



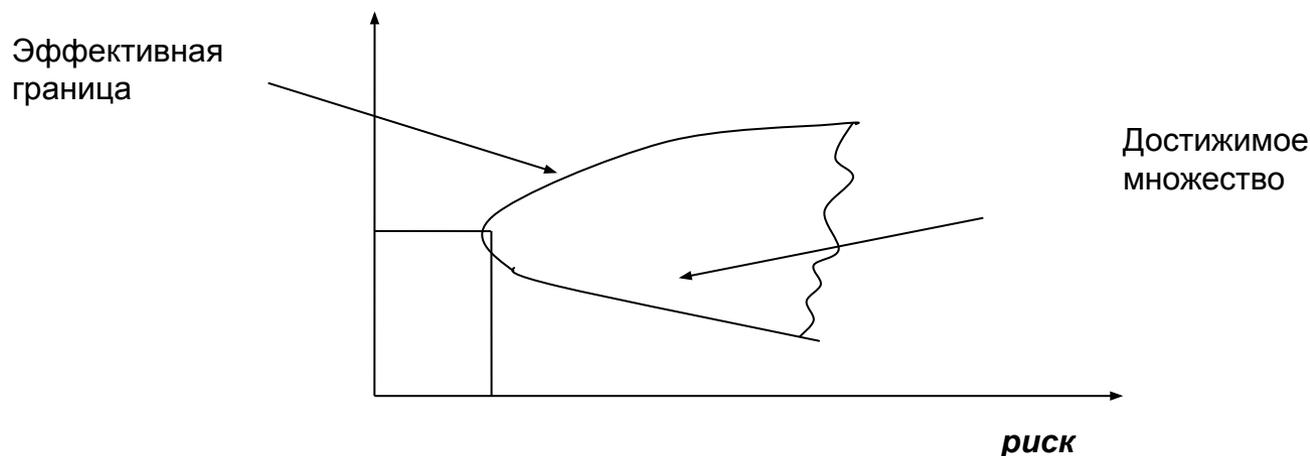
# Количественные методы в финансах

Множество Марковица.  
Эффективная граница.  
Оптимальный портфель.

# Множество Марковица

В плоскости риск - доходность возможно существование множества портфелей. Множество таких портфелей в плоскости риск-доходность образуют некоторое ограниченное множество – **множество Марковица**.

Граница множества является **эффективной границей** в том смысле, что на ней расположены портфели, которые имеют для заданной доходности **минимальную вариацию доходности** – риск или для заданного уровня риска максимальную доходность. Портфели, лежащие вне этой границы недостижимы, а внутри неэффективны.



# Множество Марковица

Модель Марковица основана на следующих предположениях.

- Рынок состоит из конечного числа абсолютно ликвидных активов.
- Доходности являются нормально распределенными случайными величинами, имеющие конечные значения математического ожидания (доходности) и дисперсии (риск).
- Индивидуальные предпочтения инвестора определяются функцией полезности от двух аргументов – ожидаемой доходности и риска.
- Инвесторы не склонны к риску. Инвестор при одинаковых доходностях предпочитает портфель с меньшим риском или при одинаковых рисках инвестор предпочитает портфель с большей доходностью.
- Налоги и транзакционные издержки отсутствуют.

# Эффективный портфель

*Портфель, который имеет наименьший риск при заданной доходности, или максимальную доходность при заданном риске называется эффективным.*

# Эффективная граница

С математической точки зрения нахождение эффективной границы - это задача **оптимизации**. Требуется найти **доли ценных бумаг**, при которых для заданного уровня доходности **риск (вариация)** портфеля будет **минимальной**.

Если необходимо сформировать эффективный портфель из  $N$  бумаг, то для ее решения применяется метод квадратичного программирования или метод множителей Лагранжа.

