решение дифференциальных уравнений с кусочно-постоянным запаздыванием в явном виде, которые описывают исследуемые динамические модели
- Доказать разрешимость преобразованных краевых задач для каждой модели
- Найти управления, позволяющие достигнуть к конечному моменту времени желаемых результатов

W – подстановка Азбелева

Краевая задача: $(Lx)(t) = x'(t) + p(t)x\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) + q(t)x(t) = f(t), t\epsilon[0, nT]$ (1)

$$lx = \psi x(0) + \int_0^{nT} \varphi(s)x'(s)ds = \beta. \qquad (2)$$

По числу ψ и функции φ можно найти такую функцию $u(t)$, что $u(0) \neq 0$, $lu = 1$ и система уравнений

$$x'(t) + B(t)x(0) = z(t), lx = \beta,$$

Где $B(t) = -\frac{u'(t)}{u(0)}$, однозначно разрешима и ее решение имеет вид:

$$x(t) = u(t)\beta + \int_0^{nT} W(t,s)z(s)ds. \qquad (3)$$

Здесь $W(t,s) = \begin{cases} 1 - u(t)\varphi(s), 0 \le s \le t \le nT \\ -u(t)\varphi(s), 0 \le t \le s \le nT \end{cases}$ (4)

Краевая задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$z(t) = \int_0^{nT} K(t,s)z(s)ds + g(t), \qquad (5)$$

Уравнение заменяется интегральным уравнением Фредгольма второго рода с вырожденным ядром

$$z(t) = \int_0^{nT} \widetilde{K}(t,s)z(s)ds + g(t)\ , \widetilde{K}(t,s) = \sum_{j=0}^{m} a_j(t)\, b_j(s). \qquad (6)$$

$$x_i = \sum_{j=0}^{5} \alpha_{ij}x_j + c_i, i = \overline{0,m} \qquad (7)$$

Исследуется обратимость матрицы А, построенной с заданной точностью по функциям

ТЕОРЕМА О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

- Теорема: Пусть матрица

$$A=\{\gamma_{ij}\},\quad \gamma_{ij}=e_{ij}-\alpha_{ij},\ \text{где}\ \ e_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases},\quad i,j=\overline{1,m} \tag{8}$$

обратима и выполнено неравенство $\varepsilon<1/r$, где

$$r=1+\left\{\int_0^{nT}\int_0^{nT}\left[R(t,s)\right]^2 dtds\right\}^{\frac{1}{2}},\quad R(t,s)=\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{m}a_j(t)\theta_{ji}b_i(s). \tag{9}$$

Тогда краевая задача (1) – (2) однозначно разрешима, и ее решение имеет представление

$$\widetilde{Y}(t)=\int_0^t\widetilde{z}(s)ds-\int_0^t B(s)Y(0)ds \tag{10}$$

с точностью

$$\int_0^{nT}\left[z(t)-\widetilde{z}(t)\right]^2 dt\leq\frac{\varepsilon^2 r^4}{(1-\varepsilon\cdot r)^2}\cdot\int_0^{nT}\left[f(t)\right]^2 dt, \tag{11}$$

- При естественных предположениях относительно ядра для любого заданного вырожденное ядро можно определить следующим образом:

$$\int_0^{nT}\int_0^{nT}\left[K(t,s)-\widetilde{K}(t,s)\right]^2 dtds\leq\varepsilon^2\ . \tag{12}$$

ИМПУЛЬСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

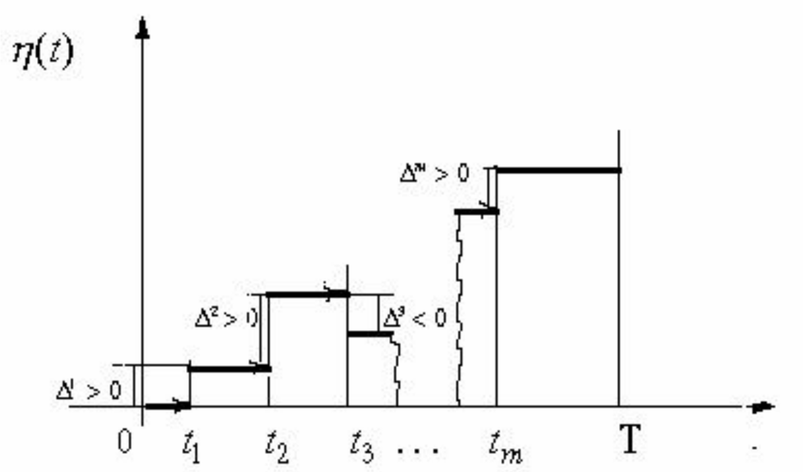
Краевая задача: $(Lx)(t) = x'(t) + p(t)x\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) + q(t)x(t) = f(t), t\epsilon[0, nT]$ (13)

$$lx = \psi x(0) + \int_0^{nT} \varphi(s)x'(s)ds = \beta. \quad (14)$$

$$x(t) = x^0(t) + \bar{\eta}(t) \quad (15)$$

$$\bar{\eta}(t) = \sum_{k=1}^{l} \Delta^k \chi_{[t_k;T]}(t), t \in [0; nT] \quad (15.1)$$

