

# Лекция 6. Математические методы управления инвестиционной деятельностью

Содержание лекции:

1. Классификация методов принятия инвестиционных решений в условиях неопределённости
2. Метод альтернативных целей
3. Анализ приоритета объектов инвестирования АНР-методом
4. Применение теории многоатрибутной полезности для принятия инвестиционных решений
5. Моделирование инвестиционного риска



# Литература

*Шелобаев С.И.* Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. — Раздел III.

Управление фирмой / Под ред. *Л.Л. Разумновой*. М.: МАКС Пресс, 2009. — Часть 2, с. 40-51.

Моделирование экономических процессов: Учебник / Под ред. *М.В. Грачёвой, Л.Н. Фадеевой, Ю.Н. Черемных*. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. — Глава 9.

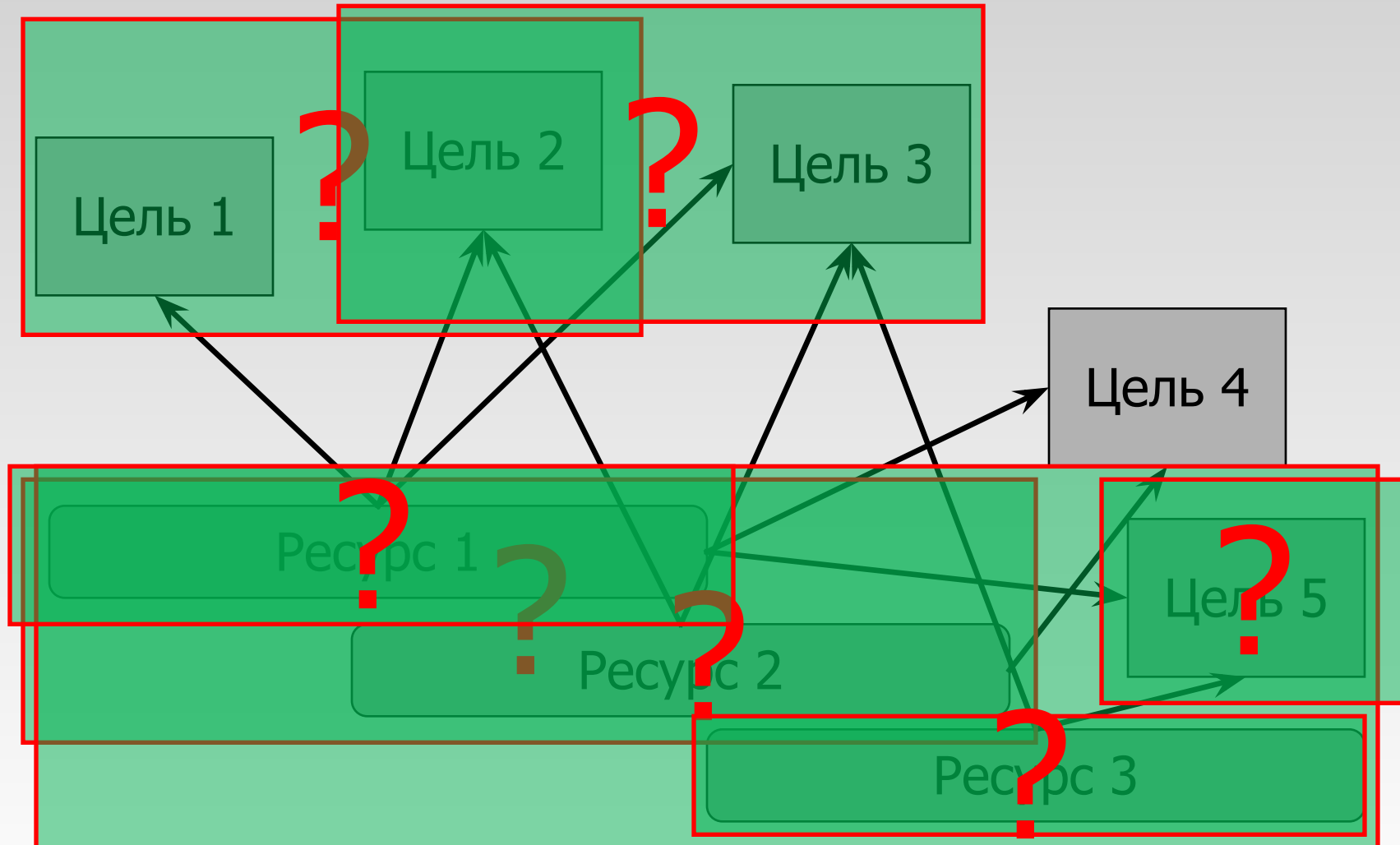
*Шарп У.* и др. Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 1997.