Для решения задачи об инвестировании необходимо иметь следующую информацию:

- Ожидаемые доходности ценных бумаг из которых предполагается формировать портфель,
- риск (стандартное отклонение доходности) каждой ценной бумаги, матрицу вариаций ковариаций (фактически ковариацию каждой пары бумаг)

# Эффективная граница

Для математической формулировки задачи оптимизации удобно записать ее в матричном виде. Используя введенные ранее обозначения для вариации портфеля

$$VAR(r_p) = W^T \cdot VCV \cdot W \Rightarrow \min \text{ (целевая функция)}$$

$$E(r_p) = R \cdot W^T = R_p \quad \text{при ограничениях}$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Целевая функция при введении множителей приобретает вид

$$L = Var(r_p) + \lambda_1 * (E(r_p) - R_p) + \lambda_2 * (\sum_i w_i - 1)$$

Для трех акций лагранжиан равен

$$L = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + w_3^2 \sigma_3^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12} + 2w_1 w_3 \sigma_{13} + 2w_2 w_3 \sigma_{23} + \lambda_1 (w_1 r_1 + w_2 r_2 + w_3 r_3 - R_p) + \lambda_2 (w_1 + w_2 + w_3 - 1)$$

# Эффективная граница

Условие минимума означает выполнения равенства частных производных  $L$  первого порядка. Значение второй производной автоматически больше нуля, поскольку вариация  $\text{Var}(r_p)$  является выпуклой функцией долей.

Решая задачу для трех активов в результате получим систему из пяти линейных уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 2w_1\sigma_1^2 + 2w_2\sigma_{12} + 2w_3\sigma_{13} + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = 2w_2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_{12} + 2w_3\sigma_{23} + \lambda_1 r_2 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_3} = 2w_3\sigma_3^2 + 2w_1\sigma_{13} + 2w_2\sigma_{23} + \lambda_1 r_3 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = w_1 r_1 + w_2 r_2 + w_3 r_3 - R_p = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = w_1 + w_2 + w_3 - 1 = 0$$

# Эффективная граница

В матричном виде система уравнений имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{121} & 2\sigma_{13} & r_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_2^2 & 2\sigma_{23} & r_2 & 1 \\ 2\sigma_{31} & 2\sigma_{32} & 2\sigma_3^2 & r_3 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_p \\ 1 \end{vmatrix}$$

Обозначим матрицу вариация -доходность как  $VCV1$ , вектор содержащий доли и множители Лагранжа, который необходимо найти, как  $W1$ , а вектор доходностей справа, как  $A$ , то уравнение в матричном виде запишется как

$$VCV1 * W1 = A$$

Решение этого уравнения в матричном виде имеет вид

$$W1 = VCV1^{-1} \cdot A$$

# Эффективная граница.

Задачу нахождения эффективной границы можно решить в Excel, применяя процедуру известную, как «Поиск решения».

Задание				Решение	
Рассчитать эффективный портфель, используя метод оптимизации				Присвоить имя ячейке с заданной доходностью и присвоить имя целевой ячейке	
В Excel - ПОИСК РЕШЕНИЯ				Присвоить имена изменяемым ячейкам	
<b>Основные данные</b>				<b>цель</b>	
активы	Акции 1	Акции 2	Акции 3	заданная доходность портфеля	16,0%
r-доходность (вектор-строка E(r))	0,23	0,14	0,05	$E(r_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i)$	
риск (стандартное отклонение)	0,96	0,93	0,73		
Корреляционная матрица				веса активов в портфеле (вектор-столбец W)	
	Акции 1	Акции 2	Акции 3	Акции 1	0,36
Акции 1	1,00	0,07	-0,83	Акции 2	0,51
Акции 2	0,07	1,00	-0,53	Акции 3	0,13
Акции 3	-0,83	-0,53	1,00	изменяемые ячейки	
Матрица вариаций-ковариаций VCV				целевая ячейка	
	Акции 1	Акции 2	Акции 3	доходность портфеля	0,16
Акции 1	1,026	0,070	-0,647	риск (стандарт откл)	0,56
Акции 2	0,070	0,958	-0,399	Вариация (дисперсия) Вариация портфеля равна сторочка доли*матрица ковариаций*столбец доли	
Акции 3	-0,647	-0,399	0,587		
				СУММПРОИЗВ(С6:Е6;ТРАНСП(П10:П13))	
				МУМНОЖ(ТРАНСП(П11:П13);МУМНОЖ(Д17:Ф19;П11:П13))	

