МГИМО²

Инновационная образовательная программа

Количественные методы в финансах

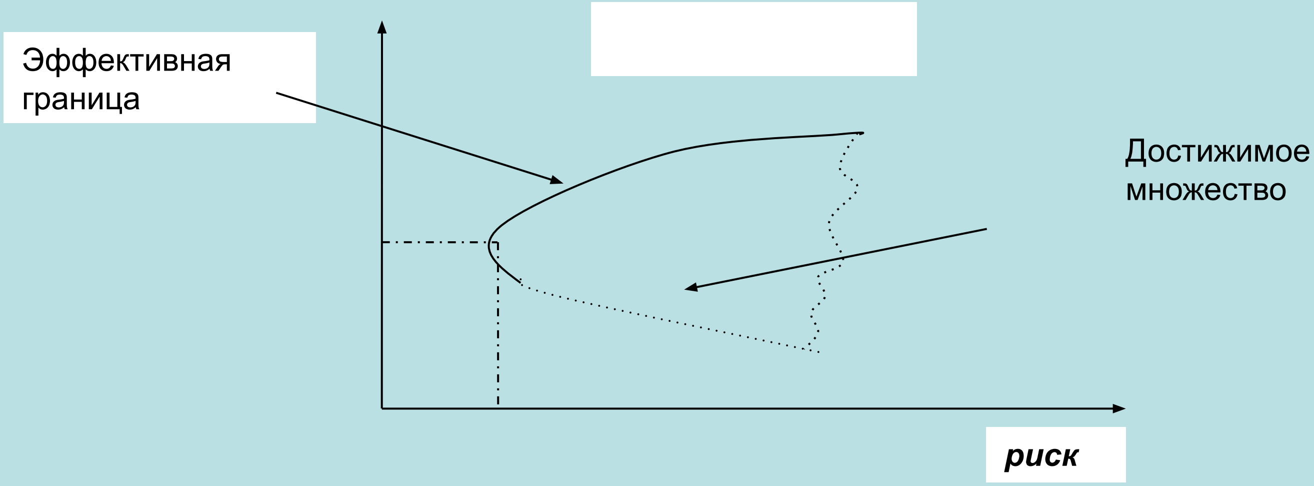
Множество Марковица.
Эффективная граница.
Оптимальный портфель.

Москва-2008

Множество Марковица

В плоскости риск - доходность возможно существование множества портфелей. Множество таких портфелей в плоскости риск-доходность образуют некоторое ограниченное множество – ***множество Марковица.***

Граница множества является ***эффективной границей*** в том смысле, что на ней расположены портфели, которые имеют для заданной доходности минимальную вариацию доходности – риск или для заданного уровня риска максимальную доходность. Портфели, лежащие вне этой границы недостижимы, а внутри неэффективны.



Множество Марковица

Модель Марковица основана на следующих предположениях.

- Рынок состоит из конечного числа абсолютно ликвидных активов.
- Доходности являются нормально распределенными случайными величинами, имеющие конечные значения математического ожидания (доходности) и дисперсии (риск).
- Индивидуальные предпочтения инвестора определяются функцией полезности от двух аргументов – ожидаемой доходности и и риска.
- Инвесторы не склонны к риску. Инвестор при одинаковых доходностях предпочитает портфель с меньшим риском или при одинаковых рисках инвестор предпочитает портфель с большей доходностью.
- Налоги и транзакционные издержки отсутствуют.

Эффективный портфель

Портфель, который имеет наименьший риск при заданной доходности, или максимальную доходность при заданном риске называется эффективным.

Эффективная граница

С математической точки зрения нахождение эффективной границы - это задача оптимизации. Требуется найти доли ценных бумаг, при которых для заданного уровня доходности риск (вариация) портфеля будет минимальной.

Если необходимо сформировать эффективный портфель из N бумаг, то для ее решения применяется метод квадратичного программирования или метод множителей Лагранжа.