# 6.1.

- **Методы принятия инвестиционных решений в условиях неопределенности**
  - Неопределённость цели
    - Оптимизация системы целей (целочисленное программирование)
  
  - АНР
  
  - Неопределённость эффекта
    - Теория игр
  
    - Стохастическое программирование
  
    - Метод Марковица
  
    - Теория полезности Неймана-Моргенштерна
  
  - Неопределённость измерителя
    - Анализ полезности альтернатив

## 6.2. Метод альтернативных целей



## 6.2

Максимум экономического эффекта:

$$\max \sum_{d \in D} c_d x_d - \sum_{r \in R} \left( c_r - \sum_{s \in R_r} c_s \right) x_r$$

Затраты бюджетных средств:

$$\sum_{r \in R} \left( c_r - \sum_{s \in R_r} c_s \right) x_r \leq B$$

Количество используемых ресурсов:

$$\alpha_{dr} x_d \leq x_r, \quad d \in D, r \in R_d$$

Несовместимые цели:

$$\sum_{d \in D_i} x_d \leq 1, \quad i \in I$$

Заменимость ресурсов:

$$x_r \leq x_s, \quad r \in R, s \in R_r$$

Логические переменные:

$$x_d \in \{0;1\}, \quad d \in D$$

Целочисленные переменные:

$$x_r \in \{0\} \cup N$$



## 6.2

- $D$  – множество возможных целей инвестиционной программы
- $R_d$  – множество ресурсов, необходимых для достижения цели  $d \in D$
- $R$  – множество всех ресурсов
- $R_r$  – множество ресурсов, которые могут быть заменены ресурсом  $r$
- $I$  – множество множеств несовместимых целей
- $D_i$  –  $i$ -е множество несовместимых целей ( $i \in I$ )
- $x_d$  – логическая переменная, означающая включение (1) или исключение (0) цели  $d \in D$  из инвестиционной программы
- $x_r, x_s$  – количество ресурсов  $r$  и  $s$  соответственно ( $r \in R, s \in R$ )
- $B$  – максимально возможный объём финансирования
- $c_d$  – выгоды (в денежном выражении), обусловленные достижением цели  $d$
- $c_r, c_s$  – затраты (в денежном выражении) на единицу ресурсов  $r$  и  $s$  соответственно ( $r \in R, s \in R$ )
- $\alpha_{dr}$  – количество ресурса  $r \in R_d$ , необходимое для достижения цели  $d \in D$
- $N$  – множество натуральных чисел



## 6.3. Метод АНР

### ■ Входная информация

- ◆ дерево целей
  - ◆ «достичь», «построить», «освоить», «внедрить», «завершить», «приступить к»
- ◆ попарное сравнение значимости целей, относящихся к одной и той же вышестоящей цели
  - ◆ каждой паре целей ставится в соответствие неотрицательное число  $v_{ik}$ 
    - во сколько раз цель  $i$  важнее цели  $k$
    - экспертная оценка
    - $v_{ik} = 1/v_{ki}$ ;  $v_{ii} = 1$

**NB:** применяется, если стоимостная оценка целей недоступна или невозможна

### ■ Алгоритм


- ◆ Расчёт коэффициентов приоритета целей
- ◆ Проверка органичности оценки приоритетов
- ◆ Расчёт обобщённых приоритетов для всей системы целей
- ◆ Оценка проекта