При вводе формулы нажать CTRL+Shift+Enter

# Эффективный портфель из N активов

$$VCV1 = \begin{vmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & 2\sigma_{13} & \dots & 2\sigma_{1N} & r_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_2^2 & 2\sigma_{23} & \dots & 2\sigma_{2N} & r_2 & 1 \\ 2\sigma_{31} & 2\sigma_{32} & 2\sigma_3^2 & \dots & 2\sigma_{3N} & r_3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 2\sigma_{N1} & 2\sigma_{N2} & 2\sigma_{N3} & \dots & \dots & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_N & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_p \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$W1 = VCV1^{-1} \cdot A$$

# Задача с запрещенной короткой позицией

Все веса должны быть неотрицательны. Условия для нахождения эффективного портфеля с разрешенной короткой позицией имеют вид

$$\begin{aligned} & \text{целевая функция} \\ & \sigma^2(w_i, w_j) = W^T \cdot VCV \cdot W \Rightarrow \min \\ & \text{при ограничениях} \\ & r_p = R \cdot W^T = r_p \\ & \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ & w_i \geq 0 \end{aligned}$$

# Задача с запрещенной короткой позицией

Для лагранжиана задача при запрещенной короткой позиции имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_i} \geq 0; \quad \omega_i \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \leq 0; \quad \lambda_i \geq 0$$

$$\omega_i \frac{\partial L}{\partial \omega_i} = 0; \quad \lambda_i \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0$$

Задача решается численно.

Пример. Пусть на рынке имеются три акции. Доходности, стандартное отклонение ковариация даны ниже в таблице

	Ожидаемая доходность	Стандартное отклонение.	Ковариация	Пары(I,J)
Акции 1	0,23	0,96	0,07	1,2
Акции 2	0,14	0,93	-0,58	1,3
Акции 3	0,05	0,73	-0,36	2,3

Найти эффективный портфель, имеющий доходность 16%.

Решение методом множителей Лагранжа.

$$W1 = VCV1^{-1} \cdot A$$

Доходность рассчитаем по формуле

$$r_p = \sum_{i=1}^n w_i r_i$$

Риск по формуле

$$\sigma_p^2 = \sum_i \sum_j w_i w_j \text{cov}(i, j)$$

# Эффективный портфель из 3-х бумаг

Матрица VCV1					Вектор доходности R	<u>вектор-долей</u> W1
1,843	0,140	-1,164	<b>0,23</b>	1	0	<b>w1</b>
0,140	1,722	-0,719	<b>0,14</b>	1	0	<b>w2</b>
-1,164	-0,719	1,056	<b>0,05</b>	1	0	<b>w3</b>
<b>0,23</b>	<b>0,14</b>	<b>0,05</b>	0	0	<b>0,16</b>	$\lambda_1$
1	1	1	0	0	1	$\lambda_2$

Решая систему линейных уравнений в матричном виде (4.40), получим, что доли акций в эффективном портфеле равны

доли в портфеле	
Акция 1	0,54
Акция 2	0,15
Акция 3	0,31

## Портфель из двух активов.

Риск и доходность портфеля из двух бумаг легко находится из формул

$$r_p = w_1 r_1 + w_2 r_2$$

$$\sigma_p = \left[ w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \text{cov}(1,2) \right]^{1/2}$$

$$\text{cov}(1,2) = \rho \sigma_1 \sigma_2$$

Поскольку сумма весов в портфеле должна быть равна единице, то выразим вес акции 2 через вес акции (1 -  $\omega_1$ );  $\omega_2 = 1 - \omega_1$

$$r_p = \omega_1 (r_1 - r_2) + r_2$$

$$\sigma_p^2 = \sigma_2^2 + \omega_1^2 (\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) + 2\omega_1 (\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)$$

# Эффективный портфель из двух бумаг

Приравнивая производную от дисперсии к нулю получим

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \omega_1} = 2\omega_1 \cdot (\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) + 2(\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2) = 0$$