Для решения задачи об инвестировании необходимо иметь следующую информацию:

- Ожидаемые доходности ценных бумаг из которых предполагается формировать портфель,
- риск (стандартное отклонение доходности) каждой ценной бумаги, матрицу вариаций ковариаций (фактически ковариацию каждой пары бумаг)

Эффективная граница

Для математической формулировки задачи оптимизации удобно записать ее в матричном виде. Используя введенные ранее обозначения для вариации портфеля

$$VAR(r_p) = W^T \cdot VCV \cdot W \Rightarrow \min \quad \text{(целевая функция)}$$

$$E(r_p) = R \cdot W^T = R_p \qquad \text{при ограничениях}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Целевая функция при введении множителей приобретает вид

$$L = Var(r_p) + \lambda_1 * (E(r_p) - R_p) + \lambda_2 * (\sum_i w_i - 1)$$

Для трех акций лангранжиан равен

$$L = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23} +$$
$$\lambda_1(w_1r_1 + w_2r_2 + w_3r_3 - R_p) + \lambda_2(w_1 + w_2 + w_3 - 1)$$

Эффективная граница

Условие минимума означает выполнения равенства частных производных ***L*** первого порядка. Значение второй производной автоматически больше нуля, поскольку вариация Var(rp) является выпуклой функцией долей.

Решая задачу для трех активов в результате получим систему из пяти линейных уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 2w_1\sigma_1^2 + 2w_2\sigma_{12} + 2w_3\sigma_{13} + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = 2w_2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_{12} + 2w_3\sigma_{23} + \lambda_1 r_2 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_3} = 2w_3\sigma_3^2 + 2w_1\sigma_{13} + 2w_2\sigma_{23} + \lambda_1 r_3 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = w_1 r_1 + w_2 r_2 + w_3 r_3 - R_p = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = w_1 + w_2 + w_3 - 1 = 0$$

Эффективная граница

В матричном виде система уравнений имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{121} & 2\sigma_{13} & r_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_2^2 & 2\sigma_{23} & r_2 & 1 \\ 2\sigma_{31} & 2\sigma_{32} & 2\sigma_3^2 & r_3 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_p \\ 1 \end{vmatrix}$$

Обозначим матрицу вариация -доходность как **VCV1**, вектор содержащий доли и множители Лагранжа, который необходимо найти, как **W1,** а вектор доходностей справа, как **A**, то уравнение в матричном виде запишется как

VCV1*W1=A

Решение этого уравнения в матричном виде имеет вид

$$W1 = VCV1^{-1} \cdot A$$

Эффективная граница.

Задачу нахождения эффективной границы можно решить в Excel, применяя процедуру известную, как «Поиск решения».

Задание

Рассчитать эффективный портфель, используя метод опитимизации

В Excel - **ПОИСК РЕШЕНИЯ**

Решение

Присвоить имя ячейке с заданной доходностью	цель
Присвоить имя целевой ячейке	***доходн***
Присвоить имена изменяемым ячейкам	***Акции 2***
	Акции 3

Установить курсор в целевую ячеку и вызвать

Сервис-Поиск решения

Основные данные

активы	Акции 1	Акции 2	Акции 3
r-доходность (вектор-строка **E** (**r**))	**0,23**	**0,14**	**0,05**
риск (стандартное отклонение)	**0,96**	**0,93**	**0,73**

	цель
заданная доходность портфеля	**16,0%**

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i)$$

Корреляционна матрица

	Акции 1	Акции 2	Акции 3
Акции 1	1,00	**0,07**	**-0,83**
Акции 2	0,07	1,00	**-0,53**
Акции 3	-0,83	-0,53	1,00

веса активов в портфеле (вектор-столбец W)

Акции 1	0,36	
Акции 2	***0,51***	изменяемые ячейки
Акции 3	***0,13***	

При вводе формулы нажать CTRL+Shift+Enter

Матрица вариаций-ковариаций

VCV

	Акции 1	Акции 2	Акции 3
Акции 1	1,026	0,070	-0,647
Акции 2	0,070	0,958	-0,399
Акции 3	-0,647	-0,399	0,587

