

# Импульсное управление моделями экономической динамики

**Научный руководитель:**  
**к.ф.-м.н. доцент кафедры ПМ**  
**Соколов В.А.**  
**Студент:**  
**Паршаков Р.В.**

# ЦЕЛЬ

Исследование разрешимости краевых задач с импульсным управлением для динамических моделей экономики и нахождение импульсного управления



# ЗАДАЧИ

- Модифицировать некоторые динамические модели экономики путем внедрения кусочно-постоянного запаздывания
- Сформулировать краевые задачи для этих моделей
- Преобразовать исходные задачи к задачам с импульсным управлением
- Получить решение дифференциальных уравнений с кусочно-постоянным запаздыванием в явном виде, которые описывают исследуемые динамические модели
- Доказать разрешимость преобразованных краевых задач для каждой модели
- Найти управления, позволяющие достигнуть к конечному моменту времени желаемых результатов

# W – подстановка Азбелева

Краевая задача:  $(Lx)(t) = x'(t) + p(t)x\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) + q(t)x(t) = f(t), t \in [0, nT]$  (1)

$$lx = \psi x(0) + \int_0^{nT} \varphi(s)x'(s)ds = \beta. \quad (2)$$

По числу  $\psi$  и функции  $\varphi$  можно найти такую функцию  $u(t)$ , что  $u(0) \neq 0$ ,  $lu = 1$  и система уравнений

$$x'(t) + B(t)x(0) = z(t), lx = \beta,$$

Где  $B(t) = -\frac{u'(t)}{u(t)}$ , однозначно разрешима и ее решение имеет вид:

$$x(t) = u(t)\beta + \int_0^{nT} W(t,s)z(s)ds. \quad (3)$$

$$\text{Здесь } W(t,s) = \begin{cases} 1 - u(t)\varphi(s), & 0 \leq s \leq t \leq nT \\ -u(t)\varphi(s), & 0 \leq t \leq s \leq nT \end{cases} \quad (4)$$

Краевая задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$z(t) = \int_0^{nT} K(t,s)z(s)ds + g(t), \quad (5)$$

Уравнение заменяется интегральным уравнением Фредгольма второго рода с вырожденным ядром

$$z(t) = \int_0^{nT} \tilde{K}(t,s)z(s)ds + g(t), \tilde{K}(t,s) = \sum_{j=0}^m a_j(t)b_j(s). \quad (6)$$

$$x_i = \sum_{j=0}^5 \alpha_{ij}x_j + c_i, i = \overline{0, m} \quad (7)$$

Исследуется обратимость матрицы  $A$ , построенной с заданной точностью по функциям

# ТЕОРЕМА О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

- Теорема: Пусть матрица

$$A = \{\gamma_{ij}\}, \quad \gamma_{ij} = e_{ij} - \alpha_{ij}, \quad \text{где } e_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}, \quad i, j = \overline{1, m} \quad (8)$$

обратима и выполнено неравенство  $\varepsilon < 1/r$ , где

$$r = 1 + \left\{ \int_0^{nT} \int_0^{nT} [R(t, s)]^2 dt ds \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad R(t, s) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^m a_j(t) \theta_{ji} b_i(s). \quad (9)$$

Тогда краевая задача (1) – (2) однозначно разрешима, и ее

решение имеет представление 
$$\tilde{Y}(t) = \int_0^t \tilde{z}(s) ds - \int_0^t B(s) Y(0) ds \quad (10)$$

с точностью 
$$\int_0^{nT} [z(t) - \tilde{z}(t)]^2 dt \leq \frac{\varepsilon^2 r^4}{(1 - \varepsilon \cdot r)^2} \cdot \int_0^{nT} [f(t)]^2 dt, \quad (11)$$

- При естественных предположениях относительно ядра для любого заданного вырожденное ядро можно определить следующим образом:

$$\int_0^{nT} \int_0^{nT} [K(t, s) - \tilde{K}(t, s)]^2 dt ds \leq \varepsilon^2. \quad (12)$$

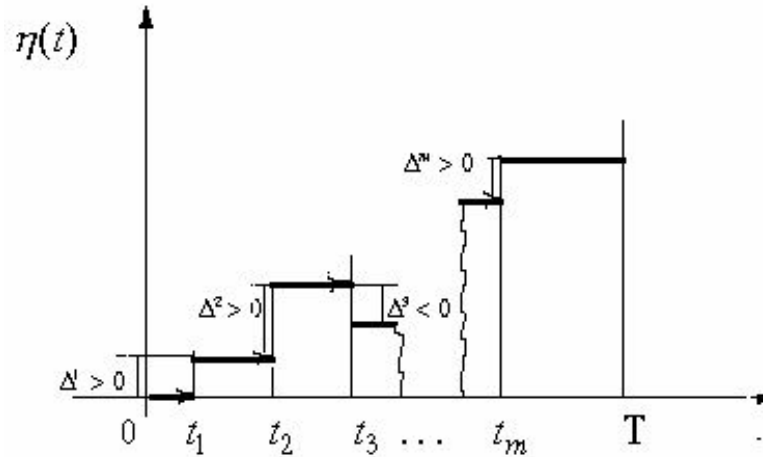
# ИМПУЛЬСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Краевая задача:  $(Lx)(t) = x'(t) + p(t)x\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) + q(t)x(t) = f(t), t \in [0, nT]$  (13)