Доля первого актива равна

$$\omega_1 = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

- Минимальный риск будет при корреляции равной

- 

$$\omega_1 = \frac{\sigma_2^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}$$

# Эффективный портфель из двух бумаг

Доходность при  $\rho = \pm 1$  равна

$$r_p = C + B\sigma_p$$

при  $\rho = -1$  коэффициенты соответственно равны

$$C = r_2 + \frac{r_1 - r_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \sigma_2 \quad B = \frac{r_1 - r_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

При этом, если  $r_1 > r_2$ , то  $B > 0$ , и наклон положительный

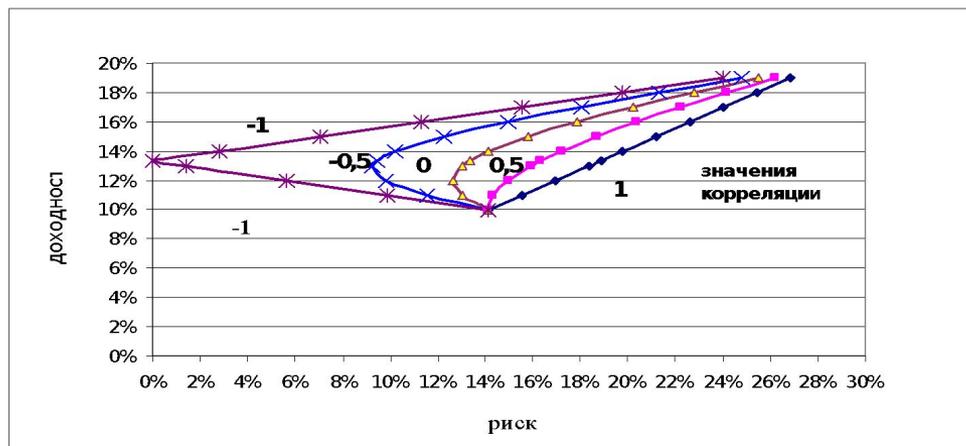
При  $r_1 < r_2$  наклон отрицательный.  
 $B < 0$

Для  $\rho = 1$   $C = r_2 - \frac{r_1 - r_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \sigma_2$   $B = \frac{r_1 - r_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$

Коэффициент  $B$  как правило положителен, поскольку большей доходности соответствует больший риск. Уравнения задают множество портфелей в зависимости от коэффициента корреляции в неявном (параметрическом) виде

$$r_p = \omega_1(r_1 - r_2) + r_2$$

$$\sigma_p^2 = \sigma_1^2 \omega_1^2 + \omega_1^2 (1 - \omega_1)^2 \sigma_2^2 + 2 \omega_1 (1 - \omega_1) \rho \sigma_1 \sigma_2$$



## Эффективный портфель из двух бумаг

Пример Дисперсии акций равны  $\sigma_A^2 = 0,4^2$ ,  $\sigma_B^2 = 0,5^2$ , ковариация равна  $\rho = 0,25$ .

Найти портфель с минимальным риском.

Решение. Минимальный риск будет иметь портфель, содержащий долю акций типа A

равную (4.53)  $\omega_A = \frac{0,5^2 - 0,25 \cdot 0,4 \cdot 0,5}{0,4^2 + 0,5^2 - 2 \cdot 0,25 \cdot 0,4 \cdot 0,5} = \frac{20}{31}$ . Подставляя далее в выражение (4.51)

для дисперсии значения долей акций найдем, что риск портфеля из двух бумаг равен

$$\sigma_p = 3,48\%.$$

# Оптимальный портфель

**Для инвестора оптимальный портфель – это портфель, который находится на точке касания кривых безразличия инвестора и границы эффективного множества Марковица**

**Соотношение риска и ожидаемой доходности инвестиции для инвестора описывается функцией полезности или функцией предпочтений инвестора, которая характеризует отношение инвестора к получению прибыли в условиях неопределенности.**

**Теория полезности основывается на том, что в условиях неопределенности получения будущих доходов, даже при наличии количественных оценок риска, инвесторы считают, что большей полезности (доходности) отвечает большая неопределенность (риск).**

