



# Пути вскрытия RSA

Полиномиально  
эквиваленты

1

Дано:  $n, e,$   
 $M^e \bmod n$

Найти:  $M$   
Задача RSA

2

Фактори-  
зация  
модуля

$n$

3

Вычисление  
функции

$\varphi(n)$

4

Расчет  
закрытой  
экспоненты  
 $d = e^{-1} \bmod \varphi(n)$

# Пути вскрытия RSA :

факторизация  $n \sim$  вычисление  $\varphi(n)$

Как зная  $p$  и  $q$ , найти  $\varphi(n)$  ?



$$n = pq$$



$$\varphi(n) = (p-1)(q-1)$$



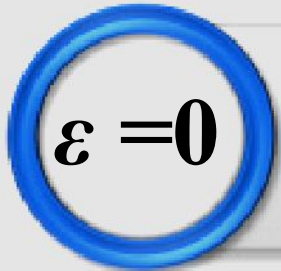
$$\begin{cases} pq = n, \\ \varphi(n) = (p-1)(q-1) = pq - (p+q) + 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} pq = n, \\ p+q = n - \varphi(n) + 1, \end{cases}$$

$$x^2 - (n - \varphi(n) + 1)x + n = 0.$$

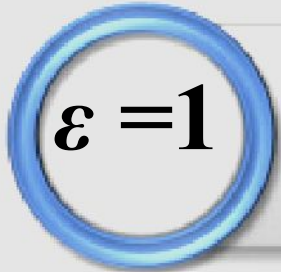
# $L$ -нотация для обозначения сложности алгоритмов факторизации чисел

$$L_N(\varepsilon, c) = e^{(c+O(1))} (\log_2 N)^\varepsilon (\log_2 \log_2 N)^{1-\varepsilon}$$



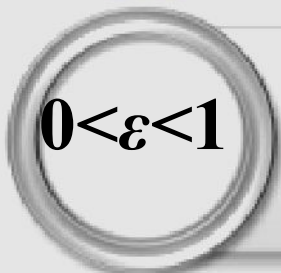
**ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ**

Эффективны



**ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ**

Не эффективны



**СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ**

Чем ближе  $\varepsilon$  к 0, тем алгоритм более эффективен

# Наиболее эффективные алгоритмы факторизации

Квадратичное  
решето

$$L_N\left(\frac{1}{2}, 1\right) = e^{(1+O(1))(\log_2 N \cdot \log_2 \log_2 N)^{1/2}}$$

Факторизация  
на  
эллиптических  
кривых

$$L_N\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right) = e^{(1+O(1))(2\log_2 p \cdot \log_2 \log_2 p)^{1/2}}$$

$p$  – наименьший множитель числа  $N$

Общий метод  
решета  
числового поля

$$L_N\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{\frac{64}{9}}\right) =$$
$$= e^{(1,92+O(1))(\log_2 N^{1/3} \cdot \log_2 \log_2 N)^{2/3}}$$

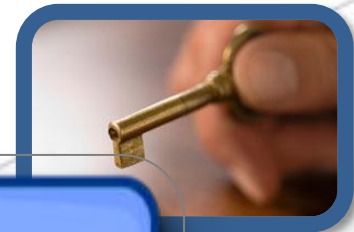
# Последние результаты факторизации больших чисел

Factorization of a 768-bit RSA modulus

version 1.4, February 18, 2010

**решето числового поля**

Thorsten Kleinjung ,  
Kazumaro Aoki , Jens Franke , Arien K. Lenstra , Emmanuel Thomé ,  
Joppe W. Bos , Pierrick Gaudry , Alexander Kruppa , Peter L. Montgomery ,  
Dag Arne Osvik , Herman te Riele , Andrey Timofeev , and Paul Zimmermann