целевая ячейка

	доходн	
доходность портфел	0,16	**СУММПРОИЗВ(C6:E6;ТРАНСП(I10:I13))**
риск (стандарт откло	0,56	
Вариация(дисперси	0,310	**МУМНОЖ(ТРАНСП(I11:I13);МУМНОЖ(D17:F19;I11:I13))**

Вариация портфеля равна

сторока доли*марица ковариаций*столбец доли

Эффективный портфель из N активов

$$
\mathrm{VCV1} = \begin{vmatrix}
2\sigma_1^2 & 2\sigma_{121} & 2\sigma_{13} & \cdots & 2\sigma_{1N} & r_1 & 1 \\
2\sigma_{21} & 2\sigma_2^2 & 2\sigma_{23} & \cdots & 2\sigma_{2N} & r_2 & 1 \\
2\sigma_{31} & 2\sigma_{32} & 2\sigma_3^2 & \cdots & 2\sigma_{3N} & r_3 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\
2\sigma_{N1} & 2\sigma_{N2} & 2\sigma_{N3} & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\
r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_N & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_p \\ 1 \end{vmatrix}
$$

$$
W1 = VCV1^{-1} \cdot A
$$

Задача с запрещенной короткой позицией

Все веса должны быть неотрицательны. Условия для нахождения эффективного портфеля с разрешенной короткой позицией имеют вид

целевая функция

$$\sigma^2(w_i, w_j) = W^T \cdot VCV \cdot W \Rightarrow \min$$

при ограничениях

$$r_p = R \cdot W^T \quad = r_p$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$\omega_i \geq 0$$

Задача с запрещенной короткой позицией

Для лагранжиана задача при запрещенной короткой позиции имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_i} \geq 0; \quad \omega_i \geq 0; \quad \mathbf{i = 1,2,\ldots N}\,; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \leq 0; \quad \lambda_i \geq 0$$

$$\omega_i \frac{\partial L}{\partial \omega_i} = 0; \quad \lambda_i \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0$$

Задача решается численно.

Пример. Пусть на рынке имеются три акции. Доходности, стандартное отклонение ковариация даны ниже в таблице

	Ожидаемая доходность	Стандартное отклонение.	Ковариация	Пары(I,J)
Акции 1	0,23	0,96	0,07	1,2
Акции 2	0,14	0,93	-0,58	1,3
Акции 3	0,05	0,73	-0,36	2,3

Найти эффективный портфель, имеющий доходность 16%.

Решение методом множителей Лагранжа.

$$W1 = VCV1^{-1} \cdot A$$

Доходность рассчитаем по формуле $$r_p = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$$

Риск по формуле $$\sigma_p^2 = \sum_i \sum_j w_i w_j \operatorname{cov}(i, j)$$

Эффективный портфель из 3-х бумаг

Матрица **VCV1**					Вектор доход-ности R	вектор-долей **W1**
1,843	*0,140*	*-1,164*	**0,23**	1	0	**w1**
0,140	*1,722*	*-0,719*	**0,14**	1	0	**w2**
-1,164	*-0,719*	*1,056*	**0,05**	1	0	**w3**
0,23	**0,14**	**0,05**	0	0	**0,16**	λ_1
1	1	1	0	0	1	λ_2

Решая систему линейных уравнений в матричном виде (4.40), получим, что доли акций в эффективном портфеле равны

доли в портфеле	
Акция 1	0,54
Акция 2	0,15
Акция 3	0,31

Портфель из двух активов.