# Функция полезности.

Функция полезности связана с неопределенностью получения будущих доходов имеет вид

$$U(E(r)) = \sum_{i=1}^b p_i U(r_i)$$

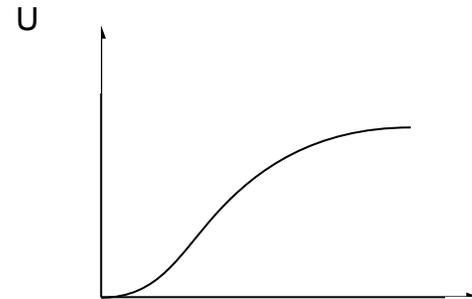
Два вида функции полезности:

- квадратичная (классическая).
- логарифмическая (функция полезности Марковитца)

Квадратичная функция полезности имеет вид

$$U(W) = W - AW^2$$

Логарифмическая функция полезности по Марковитцу имеет S образный вид



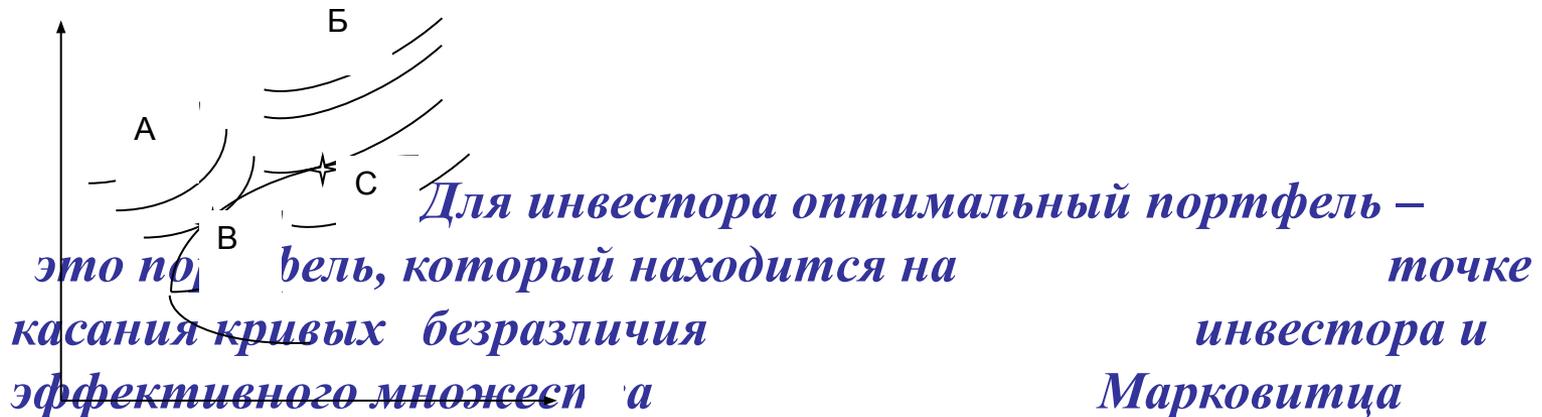
# Функция полезности.

В терминах ожидаемой доходности квадратичная функция полезности имеет вид

$$EU(r) = E(r) + CE(r^2)$$

Поскольку доходность – это случайная величина, которая является нормально распределенной величиной, то для ожидаемой полезности получим

$$EU(r) = AE(r) - \cdot B \cdot \sigma^2$$



# Функция полезности. Эффективный портфель.

Оптимальный портфель в зависимости от отношения инвестора к риску сводится задаче оптимизации

$$A / B r_p - \sigma_p^2 = C \sum_{i=1}^N \omega_i r_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \rightarrow \max$$

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 1 \quad C = A / B$$

Применяя метод множителей Лагранжа для нахождения максимума

$$L(\omega_i, \lambda) = C r_p - \sigma_p^2 + \lambda \left( \sum_{i=1}^N \omega_i - 1 \right)$$

Эффективное множество

$$r_p = r_{\min} + C r_x$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_{\min}^2 + C \sigma_x^2}$$