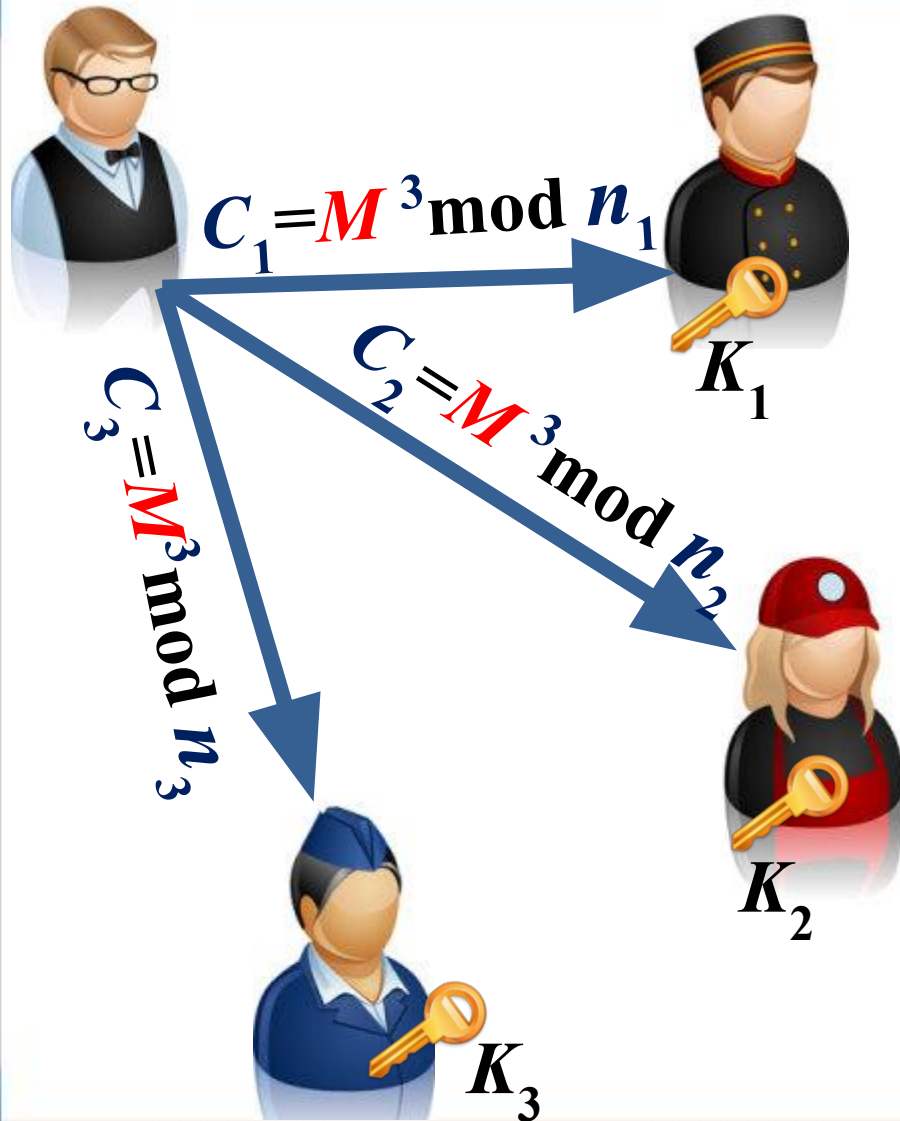


Числовое поле  
быстрее для очень  
больших чисел

Для RSA квадратичное  
решето лучше, чем  
эллиптические кривые

Квадратичное решето  
работает для чисел не  
больше  $10^{110}$  с простым  
делителем, меньшим  $\sqrt{n}$

# Атака на RSA на основе общей ЭКСПОНЕНТЫ



Если модули – взаимно простые, то по китайской тереме от остатках можно комбинировать

$$\begin{cases} C_1 = M^3 \bmod n_1 \\ C_2 = M^3 \bmod n_2 \\ C_3 = M^3 \bmod n_3 \end{cases}$$