$$lx = \psi x(0) + \int_0^{nT} \varphi(s)x'(s)ds = \beta. \quad (14)$$

$$x(t) = x^0(t) + \bar{\eta}(t) \quad (15)$$

$$\bar{\eta}(t) = \sum_{k=1}^l \Delta^k \chi_{[t_k; T]}(t), t \in [0; nT] \quad (15.1)$$



где  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l < nT$  - фиксированный набор точек,  $\Delta^k, k = 1, \dots, l$  – постоянные,  $\chi_{[t_k; nT]}(t)$  - характеристическая функция отрезка  $[t_k; nT]$ :

$$\chi_{[t_k; nT]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [t_k; nT], \\ 0, & \text{если } t \notin [t_k; nT]. \end{cases} \quad (16)$$

Под решением уравнения (13) будем понимать такую функцию  $x(t) \in D(t_1, t_2, \dots, t_l)$ , которая удовлетворяет ему всюду на отрезке  $[0; nT]$ , за исключением, быть может, точек  $t_1, t_2, \dots, t_l$ .

# МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ФОНДОВ В ДВУХОТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКЕ (СЛУЧАЙ НЕЗАВИСИМЫХ ОТРАСЛЕЙ).

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = q_1 x_1 \left( \left[ \frac{t}{T_1} \right] T_1 \right) - p_1 x_1(t) + f_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = q_2 x_2 \left( \left[ \frac{t}{T_2} \right] T_2 \right) - p_2 x_2(t) + f_2(t) \end{cases} \quad (17)$$

Где  $x_i$  - фонды,  $q_i$ -эффективность использования фондов для развития отрасли,  $p_i$ -скорость амортизации,  $f_i(t)$ - внешнее воздействие.

Поставим задачу об  $\omega$ - кратном изменении фондов к конечному моменту времени  $nT$ .

$$\begin{cases} x_1(nT) = \omega_1 x_1(0), \\ x_2(nT) = \omega_2 x_2(0) \end{cases} \quad (18)$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} \frac{t\omega_1+nT}{nT} & 0 \\ 0 & \frac{t\omega_2+nT}{nT} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Обозначим через  $x(t)$  вектор столбец с двумя компонентами  $x_1(t), x_2(t)$ , понимая под  $x \left( \left[ \frac{t}{T} \right] T \right)$  вектор столбец с двумя компонентами  $x_1 \left( \left[ \frac{t}{T_1} \right] T_1 \right), x_2 \left( \left[ \frac{t}{T_2} \right] T_2 \right)$  и вводя в рассмотрение вектор-столбец  $q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$  и  $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ , запишем систему в форме

$$\dot{x}(t) = qx \left( \left[ \frac{t}{T} \right] T \right) - px(t) + f(t). \quad (20)$$

$$x(nT) = \omega x(0), \quad (21)$$

где  $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, x(nT) = \begin{pmatrix} x_1(nT) \\ x_2(nT) \end{pmatrix}, x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$

# ДВУХОТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКЕ (СЛУЧАЙ НЕЗАВИСИМЫХ ОТРАСЛЕЙ)

- $x(t) = x^0(t) + \bar{\eta}(t), t \in [0; nT], \quad (22)$

$$\text{где } x^0(t) = \begin{pmatrix} x^0_1(t) \\ x^0_2(t) \end{pmatrix}, \bar{\eta}(t) = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1(t) \\ \bar{\eta}_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}^0(t) = qx^0\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) - px^0(t) + g(t), t \in [0; nT] \quad (23)$$

$$x^0(nT) = \omega x^0(0) \quad (24)$$

$$\text{где } g(t) = f(t) - p\bar{\eta}\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) - q\bar{\eta}(t).$$



# ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{k=1}^l \alpha_{ij} \Delta^k = \gamma_i \\
 \Delta^k + \Delta^{k+1} = l_k \\
 \sum_{j=0}^m \int_0^{nT} a_j(s) ds \left( \sum_{i=0}^m \theta_{ij} \int_0^{nT} b_i(t) g(t) \right) - \sum_{j=0}^m \int_0^{nT} p(s) a_j(s) ds \times \\
 \times \left( \sum_{i=0}^m \theta_{ij} \int_0^{nT} (b_i(t) \sum_{k=1}^l \Delta^k \chi_{[t_k; T]}(t)) dt \right) - \\
 - \sum_{j=0}^m \int_0^{nT} q(s) a_j(s) ds \left( \sum_{i=0}^m \theta_{ij} \int_0^{nT} (b_i(t) \sum_{k=1}^l \Delta^k \chi_{[t_k; T]}(t)) dt \right) + \int_0^{nT} g(s) ds = 0
 \end{array} \right. \quad (25)$$

# Решение краевой задачи

- $$\begin{aligned} x(t) = & \sum_{j=0}^m \int_0^t a_j(s) ds \left( \sum_{i=0}^m \theta_{ij} \int_0^{nT} b_i(t) f(t) \right) \\ & - p \sum_{j=0}^m \int_0^t a_j(s) ds \left( \sum_{i=0}^m \theta_{ij} \int_0^{nT} (b_i(t) \sum_{k=1}^l \Delta^k \chi_{[t_k; T]}(t)) dt \right) \\ & - q \sum_{j=0}^m \int_0^t a_j(s) ds \left( \sum_{i=0}^m \theta_{ij} \int_0^{nT} (b_i(t) \sum_{k=1}^l \Delta^k \chi_{[t_k; T]}(t)) dt \right) + \int_0^t f(s) ds \\ & + \int_0^t \frac{\omega}{nT} x(0) ds. \end{aligned} \tag{25.1}$$

# МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ФОНДОВ В ДВУХОТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКЕ (СЛУЧАЙ ЗАВИСИМЫХ ОТРАСЛЕЙ)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = q_{11}x_1 \left( \left[ \frac{t}{T_1} \right] T_1 \right) + q_{12}x_2 \left( \left[ \frac{t}{T_2} \right] T_2 \right) - p_{11}x_1(t) - p_{12}x_2(t) + f_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = q_{21}x_1 \left( \left[ \frac{t}{T_1} \right] T_1 \right) + q_{22}x_2 \left( \left[ \frac{t}{T_2} \right] T_2 \right) - p_{21}x_1(t) - p_{22}x_2(t) + f_2(t) \end{cases} \quad (26)$$

Где  $x_1, x_2$ - объем основных средств в момент времени  $t$  1,2- отрасли соответственно;

$q_{11}, q_{21}$ - положительный коэффициент, характеризующий эффективность использования основных средств 1- отрасли;

$q_{12}, q_{22}$ - положительный коэффициент, характеризующий эффективность использования основных средств 2- отрасли;

$p_{11}, p_{21}$ - скорость выбытия основных средств 1- отрасли;

$p_{12}, p_{22}$ - скорость выбытия основных средств 2- отрасли;  $\left[ \frac{t}{T} \right]$ - целая часть числа  $\frac{t}{T}$ ;

$f_1(t), f_2(t)$ - инвестиционная политика в момент времени  $t$  1,2- отрасли соответственно;

$n$  - натуральное число.

Поставим задачу об  $\omega$ - кратном изменении фондов к конечному моменту времени  $nT$ :

$$\begin{cases} x_1(nT) = \omega_1 x_1(0), \\ x_2(nT) = \omega_2 x_2(0) \end{cases} \quad (27)$$

# МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ФОНДОВ В ДВУХОТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКЕ (СЛУЧАЙ ЗАВИСИМЫХ ОТРАСЛЕЙ)

Обозначим через  $x(t)$  вектор столбец с двумя компонентами  $x_1(t), x_2(t)$ , понимая под  $x \left( \left[ \frac{t}{T} \right] T \right)$  вектор столбец с двумя компонентами  $x_1 \left( \left[ \frac{t}{T_1} \right] T_1 \right), x_2 \left( \left[ \frac{t}{T_2} \right] T_2 \right)$  и вводя в рассмотрение матрицы  $q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ ,

$p = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$  и вектор-столбец  $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ , запишем (26) в форме

$$\dot{x}(t) = qx \left( \left[ \frac{t}{T} \right] T \right) - px(t) + f(t). \quad (28)$$

Так же перезапишем краевое условие (27)

$$x(nT) = \omega x(0), \quad (29)$$

где  $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, x(nT) = \begin{pmatrix} x_1(nT) \\ x_2(nT) \end{pmatrix}, x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$ ,

Введем импульсное управление  $x(t) = x^0(t) + \bar{\eta}(t), t \in [0; nT]$ , (30)

где  $x^0(t) = \begin{pmatrix} x^0_1(t) \\ x^0_2(t) \end{pmatrix}, \bar{\eta}(t) = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1(t) \\ \bar{\eta}_2(t) \end{pmatrix}$

$$\dot{x}^0(t) = qx^0 \left( \left[ \frac{t}{T} \right] T \right) - px^0(t) + g(t), t \in [0; nT] \quad (31)$$

$$x^0(nT) = \omega x^0(0) \quad (32)$$

где  $g(t) = f(t) - p\bar{\eta} \left( \left[ \frac{t}{T} \right] T \right) - q\bar{\eta}(t)$ .

# МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ФОНДОВ В ДВУХОТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКЕ (СЛУЧАЙ ЗАВИСИМЫХ ОТРАСЛЕЙ)

Получим в итоге систему уравнений для определения импульсного управления  $\Delta^1, \Delta^2, \dots, \Delta^l$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^l \alpha_{ij} \Delta^k = \gamma_i \\ \Delta^k + \Delta^{k+1} = l_k \\ \sum_{j=0}^m \int_0^{nT} a_j(s) ds \left( \sum_{i=0}^m \theta_{ij} \int_0^{nT} b_i(t) g(t) \right) - \sum_{j=0}^m \int_0^{nT} p(s) a_j(s) ds \times \\ \times \left( \sum_{i=0}^m \theta_{ij} \int_0^{nT} (b_i(t) \sum_{k=1}^l \Delta^k \chi_{[t_k; T]}(t)) dt \right) - \\ - \sum_{j=0}^m \int_0^{nT} q(s) a_j(s) ds \left( \sum_{i=0}^m \theta_{ij} \int_0^{nT} (b_i(t) \sum_{k=1}^l \Delta^k \chi_{[t_k; T]}(t)) dt \right) + \int_0^{nT} g(s) ds = 0 \end{array} \right. \quad (33)$$

# Решение краевой задачи

$$\begin{aligned} x(t) = & \sum_{j=0}^m \int_0^t a_j(s) ds \left( \sum_{i=0}^m \theta_{ij} \int_0^{nT} b_i(t) f(t) \right) \\ & - p \sum_{j=0}^m \int_0^t a_j(s) ds \left( \sum_{i=0}^m \theta_{ij} \int_0^{nT} (b_i(t) \sum_{k=1}^l \Delta^k \chi_{[t_k; T]}(t)) dt \right) \quad (33.1) \\ & - q \sum_{j=0}^m \int_0^t a_j(s) ds \left( \sum_{i=0}^m \theta_{ij} \int_0^{nT} (b_i(t) \sum_{k=1}^l \Delta^k \chi_{[t_k; T]}(t)) dt \right) + \int_0^t f(s) ds \\ & + \int_0^t \frac{\omega}{nT} x(0) ds. \end{aligned}$$

# ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ АЛЛЕНА РЫНКА ОДНОГО ТОВАРА С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ОБЪЕМА ПРЕДЛОЖЕНИЯ

$$T\dot{S}(t) + S\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) = D(t) + \eta(t), t \in [0; nT]$$

Где  $S(t) = -\beta + bP(t)$  – функция ПРЕДЛОЖЕНИЯ;

$D(t) = \alpha - aP(t)$  – функция СПРОСА;

$P(t)$  – цена единицы товара в момент времени  $t$ ;

$T > 0$  – лаг запаздывания цены;  $n$  – натуральное число;

$\left[\frac{t}{T}\right]$  – целая часть числа  $\frac{t}{T}$ ;

$\eta(t)$  – неконтролируемое возмущение;

# Литература

- 1) **Соколов В.А., Губайдуллина Р.В.** Об одной задаче импульсного управления в экономической динамике НАУКА И БИЗНЕС: ПУТИ РАЗВИТИЯ № 8(26) 2013 (ВАК)
- 2) **Соколов В.А., Стрикун Н.А.** Об одной краевой задаче для модели Вальраса-Эванса-Самуэльсона рынка одного товара ПЕРСПЕКТИВЫ НАУКИ № 8(47) 2013 (РИНЦ)
- 3) **Симонов П.М.** Об одном методе исследования динамических моделей микроэкономики ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. ЭКОНОМИКА. № 1(20) 2014 (ВАК)
- 4) **Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.:Наука, 1991
- 5) **Максимов В.П., Румянцев А.Н.** Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ. МАТЕМАТИКА № 5 1993
- 6) **Аллен Р.** Математическая экономия. М.:ИЛ, 1963
- 7) **Гранберг А.Г.** Динамические модели народного хозяйства: Учеб. Пособие для студентов вузов, обучающихся по спец. «Экономическая кибернетика». – М.:Экономика, 1985
- 8) **Максимов В.П., Симонов П.М.** Теория оптимального управления: Ч.2. Элементы теории линейных операторов и операторных уравнений: учеб. пособие; Перм. гос. ун-т.-Пермь, 2010



**Спасибо за  
внимание**