Риск и доходность портфеля из двух бумаг легко находится из формул

$$r_p = w_1 r_1 + w_2 r_2$$

$$\sigma_p = \left[w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1\ w_2 \operatorname{cov}(1,2)\right]^{1/2}$$

$$\operatorname{cov}(1,2) = \rho\sigma_1\sigma_2$$

Поскольку сумма весов в портфеле должна быть равна единице, то выразим вес акции 2 через вес акции ($1 - \omega_1$); $\omega_2 = 1 - \omega_1$

$$r_p = \omega_1(r_1 - r_2) + r_2$$

$$\sigma_p{}^2 = \sigma_2^2 + \omega_1^2(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) + 2\,\omega_1(\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)$$

Эффективный портфель из двух бумаг

Приравнивая производную от дисперсии к нулю получим

$$\frac{\partial\sigma^2}{\partial\omega_1} = 2\omega_{1.}\cdot(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) + 2(\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2) = 0$$

Доля первого актива равна

$$\omega_1 = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

- Минимальный риск будет при корреляции равной
-

$$\omega_1 = \frac{\sigma_2 \cdot}{(\sigma_1 + \sigma_2)}$$

Эффективный портфель из двух бумаг

Доходность при $\rho = \pm 1$ равна

$$r_p = C + B\sigma_p$$

при $\rho = -1$ коэффициенты соответственно равны

$$C = r_2 + \frac{r_1 - r_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\sigma_2 \qquad B = \frac{r_1 - r_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

При этом, если $r_1 > r_2$, то $B > 0,$ и наклон положительный

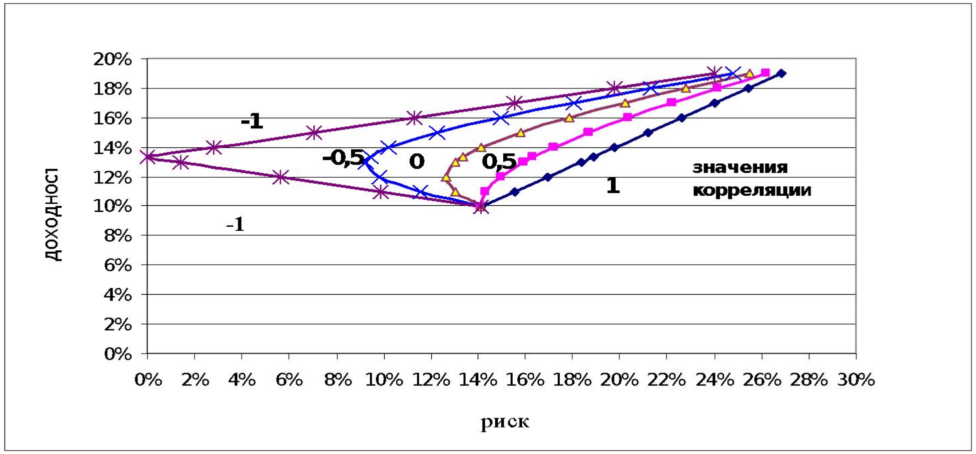
При $r_1 < r_2$ $B < 0$ наклон отрицательный.

Для $\rho = 1$ $C = r_2 - \dfrac{r_1 - r_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\sigma_2$ $B = \dfrac{r_1 - r_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$

Коэффициент B как правило положителен, поскольку большей доходности соответствует больший риск. Уравнения задают множество портфелей в зависимости от коэффициента корреляции в неявном (параметрическом) виде

$$r_p = \omega_1 (r_1 - r_2) + r_2$$

$$\sigma_p{}^2 = \sigma_1^2 \omega_1^2 + \omega_1^2 (1 - \omega_1)^2 \sigma_2^2 + 2\,\omega_1 (1 - \omega_1) \rho \sigma_1 \sigma_2$$



Эффективный портфель из двух бумаг

Пример. Дисперсии акций равны $\sigma_A^2 = 0{,}4^2$, $\sigma_B^2 = 0{,}5^2$, ковариация равна $\rho = 0{,}25$.

Найти портфель с минимальным риском.

Решение. Минимальный риск будет иметь портфель, содержащий долю акций типа А

равную(4.53) $\omega_A = \dfrac{0{,}5^2 - 0{,}25 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5}{0{,}4^2 + 0{,}5^2 - 2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5} = \dfrac{20}{31}$. Подставляя далее в выражение (4.51)

для дисперсии значения долей акций найдем, что риск портфеля из двух бумаг равен

$\sigma_p = 3{,}48\%$.