и отсюда найти

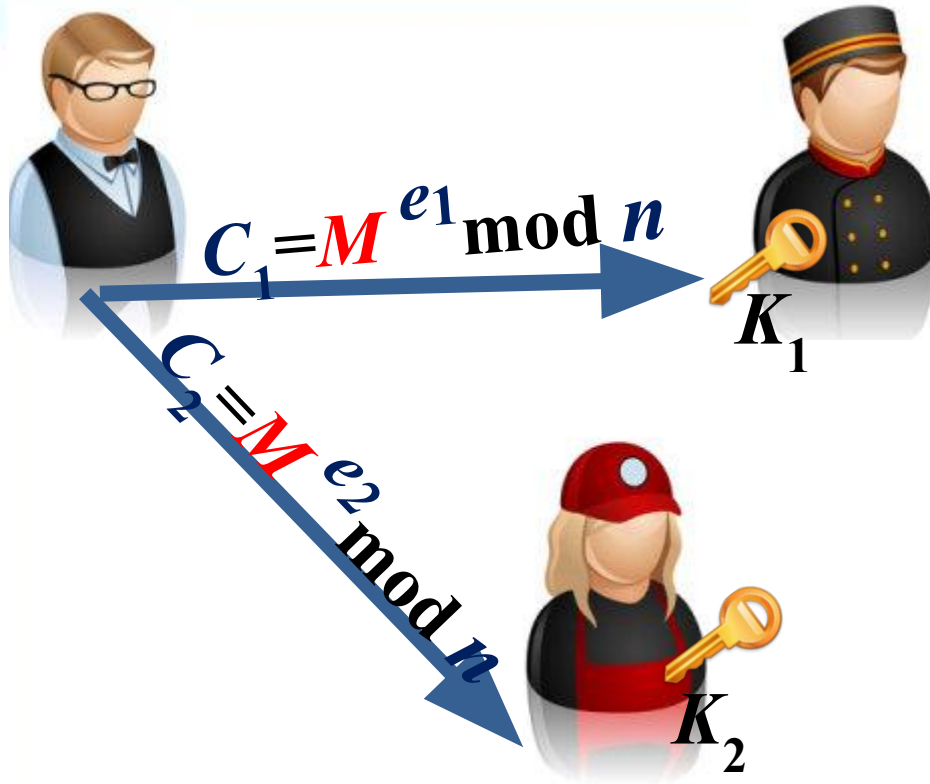
$$C = M^3 \bmod n_1 n_2 n_3$$

Т.к.  $M^3 < n_1 n_2 n_3$   $\Rightarrow$

$$M = \sqrt[3]{C}$$



# Атака на **RSA** на основе общего модуля



$$t_1 = e_1^{-1} \bmod e_2$$



$$t_1 e_1 = t_2 e_2 + 1, \quad t_2 \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = (t_1 e_1 - 1) / e_2$$

$$M = C_1^{t_1} C_2^{-t_2} \bmod n$$

Почему?

$$t_1 e_1 \equiv 1 \pmod{e_2} \implies t_1 e_1 = 1 + e_2 t_2 \implies t_2 = \frac{t_1 e_1 - 1}{e_2}$$

$$C_1^{t_1} C_2^{-t_2} \pmod{n} = (M^{e_1})^{t_1} (M^{e_2})^{-t_2} = M^{e_1 t_1} M^{-e_2 t_2} = M^{1 + e_2 t_2} M^{-e_2 t_2} = M$$



# Атака на RSA : «встреча посередине»

Мультипликативность:

$$C_1 \equiv M_1^e \pmod{n}$$

$$C_2 \equiv M_2^e \pmod{n}$$

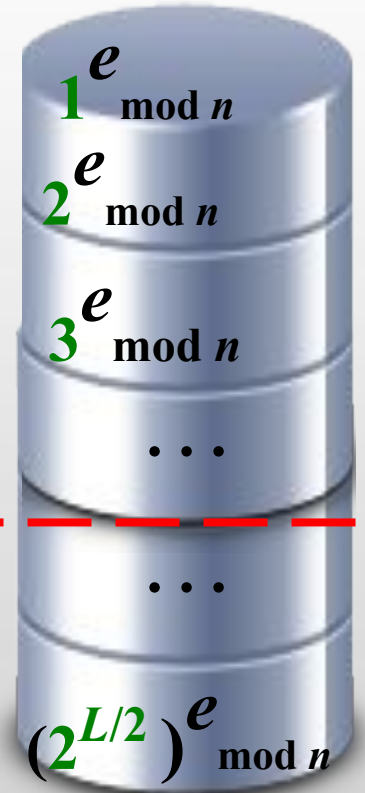
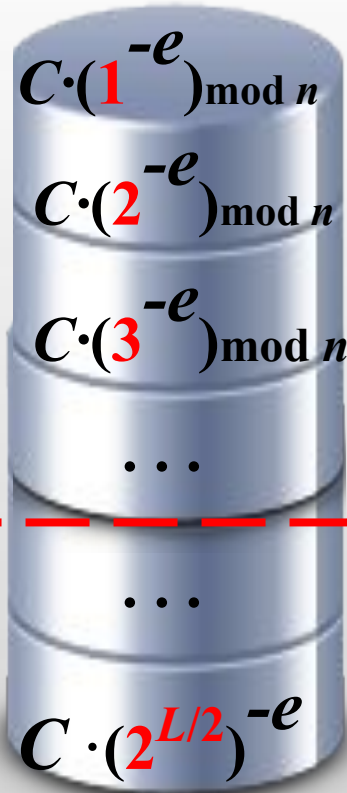
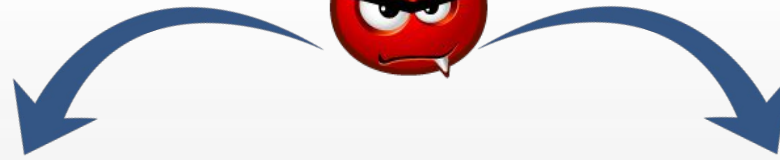
Каким будет шифротекст открытого текста  $M = M_1 M_2$  ?

$$C \equiv (M_1 M_2)^e = M_1^e M_2^e \pmod{n} = C_1 C_2$$

$$C \cdot M_1^{-e} = M_2^e \pmod{n} \quad \Rightarrow \quad \text{можно построить атаку}$$