,



где $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_l < nT$ -фиксированный набор точек, Δ^k, $k = 1, .. l$ – постоянные, $\chi_{[t_k;nT]}(t)$ - характеристическая функция отрезка $[t_k; nT]$:

$$\chi_{[t_k;nT]}(t) = \begin{cases} 1, \text{если } t\epsilon[t_k; nT], \\ 0, \text{если } t\bar{\epsilon}\ [t_k; nT]. \end{cases} \quad (16)$$

Под решением уравнения (13) будем понимать такую функцию x$(t)\epsilon D(t_1, t_2, \dots, t_l)$, которая удовлетворяет ему всюду на отрезке $[0; nT]$, за исключением, быть может, точек $t_1, t_2, \dots, t_l$.

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ФОНДОВ В ДВУХОТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКЕ (СЛУЧАЙ НЕЗАВИСИМЫХ ОТРАСЛЕЙ).

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = q_1 x_1\left(\left[\frac{t}{T_1}\right] T_1\right) - p_1 x_1(t) + f_1(t), \\ \dot{x_2}(t) = q_2 x_2\left(\left[\frac{t}{T_2}\right] T_2\right) - p_2 x_2(t) + f_2(t) \end{cases} \quad (17)$$

Где x_i - фонды, q_i-эффективность использования фондов для развития отрасли, p_i-скорость амортизации, $f_i(t)$- внешнее воздействие.

Поставим задачу об ω- кратном изменении фондов к конечному моменту времени nT.

$$\begin{cases} x_1(nT) = \omega_1 x_1(0), \\ x_2(nT) = \omega_2 x_2(0) \end{cases} \quad (18)$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} \frac{tw_1+nT}{nT} & 0 \\ 0 & \frac{tw_2+nT}{nT} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Обозначим через $x(t)$ вектор столбец с двумя компонентами $x_1(t), x_2(t)$, понимая под $x\left(\left[\frac{t}{T}\right] T\right)$ вектор столбец с двумя компонентами $x_1\left(\left[\frac{t}{T_1}\right] T_1\right), x_2\left(\left[\frac{t}{T_2}\right] T_2\right)$ и вводя в рассмотрение вектор-столбец $q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$ и $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$, запишем систему в форме

$$\dot{x}(t) = qx\left(\left[\frac{t}{T}\right] T\right) - px(t) + f(t). \quad (20)$$

$$x(nT) = \omega x(0), \quad (21)$$

где $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, x(nT) = \begin{pmatrix} x_1(nT) \\ x_2(nT) \end{pmatrix}, x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$

ДВУХОТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКЕ (СЛУЧАЙ НЕЗАВИСИМЫХ ОТРАСЛЕЙ)

- $$x(t) = x^0(t) + \bar{\eta}(t), t\epsilon[0; nT], \qquad (22)$$

где $x^0(t) = \begin{pmatrix} {x^0}_1(t) \\ {x^0}_2(t) \end{pmatrix}, \bar{\eta}(t) = \begin{pmatrix} \overline{\eta_1}(t) \\ \overline{\eta_2}(t) \end{pmatrix}$

$$\dot{x}^0(t) = qx^0\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) - px^0(t) + g(t), t\epsilon[0; nT] \qquad (23)$$

$$x^0(nT) = \omega x^0(0) \qquad (24)$$

где $g(t) = f(t) - p\bar{\eta}\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) - q\bar{\eta}(t).$

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{l} \alpha_{ij} \Delta^k = \gamma_i \\ \Delta^k + \Delta^{k+1} = l_k \\ \sum_{j=0}^{m} \int_0^{nT} a_j(s)\, ds \left(\sum_{i=0}^{m} \theta_{ij} \int_0^{nT} b_i(t)\, g(t) \right) - \sum_{j=0}^{m} \int_0^{nT} p(s) a_j(s)\, ds \times \\ \times \left(\sum_{i=0}^{m} \theta_{ij} \int_0^{nT} (b_i(t) \sum_{k=1}^{l} \Delta^k \chi_{[t_k;T]}(t)) dt \right) - \\ - \sum_{j=0}^{m} \int_0^{nT} q(s) a_j(s)\, ds \left(\sum_{i=0}^{m} \theta_{ij} \int_0^{nT} (b_i(t) \sum_{k=1}^{l} \Delta^k \chi_{[t_k;T]}(t)) dt \right) + \int_0^{nT} g(s)\, ds = 0 \end{cases} \qquad (25)$$