Оптимальный портфель

Для инвестора оптимальный портфель – это портфель, который находится на точке касания кривых безразличия инвестора и границы эффективного множества Марковица

Соотношение риска и ожидаемой доходности инвестиции для инвестора описывается функцией полезности или функцией предпочтений инвестора, которая характеризует отношение инвестора к получению прибыли в условиях неопределенности.

Теория полезности основывается на том, что в условиях неопределенности получения будущих доходов, даже при наличии количественных оценок риска, инвесторы считают, что большей полезности (доходности) отвечает большая неопределенность (риск).

Функция полезности.

Функция полезности связана с неопределенностью получения будущих доходов имеет вид

$$U(E(r)) = \sum_{i=1}^{b} p_i U(r_i)$$

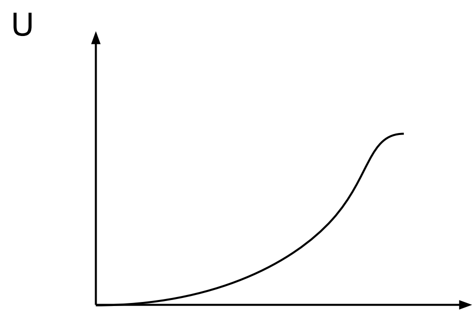
Два вида функции полезности:

- квадратичная (классическая).
- логарифмическая (функция полезности Марковитца

Квадратичная функция полезности имеет вид

$$U(W) = W - AW^2$$

Логарифмическая функция полезности по Марковитцу имеет S образный вид



Функция полезности.

В терминах ожидаемой доходности квадратичная функция полезности имеет вид

$$EU(r) = E(r) + CE(r^2)$$

Поскольку доходность – это случайная величина, которая является нормально распределенной величиной, то для ожидаемой полезности получим

$$EU(r) = AE(r) - \cdot B \cdot \sigma^2$$

Для инвестора оптимальный портфель – это портфель, который находится на точке касания кривых безразличия инвестора и эффективного множества Марковитца

Функция полезности. Эффективный портфель.

Оптимальный портфель в зависимости от отношения инвестора к риску сводится задаче оптимизации

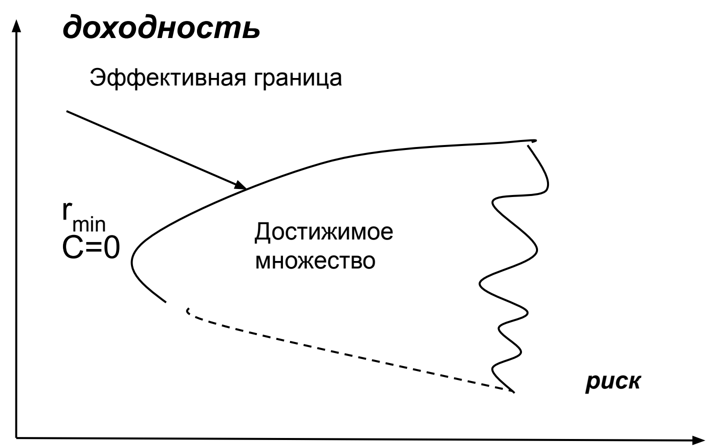
$$A / Br_p - \sigma_p{}^2 = C\sum_{i=1}^{N}\omega_i r_i - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\omega_i\omega_j\sigma_{ij} \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{N}\omega_i = 1 \qquad C = A / B$$

Применяя метод множителей Лагранжа для нахождения максимума

$$L(w_i, \lambda) = Cr_p - \sigma_p^2 + \lambda\left(\sum_{i=1}^{N}\omega_i - 1\right)$$

Эффективное множество



$$r_p = r_{\min} + Cr_x$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_{\min}^2 + C\sigma_x^2}$$