Пусть известно, что  $M = M_1 M_2 < 2^{L/2}$

# Атака на RSA : «встреча посередине»

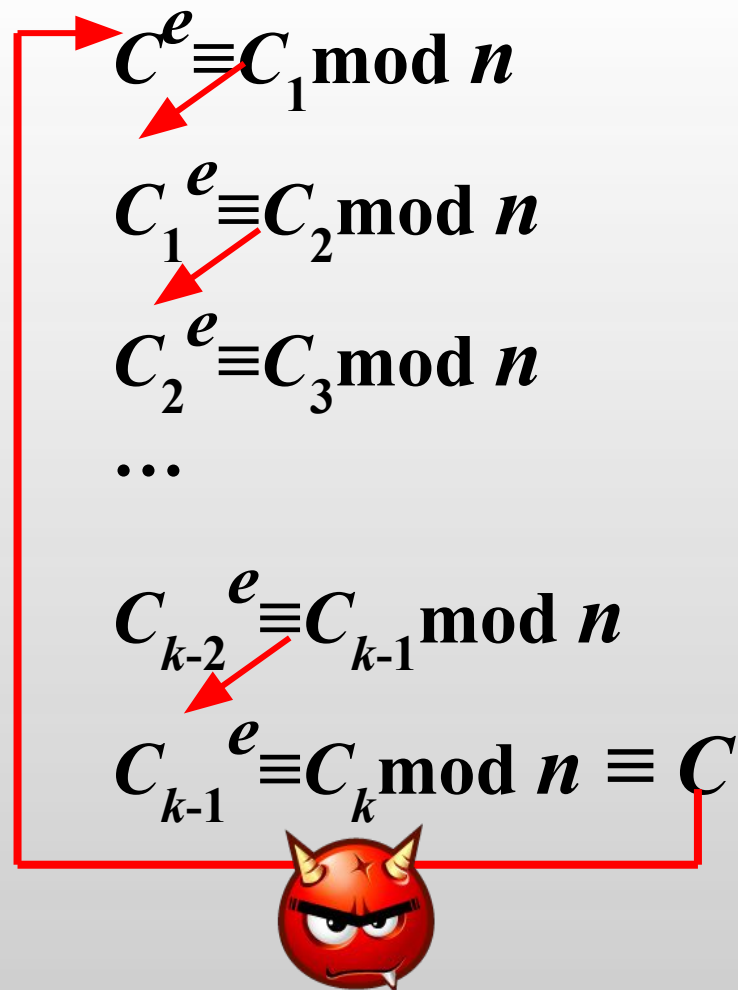


$$C \cdot i^{-e} \bmod n \equiv j^e \bmod n$$



$$M = i \cdot j$$

# Циклическая атака на RSA (бесключевое чтение)



Атака успешна, если порядок  $k$  открытой экспоненты  $e$  мал ( $k$  – наименьшее число, для которого  $e^k \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ ;  
 $\text{НОД}(e, \varphi(n))=1$ )

$$\Rightarrow M = C_{k-1}$$

# Атака Винера: математическое вступление

## ЦЕПНЫЕ (НЕПРЕРЫВНЫЕ) ДРОБИ

Любое действительное число  $x$  можно представить цепной дробью

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

$$a_0 \in \mathbb{Z}; \quad a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$$



# Атака Винера: математическое вступление

Как найти элементы цепной дроби для числа  $x$  ?

$$x_0 = x - a_0 ;$$

$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{x_0} \right\rfloor ; \quad x_1 = \frac{1}{x_0} - a_1 ;$$

$$a_2 = \left\lfloor \frac{1}{x_1} \right\rfloor ; \quad x_2 = \frac{1}{x_1} - a_2 ;$$

$$a_i = \left\lfloor \frac{1}{x_{i-1}} \right\rfloor ; \quad x_i = \frac{1}{x_{i-1}} - a_i ;$$

$x$  - целая часть числа  $x$



# Атака Винера: математическое

## вступление

Пример. Найти разложение в цепную дробь  
числа  $x = \frac{34}{99}$

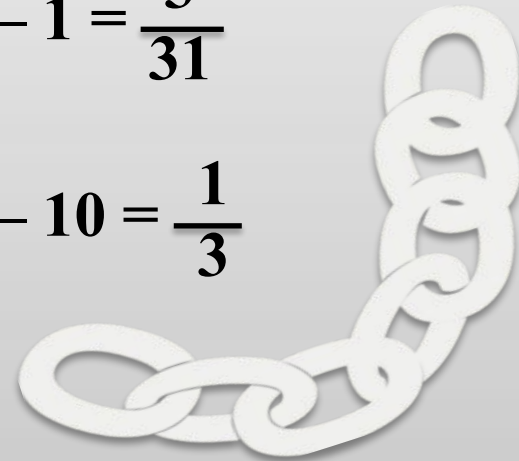
Решение.  $a_0 = \lfloor x_0 \rfloor = \left\lfloor \frac{34}{99} \right\rfloor = 0$ ;  $x_0 = x - a_0 = \frac{34}{99}$

$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{x_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{99}{34} \right\rfloor = 2; \quad x_1 = \frac{1}{x_0} - a_1 = \frac{99}{34} - 2 = \frac{31}{34}$$

$$a_2 = \left\lfloor \frac{1}{x_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{34}{31} \right\rfloor = 1; \quad x_2 = \frac{1}{x_1} - a_2 = \frac{34}{31} - 1 = \frac{3}{31}$$

$$a_3 = \left\lfloor \frac{1}{x_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{31}{3} \right\rfloor = 10; \quad x_3 = \frac{1}{x_2} - a_3 = \frac{31}{3} - 10 = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \left\lfloor \frac{1}{x_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor = 3$$



# Атака Винера: математическое вступление

$$x = \frac{34}{99} = [0; 2, 1, 10, 3] = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{10 + \frac{1}{3}}}}$$



# Атака Винера: математическое вступление

**$i$ -ой подходящей дробью  $\frac{p_i}{q_i}$  для цепной дроби**  
 $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$