# 6.3

- **Расчёт коэффициентов приоритета целей**
  - ◆  $\mathbf{V} = (v_{ik})$ 
    - ◆ находим для этой матрицы *собственный вектор*  $\mathbf{w}$  из уравнения  $(\mathbf{V} - k\mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{0}$
  - ◆ Принимаем  $w_i$  в качестве коэффициента приоритета цели  $i$ , полагая  $\mathbf{w} = (w_i)$ 
    - ◆ Расчёт повторяется для каждого набора целей, относящихся к одной и той же вышестоящей цели
- **Проверка органичности оценок**
  - ◆ Об органичности судят, сопоставляя величину  $k$  с числом целей, представленным матрицей  $\mathbf{V}$ 
    - ◆ Расчётные формулы содержатся в рекомендуемой литературе
  - ◆ Если оценка не органична, экспертное сравнение значимости целей проводят заново
- **Расчёт обобщённых приоритетов для всей системы целей**
  - ◆ Обобщённый приоритет цели равен произведению коэффициента её приоритета и коэффициентов приоритета всех целей, вышестоящих по отношению к ней
- **Оценка проекта**
  - ◆ Если издержки не имеют значения (укладываются в имеющийся финансовый ресурс), выбирают проект, реализующий набор целей, имеющий наибольшую сумму обобщённых приоритетов
    - ◆ Можно учесть степень достижения цели, умножая соответствующий коэффициент на её обобщённый приоритет
  - ◆ Если издержки по проекту известны, то их **делят** на сумму обобщённых приоритетов достигаемых данным проектом целей и выбирают проект по минимальному значению получившегося показателя





## 6.4. Теория многоатрибутной полезности и её применение

- Идентифицируются критерии качества достижения цели инвестиционной деятельности
  - ◆ Обычно используется метод их иерархической структуризации
  - ◆ Чем обширнее список критериев, тем точнее анализ
  - ◆ Чем менее критерии зависимы друг от друга (чем ниже корреляция между ними), тем точнее анализ
    - ◆ Если критерий качественный, используется корреляция рангов
- Определяется функция полезности каждого критерия по отношению к цели инвестиционной деятельности
  - ◆ Экспертная оценка с последующим отображением её результатов на выбранную функциональную форму
  - ◆ Область значений –  $[0; 1]$ .
    - ◆ Подробности – в рекомендуемой литературе
- Определяются коэффициенты соизмерения единичных значений полезности для каждой пары критериев
  - ◆ Экспертная оценка или анализ статистических данных
- Для каждого проекта определяются:
  - ◆ значение каждого критерия
  - ⇒ значение каждой функции полезности
  - ⇒ общая полезность
  - ⇒ выбирается проект, обеспечивающий наибольшую полезность



# 6.5. Моделирование инвестиционного риска

- Пример
  - ◆ Определение эффективного инвестиционного портфеля по критериям доходности и риска
- Метод Марковица
  - ◆ Риск измеряется дисперсией дохода
  - ◆ Учитывается взаимозависимость доходности различных видов вложений (ценных бумаг)
  - ◆ Исходные данные:
    - о доходности ценных бумаг в течение достаточно большого количества моментов времени  
или
    - о статистическом распределении доходности
  - ◆ Предположение:
    - распределение вероятностей доходов по каждой ценной бумаге не зависит от времени (не имеет тренда)



# 6.5

Мат. ожидание дохода от ценной бумаги  $i$ :  $v_i = \frac{\sum_{t=1}^T v_{it}}{T}$

Фактически наблюдаемые доходы в расчёте на рубль вложений

Дисперсия дохода от ценной бумаги  $i$ :  $\sigma_i^2 = \left( \sum_{t=1}^T v_{it}^2 \right) - v_i^2$

Ковариация доходов от ценных бумаг  $i$  и  $j$ :  $c_{ij} = r_{ij} \sqrt{\sigma_i^2 \sigma_j^2}$

Коэффициент парной корреляции по Пирсону

Дисперсия доходов от портфеля:  $\sigma_0^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} s_i s_j$

Доли ценных бумаг каждого вида в портфеле ( $n$  – число видов ц.б.)

(подразумевается  $\sum_{i=1}^n s_i = 1; s_i \geq 0, i = 1 \dots n$ )

Условия оптимальности:

$$\max \sum_{i=1}^n s_i v_i;$$

$$\min \sigma_0^2$$

Множество Парето удобнее всего исследовать весовым методом