Решение краевой задачи

$$x(t) = \sum_{j=0}^{m} \int_0^t a_j(s)\, ds \left(\sum_{i=0}^{m} \theta_{ij} \int_0^{nT} b_i(t)\, f(t) \right)$$

$$- p \sum_{j=0}^{m} \int_0^t a_j(s)\, ds \left(\sum_{i=0}^{m} \theta_{ij} \int_0^{nT} (b_i(t) \sum_{k=1}^{l} \Delta^k \chi_{[t_k;T]}(t)) dt \right) \tag{25.1}$$

$$- q \sum_{j=0}^{m} \int_0^t a_j(s)\, ds \left(\sum_{i=0}^{m} \theta_{ij} \int_0^{nT} (b_i(t) \sum_{k=1}^{l} \Delta^k \chi_{[t_k;T]}(t)) dt \right) + \int_0^t f(s)\, ds$$

$$+ \int_0^t \frac{\omega}{nT} x(0) ds\,.$$

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ФОНДОВ В ДВУХОТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКЕ (СЛУЧАЙ ЗАВИСИМЫХ ОТРАСЛЕЙ)

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = q_{11}x_1\left(\left\lfloor\frac{t}{T_1}\right\rfloor T_1\right) + q_{12}x_2\left(\left\lfloor\frac{t}{T_2}\right\rfloor T_2\right) - p_{11}x_1(t) - p_{12}x_2(t) + f_1(t), \\ \dot{x_2}(t) = q_{21}x_1\left(\left[\frac{t}{T_1}\right] T_1\right) + q_{22}x_2\left(\left[\frac{t}{T_2}\right] T_2\right) - p_{21}x_1(t) - p_{22}x_2(t) + f_2(t) \end{cases} \qquad (26)$$

Где x_1, x_2- объем основных средств в момент времени t 1,2- отрасли соответственно;

q_{11}, q_{21}- положительный коэффициент, характеризирующий эффективность использования основных средств 1- отрасли;

q_{12}, q_{22}- положительный коэффициент, характеризирующий эффективность использования основных средств2- отрасли;

p_{11}, p_{21}- скорость выбытия основных средств 1- отрасли;

p_{12}, p_{22}- скорость выбытия основных средств 2- отрасли; $\left[\frac{t}{T}\right]$- целая часть числа $\frac{t}{T}$;

$f_1(t), f_2(t)$- инвестиционная политика в момент времени t 1,2- отрасли соответственно;

n -натуральное число.

Поставим задачу об ω- кратном изменении фондов к конечному моменту

времени nT:

$$\begin{cases} x_1(nT) = \omega_1 x_1(0), \\ x_2(nT) = \omega_2 x_2(0) \end{cases} \qquad (27)$$

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ФОНДОВ В ДВУХОТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКЕ
(СЛУЧАЙ ЗАВИСИМЫХ ОТРАСЛЕЙ)

- Обозначим через $x(t)$ вектор столбец с двумя компонентами $x_1(t), x_2(t)$, понимая под $x\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right)$ вектор столбец с двумя компонентами $x_1\left(\left[\frac{t}{T_1}\right]T_1\right), x_2\left(\left[\frac{t}{T_2}\right]T_2\right)$ и вводя в рассмотрение матрицы $q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$,

$p = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ и вектор-столбец $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$, запишем (26) в форме

$$\dot{x}(t) = qx\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) - px(t) + f(t). \qquad (28)$$

Так же перезапишем краевое условие (27)

$$x(nT) = \omega x(0), \qquad (29)$$

где $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, x(nT) = \begin{pmatrix} x_1(nT) \\ x_2(nT) \end{pmatrix}, x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$,

Введем импульсное управление $x(t) = x^0(t) + \bar{\eta}(t), t\epsilon[0; nT],$ (30)

где $x^0(t) = \begin{pmatrix} {x^0}_1(t) \\ {x^0}_2(t) \end{pmatrix}, \bar{\eta}(t) = \begin{pmatrix} \overline{\eta_1}(t) \\ \overline{\eta_2}(t) \end{pmatrix}$

$$\dot{x}^0(t) = qx^0\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) - px^0(t) + g(t), t\epsilon[0; nT] \qquad (31)$$

$$x^0(nT) = \omega x^0(0) \qquad (32)$$

где $g(t) = f(t) - p\bar{\eta}\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) - q\bar{\eta}(t).$