называют конечную цепную дробь  $\frac{p_i}{q_i} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_i]$

Рекуррентные формулы для вычисления подходящих

дробей для цепной дроби  $\frac{p_i}{q_i} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_i]$  :

$$p_{-1} = 1; \quad q_{-1} = 0;$$

$$p_0 = a_0; \quad q_0 = 1$$

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{a_i p_{i-1} + p_{i-2}}{a_i q_{i-1} + q_{i-2}}; \quad i = 1, 2, \dots$$



# Атака Винера: математическое

## вступление

Пример. Найти подходящие дроби для цепной дроби

$$\frac{34}{99} = [0; 2, 1, 10, 3]$$

Решение.  $[0; 2, 1, 10, 3]$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 \end{array}$$

$$p_{-1} = 1; \quad p_0 = 0; \quad q_{-1} = 0; \quad q_0 = 1$$

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 p_0 + p_{-1}}{a_1 q_0 + q_{-1}} = \frac{2 \cdot 0 + 1}{2 \cdot 1 + 0} = \frac{1}{2}; \quad p_1 = 1; \quad q_1 = 2;$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} = \frac{1 \cdot 1 + 0}{1 \cdot 2 + 1} = \frac{1}{3}; \quad p_2 = 1; \quad q_2 = 3;$$



# Атака Винера: математическое вступление

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{10 \cdot 1 + 1}{10 \cdot 3 + 2} = \frac{11}{32}; \quad p_3 = 11; \quad q_3 = 32;$$

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{a_4 p_3 + p_2}{a_4 q_3 + q_2} = \frac{3 \cdot 11 + 1}{3 \cdot 32 + 2} = \frac{34}{99}; \quad p_4 = 34; \quad q_4 = 99$$

Подходящие дроби:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2}; \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{3}; \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{11}{32}; \quad \frac{p_4}{q_4} = \frac{34}{99};$$



# Атака Винера: математическое вступление

Если несократимая дробь  $\frac{p}{q}$  удовлетворяет  
неравенству:

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{2q^2}$$

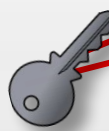
то дробь  $\frac{p}{q}$  – одна из подходящих дробей в  
разложении числа  $x$  в цепную дробь.



# Атака Винера


М. Винер показал, что когда секретная экспонента


$d < \frac{1}{3} \sqrt[4]{n}$ , то дробь  $\frac{e}{n}$  удовлетворяет неравенству


$$\left| \frac{e}{n} - \frac{k}{d} \right| \leq \frac{1}{2d^2}$$

- это классическая аппроксимация с помощью цепных дробей;
- число дробей  $\frac{k}{d}$ , где  $d < n$  не больше  $\log n$
- для некоторого  $k$  выполнится  $\frac{k}{d} = \frac{p}{q}$ . Тогда так как  $\text{НОД}(k, d) = 1$ , то  $p = k, q = d$

# Атака Винера: сценарий

Разложить дробь  $\frac{e}{n}$  в цепную дробь 

Найти все подходящие дроби для  
дроби  $\frac{e}{n}$  

Среди подходящих дробей  $p/q$  найти ту,  
для которой  $eq-1$  делится нацело на  $p$ .  
Тогда  $p=k$ ,  $q=d$ .

# Атака Винера: противодействие

Для противодействия атаке надо, чтобы секретная экспонента была не меньше, чем

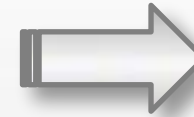
$$n^{0,292}$$

Например, если модуль имеет размер **1024** бит, необходимо чтобы длина секретной экспоненты была не менее **256** бит.

# Использование китайской теоремы об остатках для ускорения расшифрования



$$M = C^d \pmod{n}$$



Секретный ключ –  
экспонента  $d$

Если длина модуля  $|n|=1024$  бит, то длина секретной экспоненты  $|d| \sim 1024$  бит

# Зависимость времени вычисления значения $y = x^e \pmod n$ от длины модуля



Время расшифрования (миллисекунды) Pentium, 2 ГГц



<http://security.stackexchange.com/questions/1833/encryption-decryption-time>

Каждое удвоение длины ключа RSA увеличивает время расшифрования в 6 – 7 раз



Нужен алгоритм расшифрования с минимальным числом операций



# Использование китайской теоремы об остатках для ускорения расшифрования

Владелец секретного ключа знает  $p$  и  $q$  

1

$$M_p \equiv C^d \pmod{p} \equiv C^{d \bmod p-1} \pmod{p}$$
$$M_q \equiv C^d \pmod{q} \equiv C^{d \bmod q-1} \pmod{q}$$

2

По китайской теореме об остатках

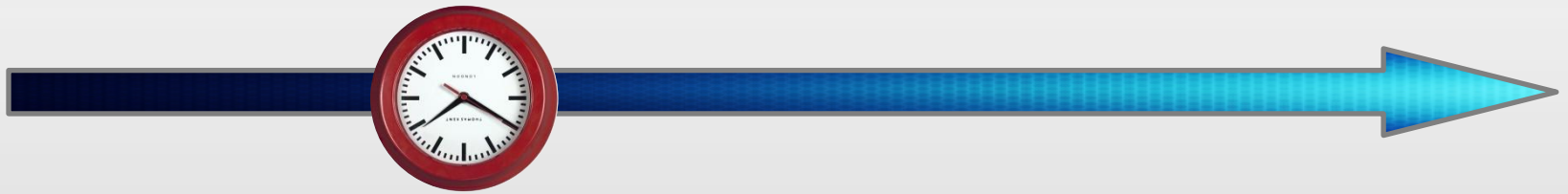
$$\begin{cases} M \equiv M_p \pmod{p} \\ M \equiv M_q \pmod{q} \end{cases}$$

Если длина модуля  $|n|=1024$  бит, то длины множителей  $|p|=|q|=512$  бит

# Использование китайской теоремы об остатках для ускорения расшифрования

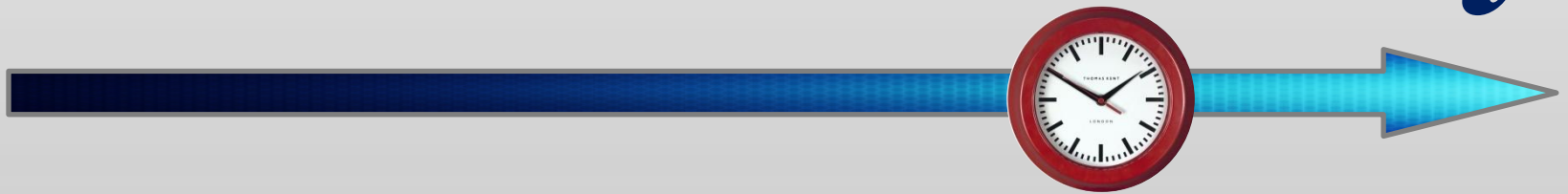
Два возведения в степень по mod дл. 512 бит с показателем 512 бит

*t*



Одно возведение в степень по mod дл. 1024 бит с показателем 1024 бит

*t*



# Симметричные против асимметричных криптосистем

**Стойкие, работают очень быстро. Им не нужны большие вычислительные ресурсы.**

**Асимметричные алгоритмы очень медленные**

**При передаче ключа он может быть перехвачен мошенником**

**Распространяют открытые ключи открыто. Перехват открытых ключей – бесполезен.**

# Гибридные криптосистемы



# Гибридные криптосистемы

Совмещают преимущества криптосистем с открытым ключом и производительность симметричных шифров:

- данные шифруются с помощью симметричного шифра;
- асимметричный алгоритм шифрует только ключ симметричного шифра

Инкапсуляция

ключа



Инкапсуляция  
сообщения

$$C_k - \text{RSA}, E_{\text{откр.}}(k)$$

$$C_m - \text{AES}, E_k(m)$$

Числовая упаковка сообщения

# Гибридные криптосистемы