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ФОНДОВ В ДВУХОТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКЕ (СЛУЧАЙ ЗАВИСИМЫХ ОТРАСЛЕЙ)

- Получим в итоге систему уравнений для определения импульсного управления $\Delta^1, \Delta^2, \dots, \Delta^l$:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{l} \alpha_{ij} \Delta^k = \gamma_i \\ \Delta^k + \Delta^{k+1} = l_k \\ \sum_{j=0}^{m} \int_0^{nT} a_j(s)\, ds \left(\sum_{i=0}^{m} \theta_{ij} \int_0^{nT} b_i(t)\, g(t) \right) - \sum_{j=0}^{m} \int_0^{nT} p(s) a_j(s)\, ds \times \\ \times \left(\sum_{i=0}^{m} \theta_{ij} \int_0^{nT} (b_i(t) \sum_{k=1}^{l} \Delta^k \chi_{[t_k;T]}(t)) dt \right) - \\ - \sum_{j=0}^{m} \int_0^{nT} q(s) a_j(s)\, ds \left(\sum_{i=0}^{m} \theta_{ij} \int_0^{nT} (b_i(t) \sum_{k=1}^{l} \Delta^k \chi_{[t_k;T]}(t)) dt \right) + \int_0^{nT} g(s)\, ds = 0 \end{cases} \tag{33}$$

Решение краевой задачи

- $$x(t) = \sum_{j=0}^{m} \int_0^t a_j(s)\,ds \left(\sum_{i=0}^{m} \theta_{ij} \int_0^{nT} b_i(t)\,f(t) \right)$$

$$- p \sum_{j=0}^{m} \int_0^t a_j(s)\,ds \left(\sum_{i=0}^{m} \theta_{ij} \int_0^{nT} (b_i(t) \sum_{k=1}^{l} \Delta^k \chi_{[t_k;T]}(t))dt \right) \qquad (33.1)$$

$$- q \sum_{j=0}^{m} \int_0^t a_j(s)\,ds \left(\sum_{i=0}^{m} \theta_{ij} \int_0^{nT} (b_i(t) \sum_{k=1}^{l} \Delta^k \chi_{[t_k;T]}(t))dt \right) + \int_0^t f(s)\,ds$$

$$+ \int_0^t \frac{\omega}{nT} x(0) ds\,.$$

ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ АЛЛЕНА РЫНКА ОДНОГО ТОВАРА С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ОБЪЕМА ПРЕДЛОЖЕНИЯ

$$T\dot{S}(t) + S\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) = D(t) + \eta(t), t \in [0; nT]$$

Где $S(t) = -\beta + bP(t)$ – функция ПРЕДЛОЖЕНИЯ;

$D(t) = \alpha - aP(t)$ – функция СПРОСА;

$P(t)$ – цена единицы товара в момент времени t;

$T > 0$ – лаг запаздывания цены; n – натуральное число;

$\left[\frac{t}{T}\right]$ – целая часть числа $\frac{t}{T}$;

$\eta(t)$ – неконтролируемое возмущение;

Литература

1) ***Соколов В.А., Губайдуллина Р.В***. Об одной задаче импульсного управления в экономической динамике НАУКА И БИЗНЕС: ПУТИ РАЗВИТИЯ № 8(26) 2013 (ВАК)
2) ***Соколов В.А., Стрикун Н.А***. Об одной краевой задаче для модели Вальраса-Эванса-Самуэльсона рынка одного товара ПЕРСПЕКТИВЫ НАУКИ № 8(47) 2013 (РИНЦ)
3) ***Симонов П.М.*** Об одном методе исследования динамических моделей микроэкономики ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. ЭКОНОМИКА. № 1(20) 2014 (ВАК)
4) ***Азбелев Н.В.***, ***Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф***. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.:Наука, 1991
5) ***Максимов В.П., Румянцев А.Н.*** Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ. МАТЕМАТИКА № 5 1993
6) ***Аллен Р.*** Математическая экономия. М.:ИЛ, 1963
7) ***Гранберг А.Г.*** Динамические модели народного хозяйства: Учеб. Пособие для студентов вузов, обучающихся по спец. «Экономическая кибернетика». – М.:Экономика, 1985
8) ***Максимов В.П., Симонов П.М.*** Теория оптимального управления: Ч.2. Элементы теории линейных операторов и операторных уравнений: учеб. пособие; Перм. гос. ун-т.-Пермь, 2010

Спасибо за внимание